



Le ciel comme tableau noir

Jean-Philippe Uzan

Institut d'Astrophysique de Paris, Institut Henri Poincaré

La science est faite par des hommes et des femmes. Ainsi, les constructions et représentations que nous faisons de notre Univers sont empreintes de notre culture, de notre regard. Aucune civilisation n'a échappé au noir et à la présence de la nuit. Sans pollution lumineuse, sans distraction télévisuelle, on peut imaginer les hommes et les femmes se réunir autour du feu, se raconter des histoires sous la voûte céleste et la peupler de leurs mythes et légendes. Nous gardons une trace de cette connexion ancestrale au ciel dans notre vocabulaire : du nom de notre Galaxie la *Voie Lactée* au mot *galaxie* lui-même, qui nous rappelle la gerbe de lait (*galak* en grec) qui jaillit du sein d'Héra pour ensemer le ciel, jusqu'aux noms des constellations. Orion, chasseur légendaire se vantant de pouvoir tuer n'importe quel animal, et le Scorpion, qui terrassa le héros, ont été placés sur la voûte céleste par Zeus qui les a séparés afin qu'ils ne soient jamais au-dessus de l'horizon en même temps. Cette constellation représente un mouton chez les Sumériens ou une offrande à Osiris chez les Égyptiens.

À l'œil nu, la plupart des points lumineux que nous pouvons observer sont des étoiles de notre Galaxie. Pendant des siècles il a été impossible de déterminer la taille du Système solaire et la distance des étoiles. De l'Antiquité à Copernic, on adopte une vision géocentrique dans laquelle la Terre occupe le centre du monde. Le Système solaire est contenu à l'intérieur de la voûte céleste sur laquelle sont déposées les étoiles. Cette voûte tourne autour de nous en 23 heures 56 minutes et 4 secondes et représente alors la limite de l'Univers.

Notre représentation de l'Univers a évolué au gré des développements technologiques, qui permettent de découvrir de nouveaux phénomènes et concepts, qui permettent d'imaginer de nouvelles structures, mais aussi au gré des développements des mathématiques. Nous illustrons ici quelques-unes des relations entre astronomie et mathématiques, un sujet trop vaste pour nous permettre d'être exhaustif.

Pendant toute l'Antiquité, l'astronomie est intimement liée au déve-

loppement de la géométrie formalisée par Euclide. Afin d'illustrer ce lien, revenons sur l'important problème de la détermination des distances dans le Système solaire, en nous rappelant que nous sommes contraints par le fait que nous ne pouvons observer l'Univers que d'un seul point, la Terre.

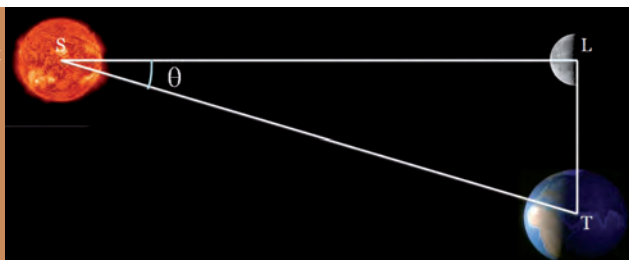
La première étape est celle de la détermination de la forme et de la taille de la Terre. On attribue souvent à Pythagore l'argument selon lequel pendant les éclipses de Lune, l'ombre de la Terre sur la Lune étant toujours un disque, cette dernière devait être sphérique. Ce n'est que vers 240 avant l'ère chrétienne qu'Ératosthène estimera son diamètre. Alors qu'au solstice d'été le Soleil est au zénith à Syène (Assouan), à Alexandrie il culmine à $7,2^\circ$ au sud du zénith. Ainsi les verticales locales dans ces deux villes alignées sur un axe Nord-Sud pointent dans deux directions différentes faisant un angle $\alpha = 7,2^\circ$, soit $1/50^{\text{ème}}$ de cercle. La Terre ne peut donc pas être plate et on peut estimer son rayon selon

$$R_{\text{Terre}} = \text{Arc (Syène, Alexandrie)} / \alpha [\text{radians}].$$

La difficulté réside dans la détermination de la distance entre les deux villes, qu'Ératosthène estime à 5 000 stades. Le rayon de la Terre serait ainsi d'environ 250 000 stades, soit 6 350 km, à comparer avec la valeur actuelle de 6 371 km.

