Édouard Thomas

Les mystérieux carnets de Ramanujan

Comité international des jeux mathématiques
Salon « culture et jeux mathématiques »

Samedi 28 mai 2016
Place Saint-Sulpice
75006 Paris

17e Salon
Culture & Jeux
Mathématiques
2016

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

- Un mathématicien passionné
- Une destinée fulgurante
- Une intuition puissante et mystérieuse
- Des formules mathématiques inédites
- Un héritage inouï : les carnets
- 2016 : enfin un film grand public !

Sommaire

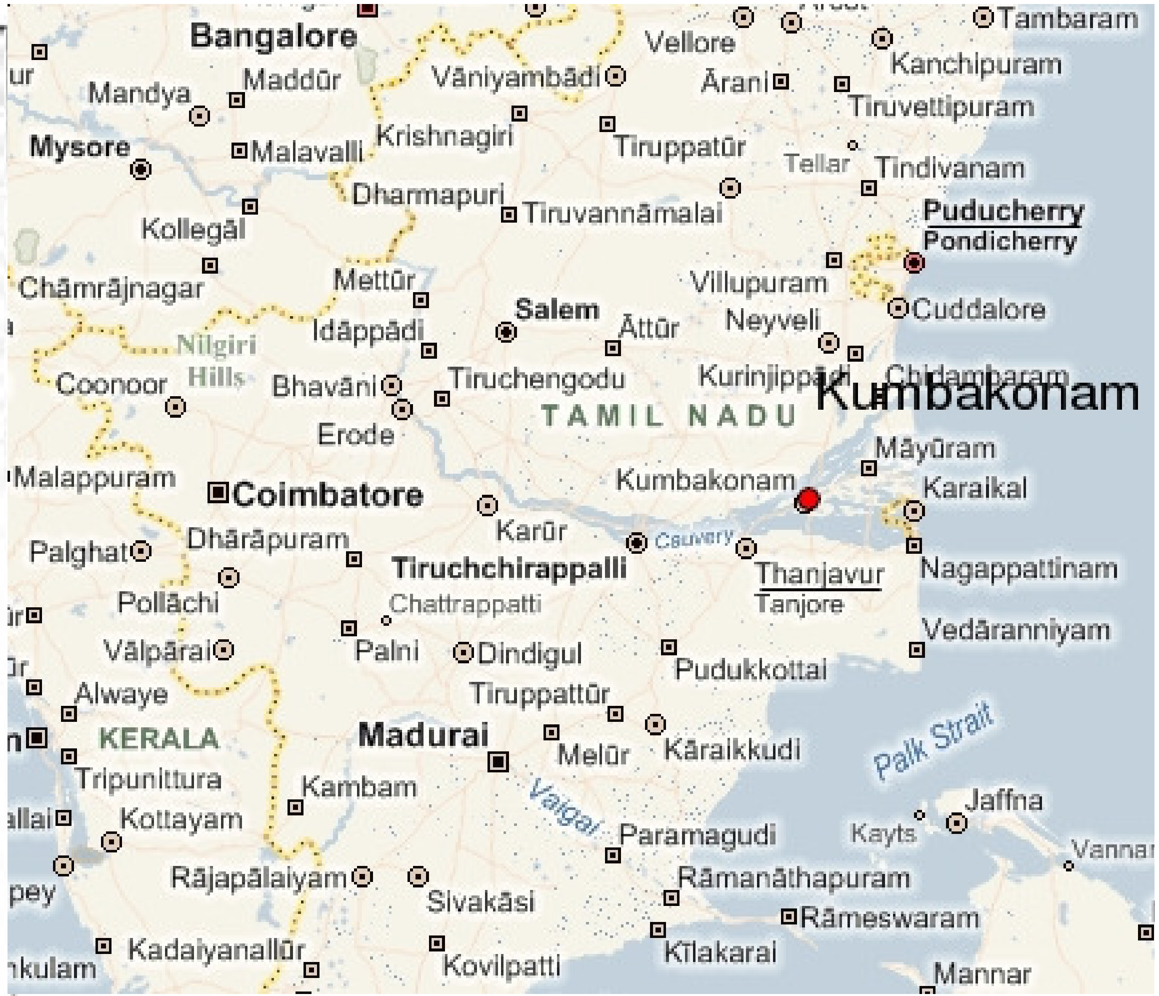
- L'Inde du Sud à la fin du XIX^{e} siècle
- Srinivasa Ramanujan (1887–1920)
- Cambridge, Hardy et la guerre
- Le voyage des carnets
- Un siècle d'édition
- Le « mystère » sur des exemples

L’Inde du Sud à la fin du XIXe siècle

- Capitale : Madras (aujourd’hui Chennaï)
- La colonisation britannique jusqu’en 1947
- Des traditions fortes (castes, religion, famille)
- La vie spirituelle encouragée (hindouisme…)
- Climat tropical
- Économie agricole et artisanale
- Train opérationnel depuis 1877

Kumbakonam

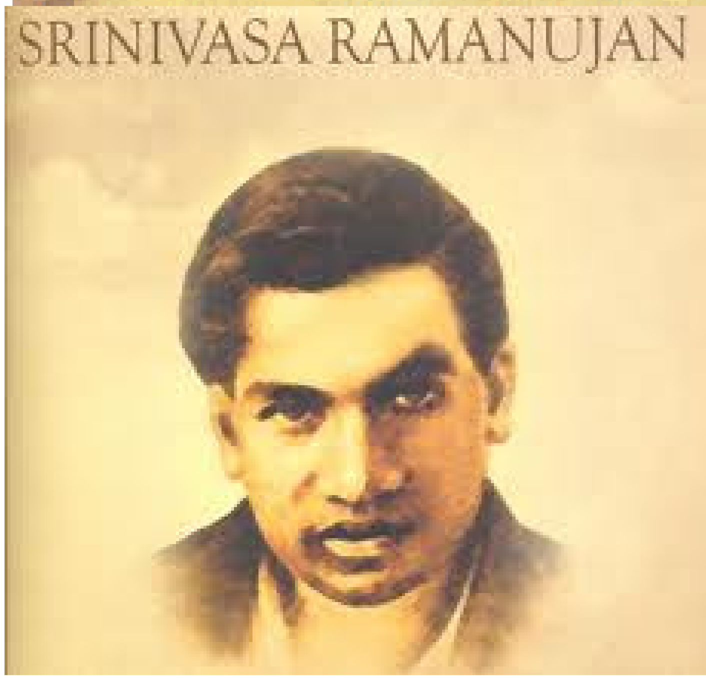
- État du Tamil Nadu, 300 km au sud de Chennaï
- « Chef-lieu de canton », district de Thanjavur
- Ville réputée pour son tissu (saris en soie) et le travail fin des métaux (cuivre, argent…)
- 50 000 habitants en 1880, 60 000 en 1900
- Une ville de pèlerinage (plus de douze temples majeurs)
- Ville phare du brahmanisme (caste supérieure)
- Eau non potable (moustiques, éléphantiasis…)



