



Une aventure multi-culturelle à travers l'espace et le temps : les carrés magiques

Michel Criton

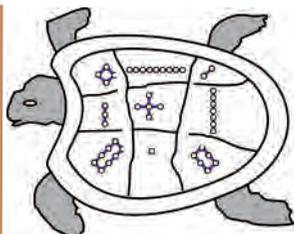
Président de la Fédération Française des Jeux Mathématiques

Un carré magique est un bel objet mathématique. L'aspect esthétique de cet objet est tel qu'il a été bien vite récupéré par la magie et les sciences occultes qui lui ont attribué des vertus extraordinaires, mais nous ne nous intéresserons ici qu'à leurs vertus mathématiques. Nés en Chine, selon la légende il y a 22 siècles, les carrés magiques se sont diffusés successivement en Inde, en pays d'Islam, dans l'Empire byzantin, puis en Occident. On sait qu'au cours de l'histoire, les civilisations d'Extrême-Orient, du Moyen-Orient, d'Afrique et d'Europe ont toujours procédé à des échanges de biens rares et précieux : sel, soie et tissus, ivoire, or et métaux, épices, etc. Il était naturel que les idées profitent de cette perméabilité entre les peuples et les civilisations pour se diffuser.

La genèse en Chine

Les carrés magiques sont un thème très ancien. Selon la légende chinoise, les carrés magiques remontent à l'empereur Yu, qui régna vingt-deux siècles avant notre ère et régula le cours des rivières afin de limiter l'effet des inondations. La légende rapporte que le premier carré magique connu, le *Lo-Shu* (« diagramme du fleuve Lo »), serait apparu sur le dos d'une tortue divine sortant de la rivière Lo afin de faire comprendre aux villageois qu'ils devaient faire quinze offrandes au fleuve pour qu'il accepte de se retirer et de regagner son lit. Le *Lun Sü* (conversations et discours de Confucius, V^e siècle avant notre ère) rappelle cette légende, en regrettant que, décadence de l'époque, déjà ..., « les rivières ne fournissent plus de diagrammes ».

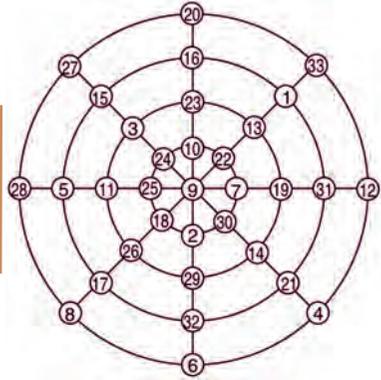
Un carré magique est un arrangement des nombres de 1 à n^2 dans un carré de n cases de côté, tel que la somme des nombres écrits dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales soit toujours la même.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

L'étude des carrés magiques se poursuivra en Chine avec le développement des mathématiques. La *magie arithmétique* s'étendra même à d'autres configurations. En 1275, le mathématicien chinois Yang Hui publie son traité : *Hsü ku chai chhi suan fa* « Continuation des anciennes méthodes pour élucider les étranges propriétés des nombres », dans lequel on trouve le cercle magique ci-contre.

Dans ce cercle la somme des nombres situés sur chacun des diamètres, et la somme des nombres situés sur chacun des cercles concentriques, augmentée du nombre central, est toujours égale à 147.



Le passage en Inde

L'étude des carrés magiques a également été un thème de prédilection des mathématiciens indiens, dont on peut penser qu'ils ont « importé » l'idée de la Chine voisine. Dans un manuscrit concernant la magie, le *Kaksaputa*, on trouve la règle de construction de quatre carrés magiques, dont l'un est attribué à l'alchimiste Nâgârjuna, qui vivait au premier siècle de notre ère. D'autres exemples apparaissent ensuite, notamment chez l'astronome Varâhamihira (VI^e siècle), qui indique la construction d'un carré d'ordre 4, jusqu'au XIV^e siècle où une théorie complète des carrés magiques est donnée dans le *Ganita-Kaumudi* (1356), traité d'arithmétique du mathématicien Nârâyana. Au XVII^e siècle, le mathématicien français Simon de la Loubère, ambassadeur du roi-soleil auprès du roi du Siam, publiera un ouvrage intitulé *Du royaume du Siam* (1691), où il décrira différents procédés de construction de carrés magiques qu'il dira avoir appris auprès de mathématiciens indiens.