La seconde étape est la détermination de la distance de la Lune et des planètes. Aristarque de Samos, l'un des astronomes les plus imaginatifs de l'Antiquité, à qui l'on attribue l'intuition d'un modèle héliocentrique, proposa une des premières méthodes permettant de déterminer les distances des astres du Système solaire, à commencer par la Lune. Il part de l'hypothèse, correcte, que la Lune brille en réfléchissant la lumière du Soleil. Au premier, ou dernier, quartier, la Lune (L), la Terre (T) et le Soleil (S) forment donc un triangle rectangle en L (voir figure 1). En mesurant l'angle entre la Lune et le Soleil vus de la Terre, on déduit facilement l'angle θ , puis la distance $TS = TL / \sin \theta$. Aristarque estima que $\theta = 3^\circ$, si bien que le Soleil devait être 19 fois plus loin que la Lune, ce qui ne fournit qu'une information relative tant que l'on ne connaît pas la distance de la Terre à la Lune. La précision de cette méthode est très mauvaise car nous savons aujourd'hui que $TS = 390TL$ et que $TL = 384\,400$ km.

Figure 1: En mesurant l'angle entre la Lune et le Soleil vus depuis la Terre, on peut en déduire l'angle θ , le triangle SLT étant rectangle en L.



Aristarque remarqua ensuite qu'en chronométrant la durée d'une éclipse de Lune, on pouvait déterminer la taille du cône d'ombre de la Terre. Enfin, en utilisant le fait que les diamètres apparents de la Lune et du Soleil sont égaux, on pouvait déduire toutes les distances absolues du système Terre-Lune-Soleil.

La détermination des distances dans le Système solaire sera améliorée par l'invention de la méthode des parallaxes. Cette méthode utilise le fait qu'un objet proche et un objet lointain ne sont pas observés sous le même angle quand on change de point de visée ; (voir la figure 2 - gauche). Cette méthode fut initialement utilisée par Hipparque pour déterminer la distance de la Lune connaissant le rayon de la Terre. Si la longueur de la base est notée, alors la distance du corps le plus proche est simplement donnée par $d = s/\theta$ (θ en radians) si le deuxième corps est suffisamment loin pour que son déplacement soit indétectable.

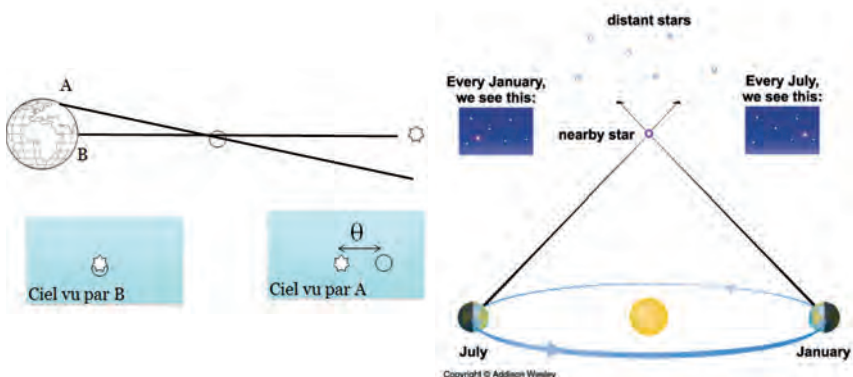


Figure 2 : La méthode des parallaxes nécessite deux points d'observation, soit sur Terre (gauche) soit en deux points sur l'orbite terrestre (droite).

Cet effet de parallaxe a été l'un des points de critique opposé au modèle héliocentrique de Copernic. En effet, si la Terre tourne autour du Soleil, on devrait observer un mouvement saisonnier des étoiles de la voûte céleste. L'amplitude de cet effet était cependant difficile à évaluer car la distance des étoiles n'était pas connue. Or cet effet existe bien (figure 2 - droite) et permit au mathématicien et astronome allemand Friedrich Bessel de faire la première mesure de la distance d'une étoile. Bessel commença son observation de 61- Cygni en septembre 1834.