La Kâverî est un fleuve sacré

Ramanujan

- Né à Érode (Pallipalayam), 22 décembre 1887
- Vit avec sa famille à Kumbakonam
- Brahmane très observant (végétarien…)



Une enfance difficile

- Une famille non fortunée
- Variole et autres maladies, santé fragile
- Nombreux décès dans la famille

Scolarité

- « Primary examination » (arithmétique, tamoul, anglais, géographie) : 1er du district, à 9 ans !
- À 14 ans : déjà célèbre dans l'académie pour ses capacités en mathématiques
- À 15 ans : découvre le livre de Carr

  décide de se consacrer aux maths

  abandon des autres matières

A synopsis of elementary results in pure mathematics, George Shoobridge Carr, 1880 (deux volumes)


A BRIEF BIOGRAPHY OF RAMANUJAN

A SYNOPSIS

ELEMENTARY RESULTS

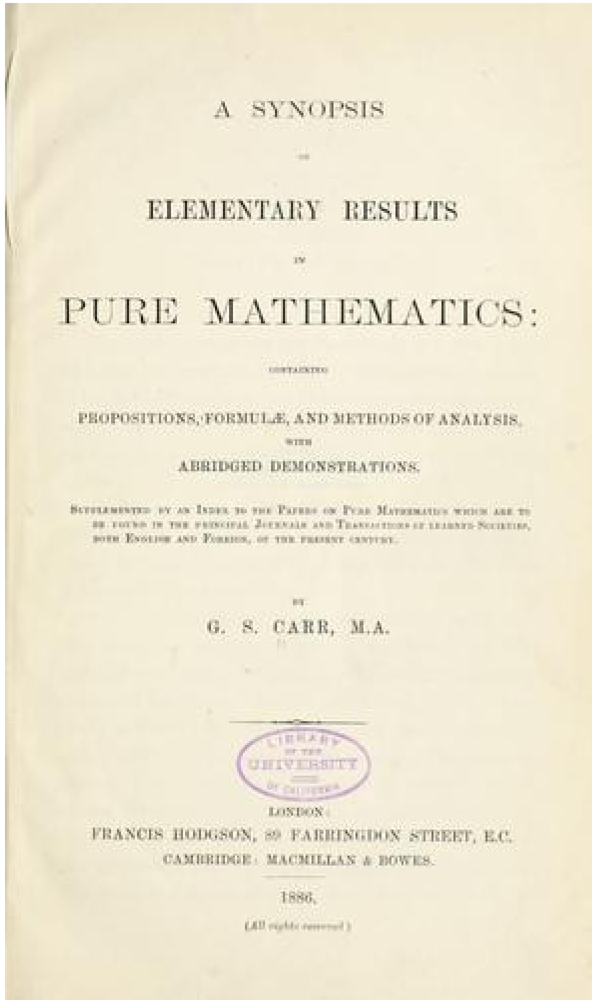
PURE MATHEMATICS

G. S. CARR, M.A.

LONDON

FRANCIS HODGSON, 89 FARRINGDON STREET, E.C.

CAMBRIDGE: MACMILLAN & BOWES.


A SYNOPSIS

OF

ELEMENTARY RESULTS

IN

PURE MATHEMATICS:

CONTAINING

PROPOSITIONS, FORMULÆ, AND METHODS OF ANALYSIS,

WITH

ABRIDGED DEMONSTRATIONS.

Supplemented by an Index to the Papers on Pure Mathematics which are to be found in the principal Journals and Transactions of learned Societies, both English and Foreign, of the present century.

BY

G. S. CARR, M.A.

LONDON:

FRANCIS HODGSON, 89 FARRINGDON STREET, E.C.

CAMBRIDGE: MACMILLAN & BOWES.

1886.

Conséquences…

- Se consacre jour et nuit aux mathématiques
- Recense ses **découvertes** dans des carnets
- Échec à tous les examens à venir
- Perte de sa bourse d'étude
- Mariage arrangé avec Janaki (9 ans)
  pour l'obliger à s'assumer, petits boulots

- Tente de faire reconnaître
  la valeur de son travail

Des contacts

- Ramanujan constitue un réseau
- Problème : est-ce un génie ou un illuminé ?
- Mécénat de Ramachandra Rao (Chennaï)
- Aide de l'Indian Mathematical Society
- Aide de l'université
- Travaille **intensément**
- Doit demander conseil à des experts…

Les lettres

1912–1913

- Première lettre : Henry Frederick Baker (48 ans, Fellow of the Royal Society)
  Pas de réponse positive…
- Deuxième lettre : Ernest William Hobson (56 ans, Fellow of the Royal Society)
  Pas de réponse positive…
- Troisième lettre : **Godfrey Harold Hardy**

Godfrey Hardy (1877–1947)

- Né le 7 février 1877
- Incontestablement le plus grand scientifique britannique depuis Newton



En 1913…

- 35 ans, 3 livres à son crédit
- 100 articles publiés depuis quinze ans
- Fellow of the Royal Society depuis 1910
- A commencé à constituer une école
- Encourage les maths de son temps
- Bien installé à Cambridge et dans sa carrière
- Fin janvier 1913, il reçoit une lettre…