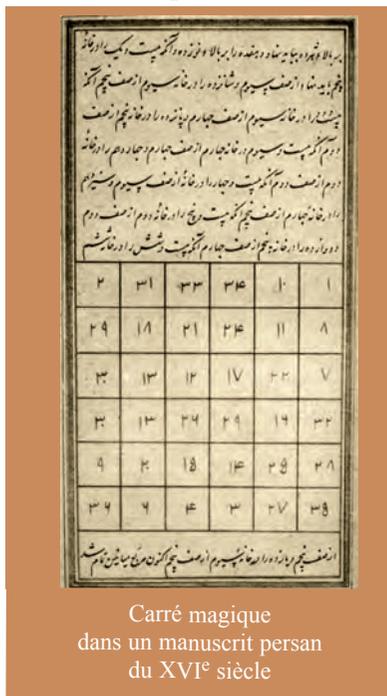


7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Les temples jaïnistes de Khajuraho, construits vers l'an 950 de notre ère sont célèbres pour leurs sculptures érotiques tirées du Kama Sutra. On y trouve aussi des carrés magiques comme celui représenté ci-dessus. Les chiffres utilisés sont les chiffres indiens dits *devanagari*.

La transmission par les pays d'Islam

Les carrés magiques apparaissent ensuite en Perse où l'on pense, même si les preuves manquent, qu'ils étaient déjà présents à l'époque pré-islamique. L'avènement de la civilisation islamique, avec ses lieux de collecte et de traduction de l'héritage des civilisations du monde connu, comme la Maison de la sagesse de Bagdad, permettra aux mathématiciens de langue arabe de développer l'étude des carrés magiques. Par exemple, au X^e siècle, le mathématicien persan Abū l-Wafā' al-Būzjānī (940 – 998) consacra un manuscrit, *Livre de l'arrangement magique dans les carrés*, à la construction des carrés magiques constitués de nombres entiers en progression arithmétique. Au cours des siècles suivants, les idées mathématiques se diffuseront par le biais de la langue arabe dans toute l'Afrique du Nord, jusqu'à l'*Andalus* en Espagne, et jusque dans l'Afrique sub-saharienne. En effet, un manuscrit sur les carrés magiques écrit en 1732 en langue arabe, par un mathématicien africain originaire du Nigéria, Muḥammad ibn Muḥammad al-Fulānī al-Katsināwī as-Sūdānī, a été retrouvé dans une bibliothèque du Caire.



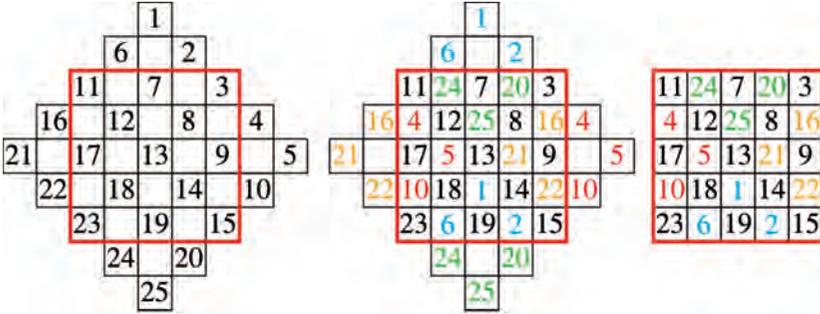
Carré magique
dans un manuscrit persan
du XVI^e siècle

Les développements dans l'empire byzantin

On ignore si les mathématiciens grecs connaissaient les carrés magiques, mais on sait que le concept a touché leurs héritiers de l'Empire byzantin, avec certainement des apports des mathématiciens indiens et de langue arabe, jusqu'à la chute de Constantinople en 1453. Un manuscrit byzantin daté du début du XIV^e siècle (Bibliothèque nationale de Paris, manuscrit n°2428), dédié au géomètre Nicholas Rhabdas, est entièrement consacré à la description de méthodes de construction des carrés magiques. L'auteur de ce manuscrit est le moine Manuel Moschopoulos, qui était le neveu d'un archevêque de Crète et le disciple du mathématicien Maxime Planude, introducteur de la numération de position et de l'usage du zéro dans le monde byzantin.