À partir de 1837, il enregistra la position de cette étoile pendant plus d'un an, en faisant plus d'une quinzaine de mesures par nuit. Il conclut que 61-Cygni décrivait une ellipse de grand axe apparent 0,31'' avec une erreur de 0,02'' sur une période de 1 an ; la valeur moderne de la parallaxe est 0,287''. La parallaxe est l'angle dont semble se déplacer un astre proche par rapport au fond du ciel entre deux points d'observation, tels

que deux points de l'orbite terrestre à six mois d'écart. Elle représente ainsi l'angle sous lequel serait vue l'orbite terrestre depuis cet astre. Ainsi la distance d'une étoile de parallaxe θ (en radians) ou θ'' (en seconde d'angle) est $d = R/\sin \theta = 206\,265/\theta''$ pour des petits angles et en utilisant que $1 \text{ rad} = 206\,265''$. R est le rayon de l'orbite terrestre et, dans la seconde égalité, la distance est exprimée en unités astronomiques ($R=1\text{UA}$). Les astronomes définissent comme unité de distance le parsec (pc) comme étant la distance d'une étoile dont la parallaxe annuelle est de $1''$. Dans ce cas la distance de l'étoile est simplement donnée par $d=1/\theta''$. Ainsi, on en déduit que 61- Cygni se trouve à $(1/0,287) \text{ pc} =$ soit 3,48 pc.

Cette technique est encore fréquemment utilisée en astronomie. Le satellite Hipparcos (ESA) a mesuré, entre 1989 et 1993, la position et la parallaxe de 117 955 étoiles. Il détermina 442 distances avec une précision inférieure à 1% et 22 396 distances avec une précision inférieure à 10% jusqu'à une distance de 90 pc. Le satellite Gaïa (ESA) lancé le 19 décembre 2013 permettra de déterminer la distance d'environ 20 millions d'étoiles avec une précision inférieure à 1%. Pour les objets les plus brillants, la précision sera de l'ordre de 7 millièmes de seconde d'arc, précision équivalente à la mesure du diamètre d'un cheveu à 1 000 km !

Cette méthode est cependant limitée aux objets proches et la détermination des distances des objets astrophysiques demande d'utiliser d'autres phénomènes physiques. Au-delà de la taille des orbites, les astronomes sont intéressés par la compréhension de la dynamique du Système solaire. Si l'on néglige l'effet de tous les corps sauf le Soleil, le mouvement de chaque planète est régi par la dynamique newtonienne et la force de gravitation.

Chaque orbite est alors une ellipse dont le demi-grand axe a et la période T sont reliés par la troisième loi de Kepler, où M est la masse du Soleil, m celle de la planète et G la constante de Newton.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G (M+m)}$$

Dans cette description, le Système solaire serait stable et immuable, comme une horloge bien réglée, chaque planète évoluant sur sa propre orbite indépendamment des autres.

Cependant, la gravitation est universelle et il faut prendre en compte l'effet des autres planètes (voir la figure 3). Ainsi, toutes les équations du mouvement deviennent couplées. Comme le remarque le grand mathématicien français Henri Poincaré : *L'attraction de Jupiter, à distance égale, est mille fois plus petite que celle du Soleil; la force perturbatrice est donc petite, et cependant, si elle agissait toujours dans le même sens, elle ne tarderait pas à produire des effets appréciables*. Ces effets correctifs, même petits, perturbent la course bien réglée des planètes.

Dès le XVII^e siècle se pose ainsi la question de la stabilité du Système solaire, question qui inquiète déjà Newton lui-même : *Un destin aveugle ne pourrait jamais faire mouvoir ainsi les planètes à quelques inégalités près à peine remarquables qui peuvent provenir de l'action mutuelle des planètes et des comètes, et qui probablement deviendront plus grande par une longue suite de temps jusqu'à ce qu'enfin ce système ait besoin d'être remis en ordre par son auteur.*

Cette question sera à l'origine de nombreux développements en astronomie, en théorie des perturbations et en mathématiques. L'Académie des sciences de Paris proposera des prix pour la résolution de ce problème qui attirera l'attention de Leonhard Euler et de Joseph-Louis Lagrange. Cette question inspirera Poincaré et lui permettra de découvrir le mécanisme mathématique qui conduit à des systèmes chaotiques, puis sera à l'origine du théorème KAM (Kolmogorov, Arnold et Moser) qui prouve qu'à côté des solutions décrites par Poincaré il existe encore des trajectoires quasi-périodiques. Dans les vingt dernières années, ce problème a progressé principalement grâce aux simulations numériques, qui permettent de prendre en compte de nombreux corps perturbatifs, des effets de taille finie et des corrections relativistes. Ainsi, Jacques Laskar, astronome à l'Observatoire de Paris, montra en 1994 que l'évolution possible de l'excentricité de Mercure autorise son éjection du Système solaire sur une échelle de trois à quatre milliards d'années.