Quelques formules (notations modernes) contenues dans la lettre de Ramanujan à Hardy, datée du 16 janvier 1913

$$1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4-\ldots=\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\ldots\right) \tag{1}$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi} \tag{2}$$

$$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\ldots=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} \tag{3}$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5+\ldots=\frac{2}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^4} \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2}\ldots\,dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b+1)\Gamma\left(b-a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b-a+1)} \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\ldots}=\frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\ldots)} \tag{6}$$

$$\text{Si } \alpha\beta=\pi^2,\text{ alors } \alpha^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\alpha\int_0^\infty\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right)=\beta^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\beta\int_0^\infty\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right) \tag{7}$$

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}-\cfrac{e^{-a^2}}{2a+\cfrac{1}{a+\cfrac{2}{2a+\cfrac{3}{a+\cfrac{4}{2a+\ldots}}}}} \tag{8}$$

$$4\int_0^\infty\frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}\,dx=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\ldots}}}}}}} \tag{9}$$

$$\text{Si } u=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^{10}}{1+\cfrac{x^{15}}{1+\ldots}}}}\text{ et } v=\cfrac{x^{\frac{1}{5}}}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\ldots}}}},\text{ alors } v^5=u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4} \tag{10}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}}}=\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{\frac{2}{5}\pi} \tag{11}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}}}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} \tag{12}$$

L’invitation

- Hardy invite Ramanujan à Cambridge
- Idée : le former aux maths **de son temps**
- Le 17 mars 1914, le prodige embarque
- Il cesse de consigner ses découvertes dans des carnets
- À peine Ramanujan arrivé (le 14 avril 1914), la Grande Guerre éclate (4 août 1914)

Ramanujan à Cambridge

- De nombreux problèmes :

  Le climat, le régime alimentaire, les vêtements, l'ostracisme, la solitude, une autre culture
- Accentués par la guerre :

  Le rationnement, l'explosion des prix, les pénuries, des mathématiciens mobilisés
- L'université de Cambridge :

  Hôpital et camp d'entraînement, pas de lumière la nuit, coupures d'électricité

La maladie

- Un séjour qui se prolonge
- Tensions entre sa femme et sa mère
- Privations, travail intense, vie rude, guerre

La maladie (amibiase hépatique ?)

Terrible souffrance physique

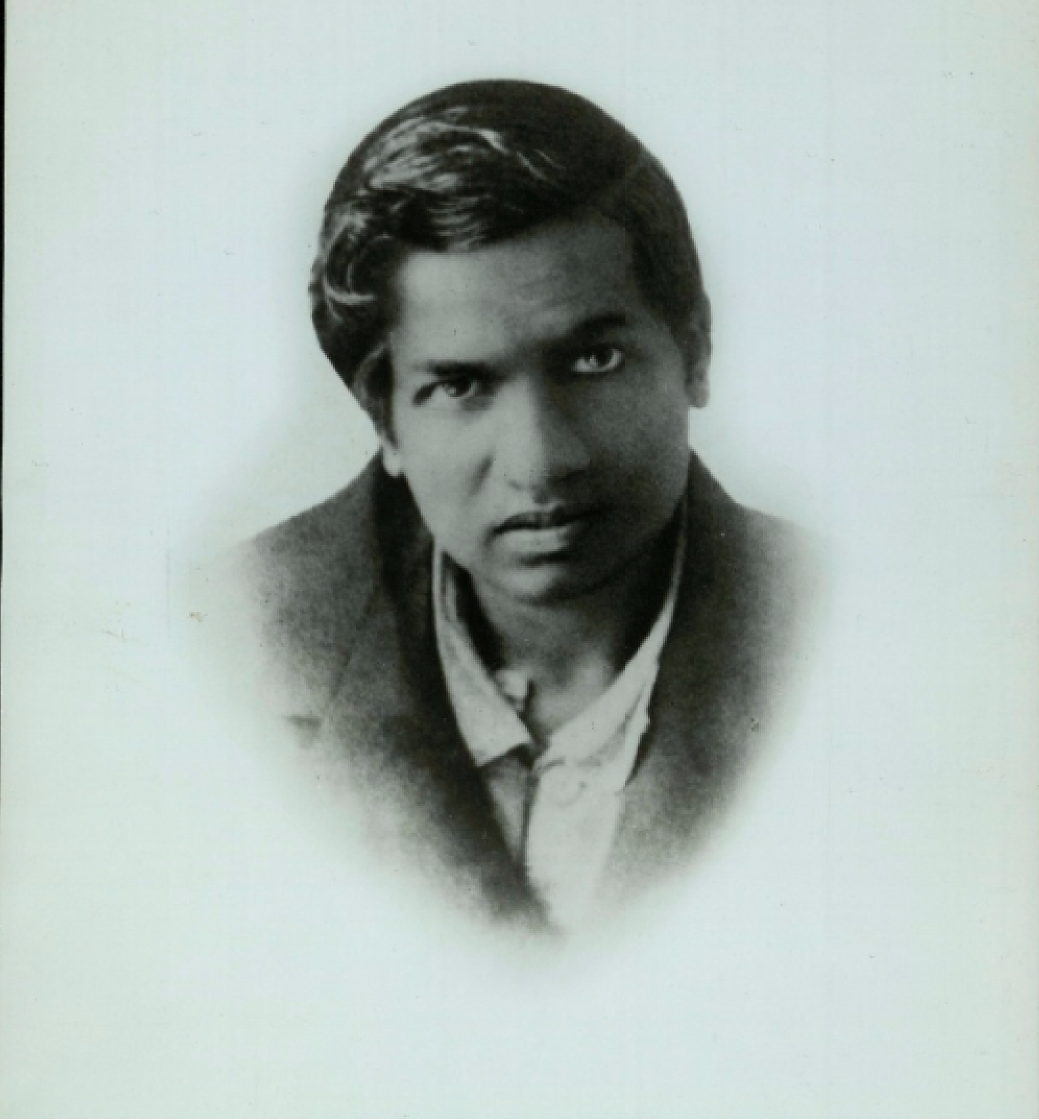
Diagnostics erronés (tuberculose…)

