L'arc-en-ciel

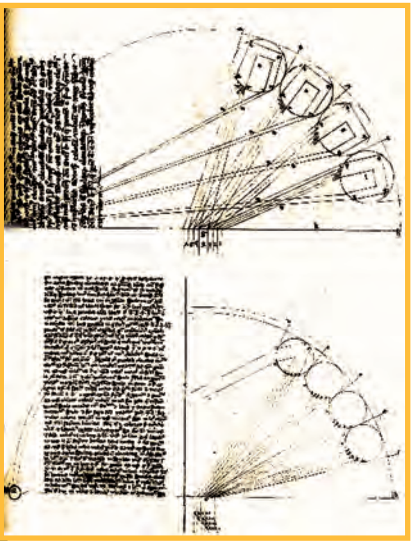
Michel Blay

Directeur de recherche émérite au CNRS

Le phénomène de l'arc-en-ciel a été l'objet de nombreuses explications au cours des siècles. La première, géométriquement organisée, est proposée par Aristote (384–322 av. J.-C.) dans ses *Météorologiques*. Il y montre, ce qui est remarquable, que la forme circulaire de l'arc-en-ciel est due à un phénomène de révolution autour d'un axe passant par le Soleil et l'œil de l'observateur de telle sorte qu'un cône se trouve engendré dont le sommet est confondu avec l'œil de l'observateur.

Il n'est pas possible dans ce bref article de suivre toute l'histoire des théories de l'arc-en-ciel. En revanche, nous nous servirons ponctuellement de cette histoire afin de rendre compte le plus clairement possible de ce magnifique phénomène qui a nourri l'imaginaire mythologique avant d'entrer, avec Aristote, dans le champ des mathématiques et de la démonstration.

L'explication de ce phénomène dont la circularité est due, comme l'a affirmé Aristote, à un phénomène de révolution repose pour l'essentiel, d'une part, sur la réflexion des rayons lumineux par la face arrière des gouttes et, d'autre part, sur la réfraction de ces mêmes rayons à l'entrée et à la sortie des gouttes. Ces deux aspects du trajet



La genèse des arcs suivant Dietrich de Freiberg vers 1300.

des rayons lumineux, déjà dégagés autour des années 1300 par Al Farisi et Dietrich de Freiberg, vont se trouver, après un relatif oubli, successivement mis en avant par Francesco Maurolico (1494–1575) et par Giambattista della Porta (1535–1615). Chacun d'eux concentre son attention sur l'un des aspects du trajet des rayons et néglige l'autre. De telles hésitations soulignent les difficultés soulevées par la compréhension de ce phénomène.

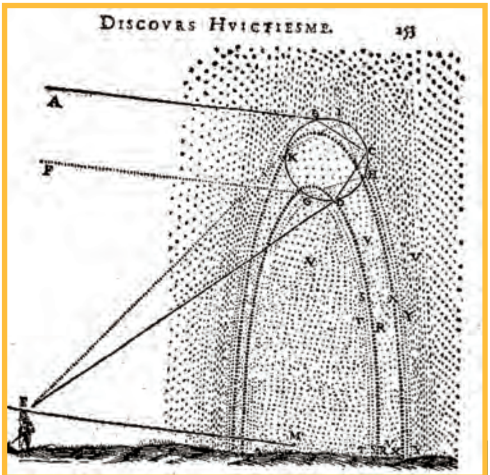
La première explication cohérente de l'arc-en-ciel est donnée par Isaac Newton (1642–1727). Celle-ci permet de comprendre le phénomène, c'est-à-dire de rendre compte à la fois de la forme des arcs (cf. Aristote), de leur luminosité dans le ciel et de la répartition des couleurs dans les différents arcs.

Lorsqu'on observe le ciel après une forte pluie et que le Soleil perce les nuages derrière soi à une certaine hauteur au-dessus de l'horizon plutôt vers la fin de l'après-midi, se déploie ce qu'on appelle un arc-en-ciel. On observe en général deux arcs lumineux et colorés, séparés par une bande plus sombre appelée *bande d'Aphrodise* du nom d'Alexandre d'Aphrodise (III^{e} siècle.) qui l'introduisit dans son commentaire aux *Météorologiques* d'Aristote. Pourquoi y a-t-il de telles différences de luminosité dans le ciel ? Pourquoi les bandes les plus lumineuses sont-elles colorées ?