On trouve déjà dans ce manuscrit le principe d'une méthode de construction des carrés magiques d'ordre impair dont une variante sera exposée plus tard par Bachet de Méziriac (XVI^e - XVII^e siècles) et qui

demeurera connue sous le nom de « méthode de Bachet ».



Une méthode de construction de type « Bachet de Méziriac » pour les carrés d'ordre impair.

L'utilisation en Occident

En Europe, les carrés magiques retiendront d'abord l'attention des alchimistes et des *mages* de tout poil, friands des connaissances orientales ou supposées telles, avant que les mathématiciens ne s'y intéressent.

Les artistes, aussi, ne seront pas insensibles à la fascination qu'exerce cette curiosité mathématique. Ainsi, le célèbre géomètre, dessinateur et graveur de la Renaissance, Albrecht Dürer, n'hésitera pas à l'introduire dans son œuvre. Ci-dessous, datée de 1514, la gravure sur cuivre, intitulée *Melencholia I*, met en scène un carré magique. Le titre apparaît en haut à gauche sur la gravure. Le *I* est dû au fait que la gravure fait partie d'un ensemble dans lequel

Dürer voulait représenter les quatre humeurs de l'homme, la mélancolie étant associée à la bile noire.



Melencholia I
et détail du carré magique.
Dürer fait apparaître la date
sur la dernière ligne du carré.

Bachet de Méziriac en 1612, leur consacre un chapitre de ses *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*. De nombreux mathématiciens s'intéresseront ensuite aux carrés magiques : Pierre de Fermat, Bernard Frénicle de Bessy, mais aussi Leibniz, qui généraliseront l'idée en passant à la troisième dimension avec les cubes magiques.

Au XVIII^e siècle, Benjamin Franklin étudiera des carrés *diaboliques* d'ordre multiple de 4, où la somme magique est présente dans de nombreux motifs autres que les seules lignes, colonnes et diagonales principales.

À la fin du XIX^e siècle, leur étude sera relancée avec la recherche de carrés *bimagiques*, carré magiques qui le demeurent lorsqu'on élève tous les nombres au carré.

La traque des carrés magiques est loin d'être terminée. Il reste aujourd'hui encore, malgré les moyens informatiques actuels, de nombreuses questions non résolues. Nous n'en citerons qu'une, celle du plus petit carré magique dont tous les nombres (qui ne sont pas nécessairement des entiers consécutifs) sont des carrés d'entiers. On connaît un carré 3×3 dont sept nombres sur neuf sont des carrés. On ne sait pas si on peut faire mieux. Avis aux amateurs ...

373^2	289^2	565^2
360 721	425^2	23^2
205^2	527^2	222 121

Sur les neuf nombres de ce carré magique, sept sont des carrés de nombres entiers. On ignore s'il est possible d'obtenir un carré 3×3 dont les neuf nombres sont des carrés.

M. C.

Pour en savoir un peu plus :

Bibhutibhusan DATTA & Hawadhsh Narayan SINGH : *Magic squares in India*, Indian Journal of History of Science volume 27, 1992.

René DESCOMBES : *Les carrés magiques, histoire, théorie et technique du carré magique, de l'Antiquité aux recherches actuelles*, Éditions Vuibert, janvier 2000.

Jacques SESIANO : *Les carrés magiques dans les pays islamiques*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.

Site internet de Christian BOYER : www.multimagie.com



Carré magique figurant sur la façade de la basilique *La Sagrada Família*, oeuvre inachevée de l'architecte catalan Antoni Gaudi, à Barcelone. Le carré, gravé par le sculpteur Josep Maria Subirachs, est inspiré de celui de Dürer. Quatre nombres ont été diminués d'une unité (un nombre par ligne et par colonne), afin que la somme magique soit égale à 33 au lieu de 34 (référence à l'âge de la mort du Christ). Ce carré n'est pas un carré magique classique, dans la mesure où deux nombres sont répétés deux fois (10 et 14) et où deux nombres sont absents (12 et 16).

source wikipédia © Guerin