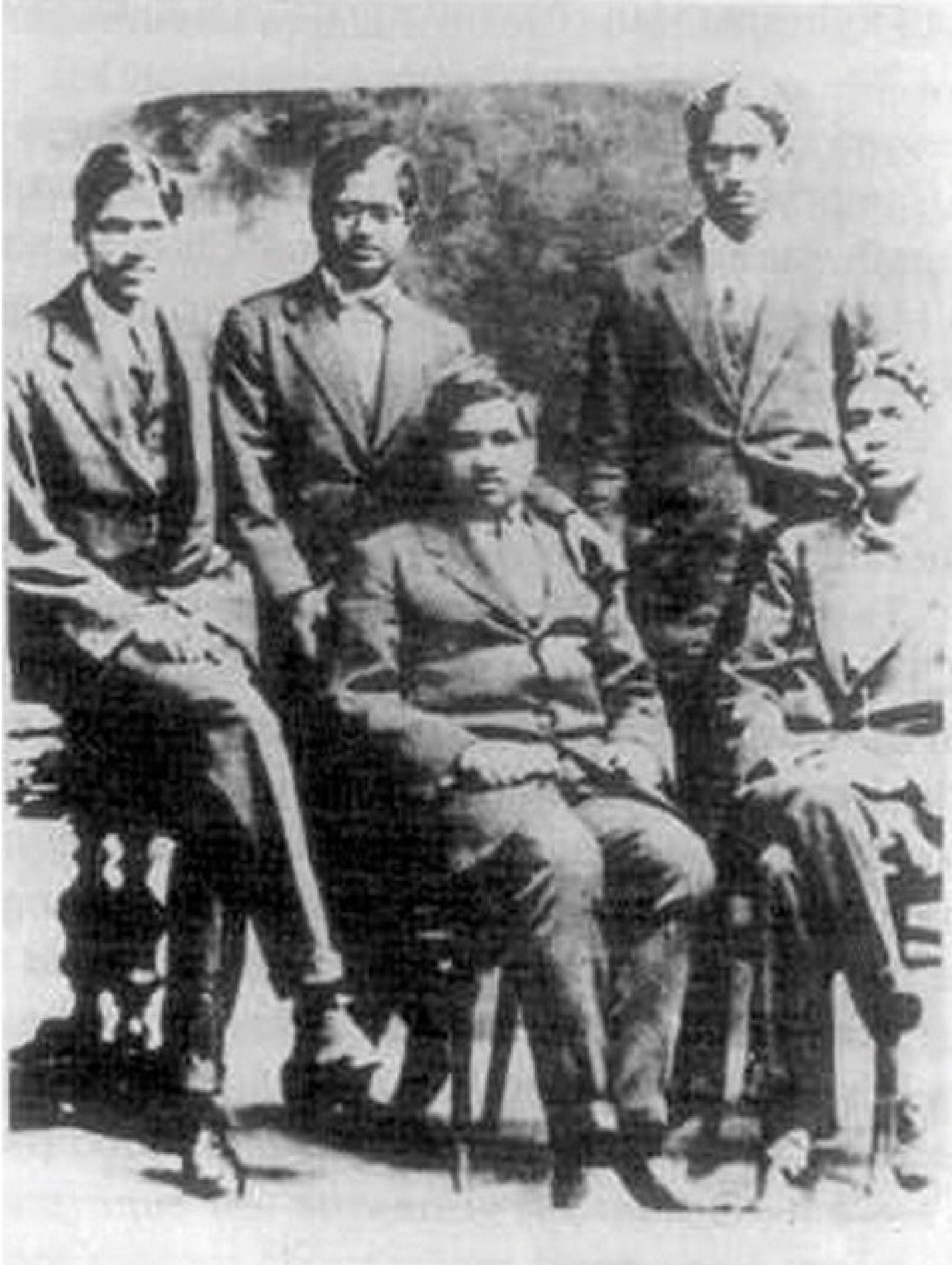
Tensions avec le corps médical

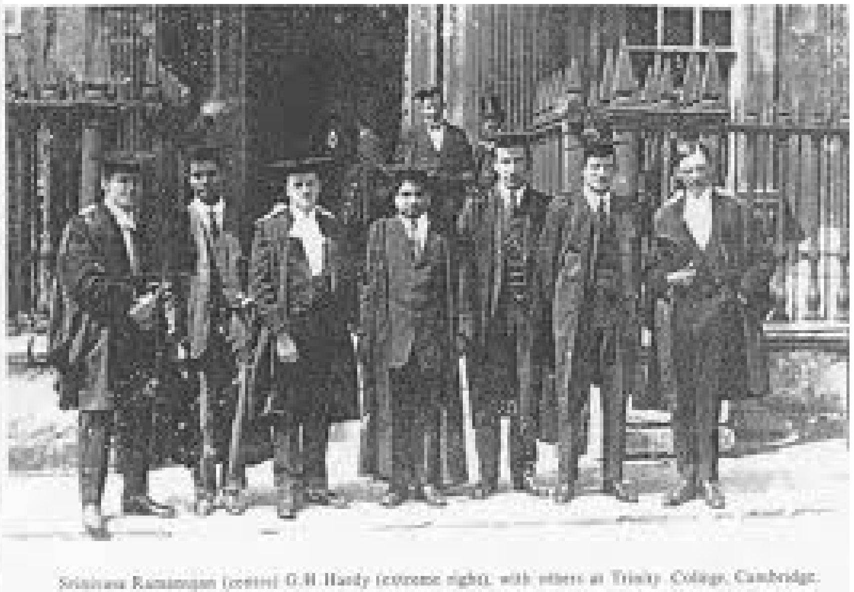
Aucun traitement ne semble efficace

Retour en Inde

- 1917–1918 : sanatoriums (Matlock, Fitzroy…)
- 1917 : Fellow of the London Mathematical Society
- 1918 : Fellow of the Royal Society (30 ans !)
  Fellow of Trinity College, Cambridge
  retrouve de l'énergie pour ses recherches
- 1919 : de retour en Inde, c'est un héros national
  la maladie empire
- 1920 : ultimes contributions mathématiques
  décès le 26 avril 1920 (32 ans)







Srinivasa Ramanujan (centre) G.H Hardy (extreme right), with others at Trinity College, Cambridge.