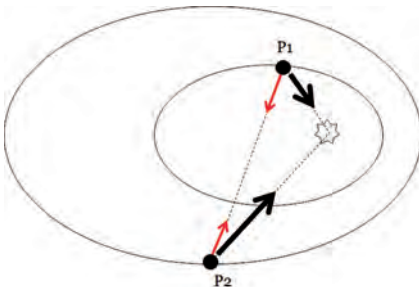


Figure 3 : Dans le Système solaire, chaque planète est soumise à l'action gravitationnelle du Soleil (flèches noires) et à celles des autres planètes (flèches rouges). Ce dernier effet peut être considéré comme une perturbation et couple les équations du mouvement de toutes les planètes.

Jusqu'au XIX^e siècle, la géométrie euclidienne est la seule géométrie connue. Elle est donc la seule possible et doit être la géométrie de l'Univers. Elle est à la base de la physique de Newton.

En 1915, Albert Einstein achève sa nouvelle théorie de la gravitation, la relativité générale. Cette dernière repose sur une modification radicale des notions d'espace et de temps, qui doivent être unifiées dans une structure quadri-dimensionnelle, l'espace-temps, dont la géométrie est à déterminer. La géométrie n'est donc plus fixée *a priori*. Les développements de la cosmologie du XX^e siècle ont permis de conclure qu'aux plus grandes échelles, l'Univers n'était pas statique : l'espace se dilate.

Ceci a des implications en ce qui concerne la détermination des dis-

tances car on ne peut plus utiliser notre notion intuitive de distance, c'est-à-dire la distance euclidienne dans un espace absolu à un instant donné. En effet, la lumière émise par un objet lointain comme une galaxie met un certain temps pour nous parvenir. Pendant ce temps l'espace se dilate et la distance entre la Terre et cette galaxie au moment de la réception, D_{rec} , est différente de celle au moment de l'émission, D_{em} . Ces deux distances sont reliées par le décalage spectral, $1+z = D_{rec}/D_{em}$.

La durée de propagation de la lumière offre une première définition de la distance (D_T). Plus la lumière émise par un astre met de temps à nous parvenir, plus cet astre est lointain. On convertit ainsi une mesure de temps en une distance. Cette méthode est à l'origine de l'unité d'année-lumière correspondant à la distance parcourue par la lumière en une année. Deux autres notions de distance sont couramment utilisées en astrophysique, la distance angulaire (D_A), qui généralise la parallaxe, et la distance luminosité (D_L). Cette dernière est définie à partir du flux observé (f) et de la luminosité intrinsèque de l'astre (L) par $f=L/4\pi D_L^2$. Tant que le décalage spectral est petit, ces trois distances sont identiques et sont reliées au décalage spectral par la loi de Hubble $D_A \sim D_L \sim D_T \sim cz/H_0$ où c est la vitesse de la lumière et H_0 la constante de Hubble qui caractérise le taux d'expansion de l'Univers aujourd'hui.

Ces quelques exemples nous rappellent le lien historique entre astronomie et géométrie et illustrent comment des problèmes d'astronomie tels que la stabilité du Système solaire ont été à l'origine de développements mathématiques majeurs, comme les méthodes lagrangienne et hamiltonienne, la théorie des perturbations, le chaos etc. La structure de notre Univers nous oblige à généraliser les notions de distance et à considérer des géométries non euclidiennes. Le développement des grandes bases de données (catalogues de galaxies, fond diffus cosmologique) et leur analyse créent de nouveaux liens avec les théories statistiques et de probabilité nécessaires pour comparer les modèles et les observations.

Ainsi, le lien entre astronomie et mathématiques reste fécond et en constant renouvellement, aussi bien au niveau appliqué que conceptuel.

J.-P. U.

Pour en savoir plus :

Jacques LASKAR : *Le système solaire est-il stable?*, Séminaire Poincaré XIV, (2010) 221.

Nathalie DERUELLE et Jean-Philippe UZAN : *Mécanique et gravitation newtoniennes*, Vuibert (2006).

Gilbert PIETRYK (dir.) : *Panorama de la physique*, Belin (2007),

<http://www.insu.cnrs.fr/ama09/dans-moins-de-5-milliards-d-annees-risques-de-collisions-planetaires>