Double arc-en-ciel après une tempête de neige sur les montagnes
du parc national Zebra, dans la province du Cap oriental en Afrique du Sud.

Luminosité et rayons efficaces

La réponse à la première question, celle portant sur les différences de luminosité, est apportée par René Descartes en 1637 dans le Discours VIII de ses *Météore*s.



Extrait du *Discours VIII* des *Météores* de Descartes *(1596-1650)*.

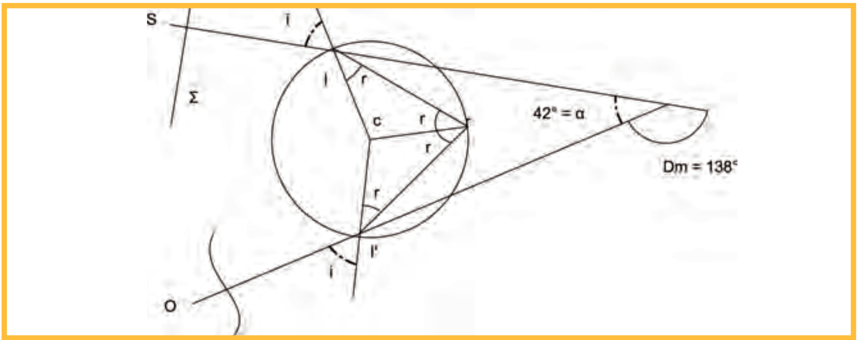
Dans cet écrit, Descartes s'engage dans une remarquable étude expérimentale. Il utilise un grand vase sphérique transparent rempli d'eau et imitant une goutte d'eau. Par ce geste, il transporte l'arc-en-ciel dans le laboratoire et peut étudier avec soin et minutie les trajets des rayons entrant et sortant du vase-goutte. Il montre alors, en faisant varier l'angle d'incidence des rayons sur le vase et en construisant des tableaux de valeurs caractérisant en particulier les angles d'émergence des rayons, que l'apparition des arcs correspond à une situation d'extrema : pour certains angles d'incidence sur les gouttes (ou le vase), les rayons émergent suivant une certaine direction, presque tous parallèlement, et engendrent ainsi une plus grande luminosité dans le ciel. Il introduit ainsi, de façon implicite, le concept de rayon efficace. Voilà donc pourquoi des bandes plus lumineuses apparaissent sous un angle d'environ 42° et 58° (angle formé par les rayons du Soleil et ceux émergeant des gouttes vers l'œil de l'observateur dans le cas du premier et du deuxième arc).

La répartition des couleurs dans les arcs lumineux

Descartes a rendu compte des différences de luminosité dans le ciel. Newton reprend l'analyse cartésienne mais en s'appuyant sur de délicats calculs de géométrie infinitésimale. Sans entrer dans le détail, au sens historique du terme, de sa démarche, nous pouvons reprendre son approche dans un langage modernisé : il s'agit de calculer la déviation D (entre le rayon incident provenant du Soleil et le rayon émergent se dirigeant vers l'œil de l'observateur).

Cas du premier arc

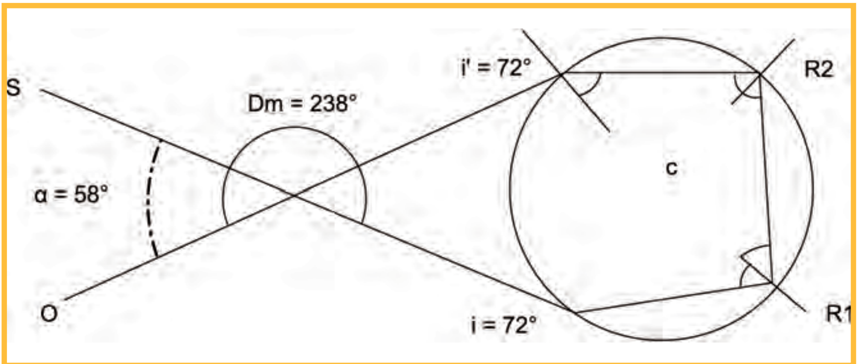
Considérons un rayon lumineux S qui rencontre une goutte de pluie en I, il se réfracte suivant IR pour se réfléchir (réflexion partielle) suivant RI' puis se réfracte à nouveau vers l'observateur. Il s'ensuit immédiatement que le rayon incident a subi trois déviations dans le même sens : par réfraction 2 (i – r) et par réflexion (180° – 2r). Au total, D = 180 + 2i – 4r degrés.