Les contributions mathématiques

De nombreux domaines abordés :

séries (hypergéométriques, de Dirichlet, de Lambert, d'Eisenstein, bilatérales, *q*-séries), **fonctions spéciales** (fonctions thêta, fausses fonctions thêta, fonctions thêta déguisées, fonctions elliptiques), **analyse combinatoire** (nombres de Bernoulli, transformations, identités remarquables, invariants de classe, équations modulaires, modules singuliers), **théorie des nombres** (fonctions arithmétiques, fractions continues, radicaux imbriqués, nombre de partitions, fonction tau), **analyse** (produits infinis, calcul intégral, développements asymptotiques, formules d'inversion, produit de Hadamard), trigonométrie, géométrie…

Points d’orgue

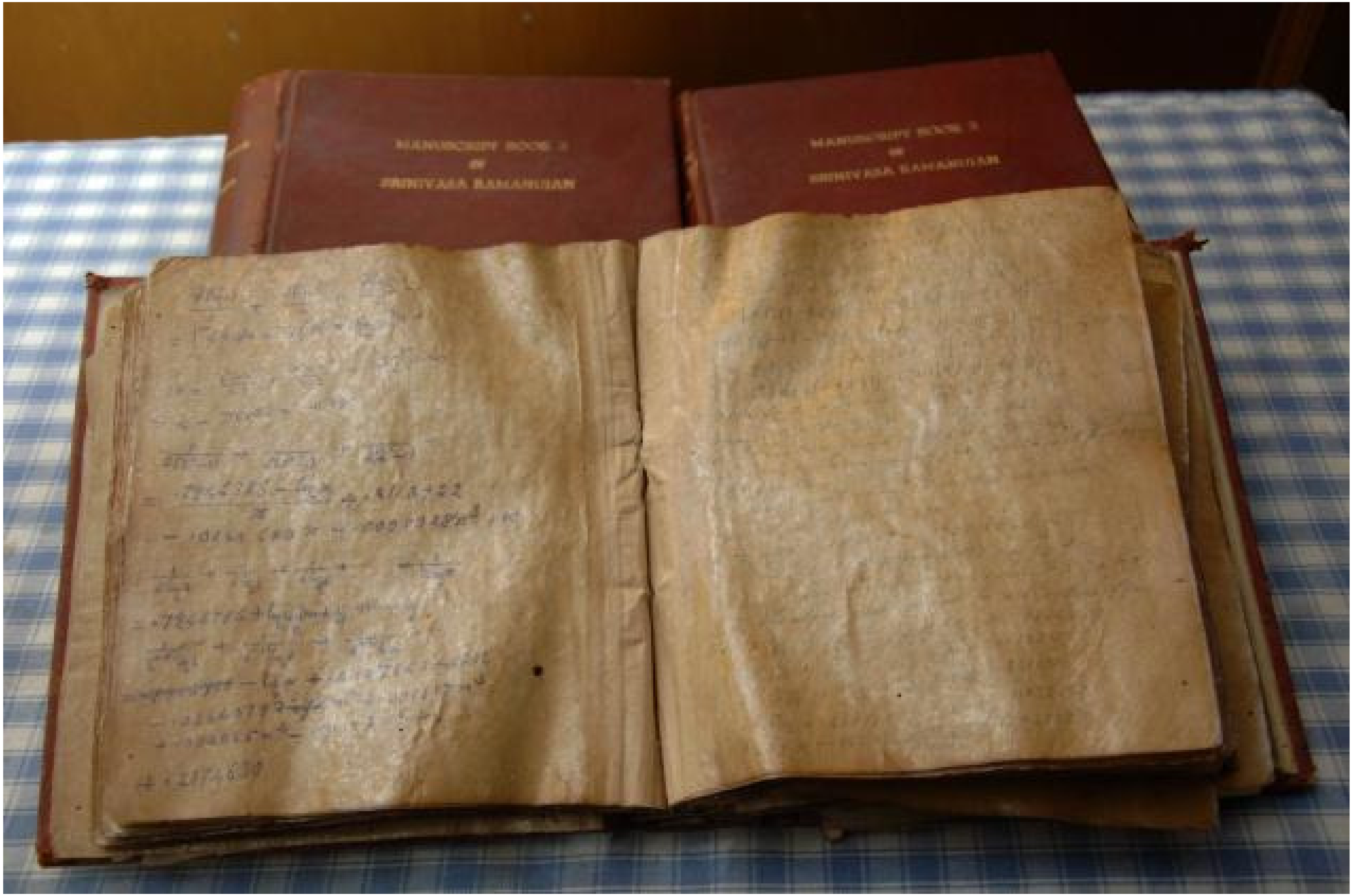
- Une théorie des séries divergentes
- Une théorie des fonctions elliptiques
  en bases alternatives
- La fraction continue de Rogers–Ramanujan
- De nouvelles formules pour approximer π
- Travaux et conjecture sur la fonction tau
- La théorie des partitions (partages d’entiers)

Publications

- Une vingtaine d'articles en Europe
- Une vingtaine de notes
- La correspondance avec Hardy
- 3 rapports trimestriels (université de Chennaï)
  formules d'interpolation, théorème maître de Ramanujan
- 58 problèmes soumis au *Journal of the Indian Mathematical Society*
- … et **3 carnets**

Les carnets

- Compilés entre 1903 et 1914
- Assemblage grossier de feuilles de papier
- Uniquement des résultats aboutis
  - Absence de développements, d’explications, de définitions, de conventions, de notations…
  - Calculs réalisés sur ardoise
  - Coût du papier
  - « Carte de visite », non destinés à publication



Le voyage des carnets

- Ne quittent jamais Ramanujan en Inde
- Aujourd'hui à l'université de Chennaï
- 1927 : édition des œuvres complètes *publiées* de Ramanujan, par Hardy
- 1957 : le Tata Institute of Fondamental Research à Bombay publie un Photostat des carnets (2 volumes, aucune édition)

Le premier carnet

- 351 pages, 16 chapitres
- Une recension des recherches menées par Ramanujan
- Un premier chapitre datant de l’enfance (!)
- Peu d’organisation
- Gestion confuse des pages

Le deuxième carnet

- 356 pages
- Une réorganisation du premier carnet en 21 chapitres
- Volonté de publier ces résultats
- Contient 100 pages de contenus mathématiques divers et non organisés

Le troisième carnet

- 33 pages
- Aucune structuration logique apparente
- Carnet plus tardif que les deux premiers

Remarques : Sur les trois carnets,
moins d'une vingtaine de résultats sont accompagnés d'une quelconque indication
De nombreux résultats sont déjà connus

Un style lacunaire

- Des carnets personnels, pas destinés à être lus
- Ramanujan adopte un style proche de celui de Carr : des formules sans preuves
- Il sait (ou croit savoir) prouver ce qu'il écrit
- Au lecteur de se fabriquer ses démonstrations
- Ramanujan refuse de dévoiler ses techniques

Il faut
les éditer !

- 1920 : Hardy plaide pour une édition des trois carnets de Ramanujan
- Pour les résultats déjà connus : produire une référence précise
- Pour les résultats corrects : en fournir une preuve, si possible dans l'esprit de l'auteur
- Pour les résultats faux : un résultat correct n'est sans doute pas loin, il faut le chercher…

L’édition

- 1920–1947 : Hardy produit une vingtaine d’articles inspirés des carnets
- 1927 : pas d’argent pour l’édition des carnets avec les œuvres complètes
- 1929–1940 : travail d’édition systématique entrepris par **Bertram Martin Wilson** et **George Neville Watson**

Watson et Wilson

- 1929–1931 : début du chantier
- 1931 : la tâche est estimée à cinq ans
- Le carnet 2 est privilégié (Wilson : chapitres 2 à 14, Watson : chapitres 15 à 21)
- 1935 : décès de Wilson (38 ans)
- Années 1930 : Watson produira des notes et plus de 30 articles, avant d’abandonner

La transition

- 1923 : manuscrits envoyés à Hardy
- 1934–1947 : documents transmis à Watson
- 1947 : mort de Hardy (70 ans)
- 1965 : mort de Watson (79 ans)

  que faire des documents retrouvés ?
- 1965, 1968, 1969 : envois à Trinity College
- Les documents dorment à la bibliothèque…

1976

- George Andrews (né en 1938) : spécialiste des *q*-séries et des fonctions spéciales
- Connaît bien les travaux de Ramanujan
- 1976 : visite Trinity College pour consulter les notes de Watson

découvre des manuscrits inattendus

Le carnet perdu

- 138 pages manuscrites de Ramanujan
- 1 200 résultats (q-séries, fonctions thêta…)
- Travaux réalisés durant l'année 1920
- Ni un « carnet », ni « perdu »
- Absence de texte
- Difficile à lire
- 1987 : copie élargie rendue disponible

Un siècle d'édition

- Hardy : une vingtaine d'articles
- Watson, Wilson : 6 à 8 chapitres du carnet 2
- Facs-similés des carnets disponibles, réalisés en 1957
- Fac-similé du carnet perdu, réalisé en 1987
- Andrews : une trentaine d'articles
- Travaux académiques épars

Bruce Berndt

- Né en 1939
- Théoricien des nombres (analyse et séries)
- 1974 : en résidence à Princeton pour un an

lit deux articles de Grosswald qui prouvent des formules de Ramanujan

Berndt sait les prouver !

peut-il en prouver d’autres ?

Chapitre 14

- Toutes les formules sont dans le carnet 2, chapitre 14
- Mai 1977 : prouver les 87 formules (1 an !)
- Depuis 1978 : éditer les trois carnets
- Démarche systématique, rigoureuse, tenace
- Aide de nombreux mathématiciens, d'étudiants, de Springer, de fondations…

21 ans
plus tard…

- L'édition des trois carnets est achevée !!!
- **3 254 résultats** (comptabilité de Berndt)
- **Moins d'une dizaine sont faux**
- **Les deux tiers sont originaux**
- 5 livres (2 300 pages)
- Plus de 100 articles

5 livres

- 1985 : carnet 2 (ch. 1 à 9) + rapports
- 1989 : carnet 2 (chapitres 10 à 15)
- 1991 : carnet 2 (16 à 21)
- 1994 : carnets 2 et 3 + carnet 1 (ch. 1 à 16)
- 1998 : carnets 1, 2 et 3
- Plus : édition de la correspondance

  The Ramanujan Journal

  essais, articles, ouvrages techniques

Quid du carnet perdu ?

- Plusieurs dizaines d'articles de G. Andrews
- Édition systématique avec B. Berndt :
  - 2005, volume I, 440 pages
  - 2009, volume II, 420 pages
  - 2012, volume III, 446 pages
  - 2013, volume IV, 452 pages
  - Dernier volume attendu (en 2016 ?)

Citations 1

- *« Des formules telles que, s'il ne les avait pas écrites, personne ne les aurait trouvées, même dans cent ans, même dans deux cents ans »* (Berndt)
- *« Sans aucun doute, Ramanujan pensait comme tout autre mathématicien, il pensait simplement* "with more insight" *que la majorité d'entre nous »* (Berndt)

Citations 2

- *« Ramanujan savait parfaitement quand ses méthodes heuristiques le conduisaient à des résultats corrects, et quand ce n'était pas le cas »* (Berndt)
- *« Personne, dans l'histoire des mathématiques, ne possédait l'habileté de Ramanujan dans le domaine des fractions continues ou des radicaux imbriqués »* (Berndt)

Florilège

$$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}=3,1416\ldots$$

370

$$(1)\quad \frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}=3.14164\cdots=\pi+.00005 \quad (!!)$$

$$(2)\quad \frac{4}{\pi}=1+\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{13}{4^2}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3+\frac{19}{4^3}\cdot\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\cdots$$

$$(3)\quad \frac{16}{\pi}=5+\frac{47}{64}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{89}{64^2}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3+\frac{131}{64^3}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\cdots$$

$$(4)\quad \frac{8(1+\sqrt{5})}{\pi}=(6+\sqrt{5})+(66+19\sqrt{5})\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{64}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8+$$

$$2\sin\frac{\pi}{18} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{\ldots}}}}}$$

où la suite des signes $-, +, +$ a pour période 3

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}$$

Partitions

$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

On écrit : $p(4) = 5$.