Genèse du premier arc.

Cas du deuxième arc

Considérons un rayon lumineux qui rencontre une goutte de pluie en I, il se réfracte puis se réfléchit successivement en R1 et R2 et finalement émerge vers l'observateur. Il s'ensuit immédiatement que le rayon incident a subi quatre déviations dans le même sens : par réfraction 2 (i – r) et par réflexion (360°– 4r). Au total, D = 360 + 2i – 6r degrés.



Genèse du deuxième arc.

Cas général

Dans la situation où le rayon incident subit k réflexions internes et k + 2 déviations dans le même sens, la déviation D est donnée par : $D = 2\,(i - r) + k\,(180 - 2r)$ degrés.

Recherche du minimum D_m

La déviation D calculée précédemment passe par un minimum D_m obtenu pour une valeur i_m de i et en sachant que $\sin i = n \sin r$ (n est l'indice de réfraction).

Par le calcul de la dérivée, $\frac{dD}{di}$ s'annule pour $\cos^2 i_m = \frac{n^2-1}{k^2+2k}$.

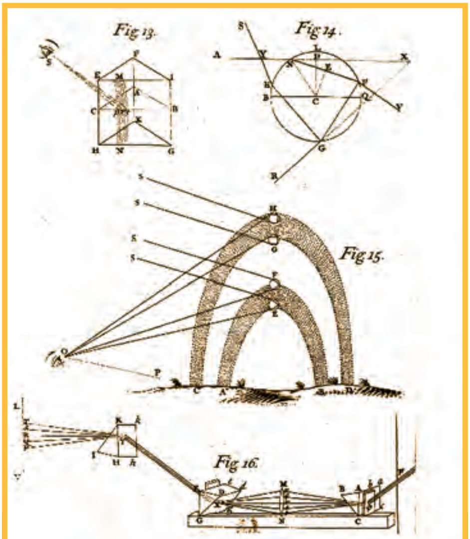
D'où il suit pour k = 1, $\cos i_m = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$ et pour k = 2, $\cos i_m = \sqrt{\frac{n^2-1}{6}}$.

Il est alors aisé, connaissant n et k, d'en déduire la valeur de i_m puis celle de D_m et d'obtenir ainsi la valeur de l'ouverture D des différents arcs. En outre, il apparaît que le nombre d'arcs, dépendant de k, ne se limite pas à 2. La répartition et la position des couleurs dépendent de l'indice de réfraction de chaque lumière monochromatique.

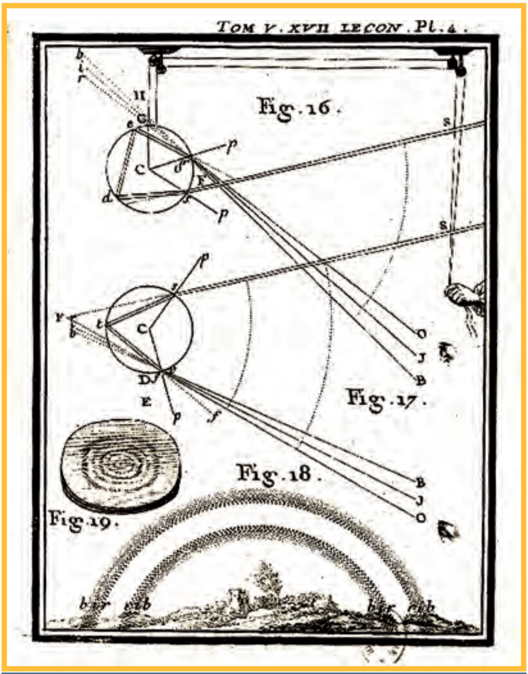
Les développements de la théorie

Si la théorie que nous venons de présenter explique pour l'essentiel le phénomène de l'arc-en-ciel, elle n'en reste pas moins très élémentaire. Ne sont pas pris en considération entre autres les phénomènes d'arcs surnuméraires ou supplémentaires.

En effet, vers les années 1720, Henry Pemberton (1694–1771) reconnaît que les arcs principaux sont souvent accompagnés d'arcs surnuméraires. Ceux-ci apparaissent à l'intérieur du premier arc et à l'extérieur du second, c'est-à-



Prisme, couleurs et arc-en-ciel suivant Newton dire toujours du côté du violet, à l'intérieur des zones lumineuses. Leur visibilité, leur écart angulaire, leur coloration et leur aspect sont extrêmement variables. Une observation plus fine, à travers par exemple un écran monochromatique, permet de constater que l'intensité des franges brillantes décroît globalement très lentement à partir des arcs principaux. Ces arcs surnuméraires constituent de la sorte un phénomène que la théorie newtonienne sous la forme classique que nous avons analysée précédemment ne peut pas laisser prévoir et qu'elle est, à strictement parler, incapable d'expliquer.