On calcule que $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$…

$p(7) = 15$, $p(100) = 190\,569\,292$…

Question :

quelles sont les propriétés
de la fonction p ?

Un exemple

- 50,04 % des $p(n)$ inférieurs à 10^6 sont pairs, et 49,96 % sont impairs…

  La proportion des nombres pairs est-elle 1/2 ?
- 33,1 % des $p(n)$ inférieurs à 3 200 sont multiples de 3. La proportion est-elle 1/3 ?
- 34,6 % des $p(n)$ inférieurs à 2 000 sont multiples de 5…
- **Quelle est la distribution des valeurs $p(n)$?**
- Pas le moindre angle d'attaque…

Des réponses

- $p(5k+4)$ est un multiple de 5
  $p(7k+5)$ est un multiple de 7
  $p(11k+6)$ est un multiple de 11
- $$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$
- Vers une formule *exacte* (Rademacher, 1943)

$$\frac{\sum_{n\geq 0} e^{-7\pi n^2}}{\sum_{m\geq 0} e^{-\pi m^2}} = \sqrt[8]{28}\,\frac{\sqrt{13+\sqrt{7}}+\sqrt{13+3\sqrt{7}}}{14}$$

Pour $\quad 0 < a < b + \frac{1}{2},$

$$\int_0^{+\infty} \prod_{j\geq 1} \frac{1+\left(\frac{x}{b+j}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+j-1}\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b+1)\Gamma\left(b-a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b-a+1)}$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}=\prod_{j\geq 1}\frac{1}{(1-q^{5j-1})(1-q^{5j-4})}$$

Soit q un complexe tel que $|q| < 1$.

On définit les fonctions suivantes :

$$\Psi(q) = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad f(-q) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(q) = \cfrac{q^{1/5}}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{\ddots}}}}$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\mathrm{R}\left(e^{-2\pi}\right)=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{\frac{2\pi}{5}}$$

Une formule pour déterminer $\mathrm{R}\left(e^{-\pi\sqrt{n}}\right)$ pour tout rationnel positif *n*

Pour $n = 64$:

$$R\left(e^{-8\pi}\right) = \sqrt{c^2 + 1 - c}, \quad \text{où} \quad 2c = 1 + \frac{a+b}{a-b}\sqrt{5},$$

$$\text{avec} \quad a = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad b = \sqrt[4]{20}$$

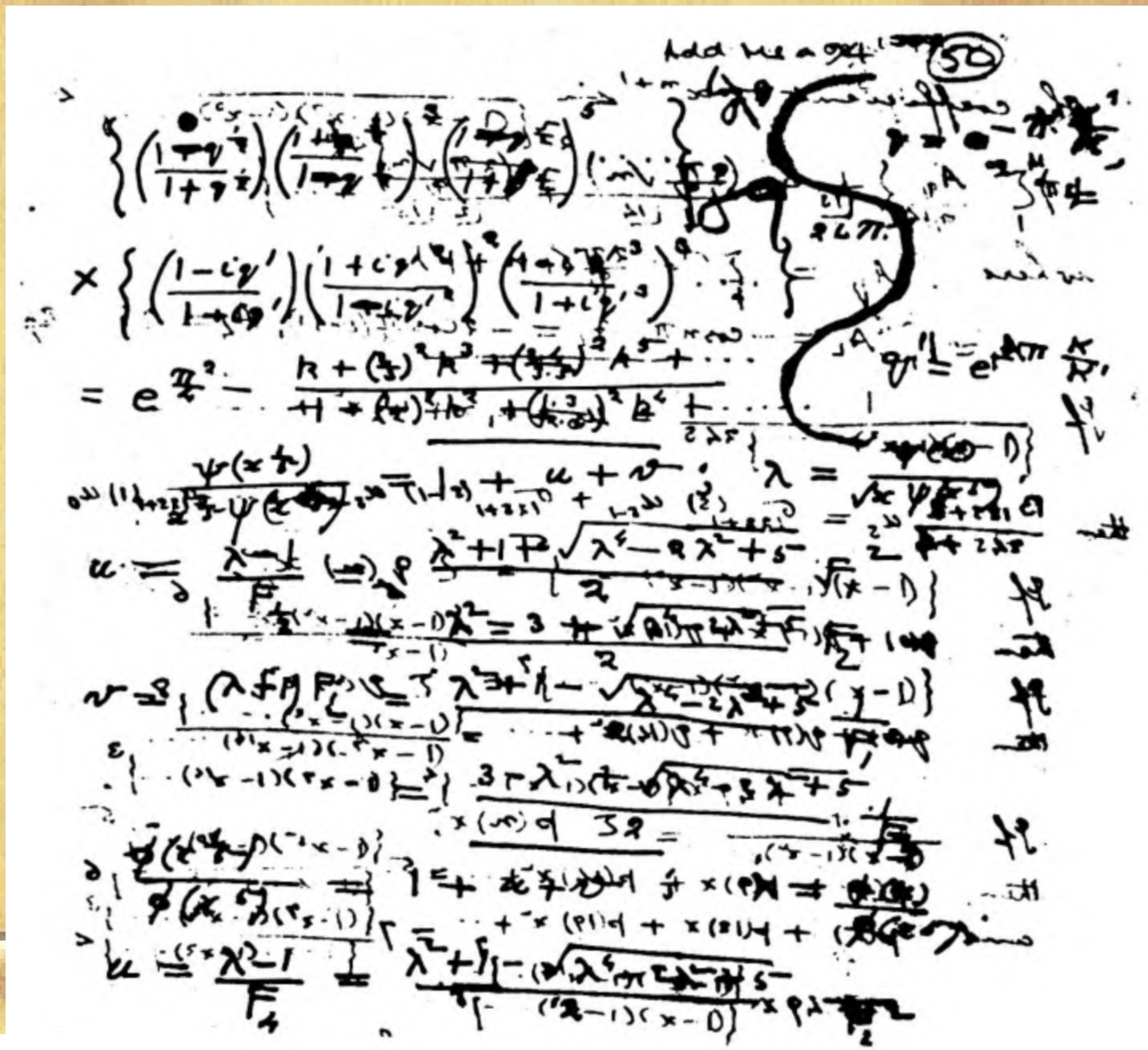
$$5^{3/5}\int_0^q \frac{f^2(-t)\,f^2\left(-t^5\right)}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= 2\int_{\arccos\left(\left(\varepsilon \mathrm{R}(q)\right)^{5/2}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^{-5}5^{-3/2}\sin^2\varphi}}$$

$$= \sqrt{5}\int_0^{2\arctan\left(5^{1/4}\sqrt{q}\frac{f^3\left(-q^5\right)}{f^3(-q)}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^{-5}5^{-3/2}\sin^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{2\arctan\left(5^{3/4}\sqrt{q}\frac{\Psi\left(q^5\right)}{\Psi(q)}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon 5^{-1/2}\sin^2\varphi}}$$

Page 209 du carnet perdu



Page 209
du carnet perdu

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \qquad q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}, \qquad 0 < k < 1.$$

$$\left(\prod_{n\geq 0}\left(\frac{1-(-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}}{1+(-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}}\right)^{2n+1}\right)^{\log q}\left(\prod_{m\geq 1}\left(\frac{1+(-1)^m iq'^m}{1-(-1)^m iq'^m}\right)^{m}\right)^{2i\pi}=\exp\left(\frac{\pi^2}{4}-k\frac{\displaystyle\sum_{r\geq 0}\frac{\left((r+1)!\right)^3 k^{2r}}{r!\left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\ldots\times\frac{2r+3}{2}\right)^2}}{\displaystyle\sum_{j\geq 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{2j+1}{2}\right)^2 k^{2j}}{j!(j+1)!}}\right)$$

Déchiffrage

- Formule presque illisible (copie médiocre)
- Seuls les trois premiers termes de chaque série sont écrits
- K et K’ non définis
- Aucune telle formule dans la littérature
- Pas même dans les travaux de Ramanujan !

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \mathrm{K}' = \mathrm{K}(k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

Explication (?)

- Découle d'une connexion unique et presque miraculeuse entre séries hypergéométriques et fonctions elliptiques
- Cette connexion n'est pas comprise
- Accident, ou y en a-t-il d'autres ?
- Comment concevoir qu'une telle formule existe ?
- Comment en déterminer les éléments ?

Voici cette connexion :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\mathrm{K}\left(\sqrt{1-k^2}\right)}{\mathrm{K}(k)}\right)}=\frac{k\displaystyle\sum_{r\geq 0}\frac{r+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{2r+3}{2}\right)^2}\left((r+1)!\right)^2k^{2r}}{2\displaystyle\sum_{m\geq 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}{(m!)^2}\frac{k^{2m}}{m+1}}$$

Fonctions elliptiques

Séries hypergéométriques

On trouve cette formule dans le carnet 2…

En physique…

- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = -1/12$

(Euler, Riemann, Ramanujan)

- Vingt-six dimensions en théorie des cordes
- Effet Casimir en électrodynamique quantique

- *String Theory* (volume 1). Joseph Polchinski, Cambridge University Press, 2005

… mécanique statistique…

- Les *q*-séries (les identités de Rogers–Ramanujan)
- Les modèles sur réseaux exactement solubles (le modèle hexagonal dur)
- Le modèle d'Andrews–Baxter–Forrester

- *The hard-hexagon model and the Rogers–Ramanujan type identities*. George Andrews, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 78, 1981

… théorie conforme des champs…

- Algèbres de Lie (algèbres de Kac–Moody)
- Combinatoire (identités de Macdonald), représentations, partages d’entiers
- Identités de Rogers–Ramanujan et fonction tau de Ramanujan

- *Affine Lie algebras and combinatorial identities*. James Lepowsky, *Proceedings of the 1981 Rutgers Lie algebras conference*, Springer, 1982

… et supergravité

- Méthode du cercle
- Entropie et « aire » des trous noirs

- *On the positivity of black holes degeneracies in string theory*. Kathrin Bringmann et Sameer Murty, arXiv:1208.3476v2, 2012

Un génie

« Son talent était exceptionnellement hors du commun, et il est l'un des rares mathématiciens contemporains que je qualifierais de génie au sens populaire du terme » (Tao)

Mystères…

« Ses méthodes pour calculer les invariants de classe demeurent en grande partie dans une obscurité impénétrable ; c'est regrettable qu'il ne nous ait laissé aucun indice » (Berndt)

« Bien que des progrès considérables aient été réalisés, un rideau noir nous a empêchés de voir ce qui se passe sur la scène, à savoir quelles furent les idées de Ramanujan derrière ses découvertes » (Berndt, 2016)

Références

The Man Who Knew Infinity – A Life Of The Genius Ramanujan. Robert Kanigel, Washington Square Press, 1991

Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan. Bernard Randé, Cassini, 2002

Ramanujan. Letters And Commentary.
Bruce Berndt et Robert Rankin,
American Mathematical Society, 1995.

An Overview Of Ramanujan's Notebooks.
In: *Charlemagne And His Heritage: 1 200 Years Of Civilization And Science In Europe*, volume 2 (*Mathematical Arts*), édité par P.L. Butzer, H.T. Jongen et W. Oberschelp, Brepolz, Turnhout, 1998

Ramanujan's Notebooks – Part I.
Bruce Berndt, Springer, 1985

Ramanujan's Notebooks – Part II.
Bruce Berndt, Springer, 1989

Ramanujan's Notebooks – Part III.
Bruce Berndt, Springer, 1991

Ramanujan's Notebooks – Part IV.
Bruce Berndt, Springer, 1994

Ramanujan's Notebooks – Part V.
Bruce Berndt, Springer, 1998

Ramanujan's Lost Notebook – Part I.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2005

Ramanujan's Lost Notebook – Part II.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2009

Ramanujan's Lost Notebook – Part III.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2012

Ramanujan's Lost Notebook – Part IV.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2013