Un exemple d'étude de l'arc-en-ciel au XVIIIe siècle.

Ce n'est finalement qu'au début du XIXe siècle que cette question, impliquant une refonte de la théorie de l'arc-en-ciel, trouve sa solution. En 1803, Thomas Young, qui vient de montrer que la lumière est susceptible d'interférer, imagine que l'existence des arcs surnuméraires est liée à l'interférence des rayons efficaces. En effet, deux rayons parallèles atteignant une goutte d'eau dans la zone des rayons efficaces émergent pratiquement parallèles, mais après avoir parcouru des chemins optiques différents tant dans l'air que dans l'eau. Des interférences seront donc observables donnant naissance, non pas à un simple arc principal, mais à toute une série d'arcs colorés comme dans le cas des anneaux de Newton. Un nouveau facteur entre maintenant en jeu : le chemin optique et, par voie de conséquence, la taille des gouttes. Cette théorie constitue une nouvelle étape par rapport à la théorie newtonienne. Malheureusement elle explique mal la bande plus sombre séparant les deux arcs principaux, et Young est incapable de construire un véritable modèle mathématique quantitatif. Une meilleure connaissance des phénomènes d'interférence et de diffraction ainsi que de leur traitement mathématique devient alors la condition d'une reconstruction rationnelle de l’arc-en-ciel. Ce sera principalement l’œuvre de Richard Potter (1799–1886) et de Sir Biddell Airy (1801–1892).

Dans cette nouvelle théorie, deux idées, déjà anciennes, vont intervenir. La première est celle du front d’onde introduite par Christiaan Huygens dès la fin du XVII^{e} siècle. La seconde est celle suivant laquelle un faisceau de rayons parallèles tombant sur un miroir hémisphérique parallèlement à son axe se réfléchit en engendrant une caustique (surface tangente aux rayons lumineux issus d’un même point après avoir traversé un instrument optique ; ici un miroir hémisphérique).

L’introduction de ces idées dans la théorie de l’arc-en-ciel est alors envisagée, d’abord par Potter en 1835, puis d’une façon plus mathématique et plus élaborée par Airy. Leur approche consiste alors à comprendre la genèse de l’arc-en-ciel comme un problème classique de diffraction auquel on peut appliquer les méthodes du calcul par intégration d’Augustin Fresnel. Dans la théorie antérieure de Young, on ne fait interférer, au loin, que les deux rayons parallèles de l’optique géométrique, tandis que dans la théorie d’Airy on fait interférer les vibrations issues de tous les points de la surface d’onde. C’est à cet endroit de la construction théorique que l’application du principe de Huygens prend tout son sens. Cette théorie n’est donc qu’un cas particulier des études de Fresnel sur la diffraction. En 1836, Airy donne, dans les *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (1838, p. 379-403), la loi de répartition de l’intensité lumineuse. Celle-ci représente les valeurs des carrés de l’intégrale appelée aujourd’hui *intégrale d’Airy*. La distribution des intensités lumineuses données par cette intégrale est semblable à celle correspondant à la figure de diffraction donnée par le bord d’un objet rectiligne. Elle fait donc connaître les intensités relatives des différents arcs et leurs directions par rapport au rayon efficace considéré. L’essentiel est en place. James Clerk Maxwell (1831–1879) et Lord Rayleigh (1842–1919) préciseront certains aspects relatifs à la perception des couleurs, au développement du traitement mathématique et au rôle de la polarisation de la lumière. Quelques derniers raffinements théoriques ont encore été récemment introduits grâce à la mise en œuvre, en particulier, des gros moyens de calcul par ordinateur.

M. B.

Pour en savoir plus :

Michel BLAY, ***Les figures de l’arc-en-ciel***, Paris, Carré, (1995), rééd. Paris, Belin, (2006).

Carl B. BOYER, ***The Rainbow from Myth to Mathematics***, New York, Thomas Yoseloff, (1959).

Herch Moysés NUSSENZVEIG, ***The theory of the Rainbow***, *American Scientific*, (avril 1977), p. 116-127.