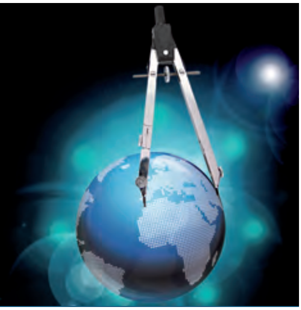
La démographie en équations



Benoît Rittaud

Enseignant-chercheur à l’Université Paris-13

La prospective sur l'évolution de la population humaine existe depuis plusieurs siècles, à l'origine dans une perspective très différente de celles d'aujourd'hui. Deux modèles ont été spécialement à l'honneur : le modèle exponentiel et le modèle logistique.

En 1202, Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, réalise l'expérience de pensée qui consiste à placer un couple de lapins dans un grand enclos et à étudier la manière dont ils vont se reproduire. Il part de deux hypothèses :

- chaque couple de lapins se reproduit une fois par mois, donnant naissance à un nouveau couple.
- chaque couple nouveau-né devient fécond au bout d'un mois.

Fibonacci se pose la question du nombre de lapins au bout d'un an. La réponse est obtenue en construisant la suite qui donne le nombre de couples au fil des mois : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc., chaque nouveau terme étant la somme des deux qui le précèdent (exercice : expliquer pourquoi cette suite est la bonne). La réponse finale est : 377 couples.

Leonardo Fibonacci
1175 -1250

Dans le *Liber Abaci* (*Le Livre du calcul*), l'ouvrage où Fibonacci mentionne cette devinette, l'énoncé et sa résolution prennent en tout à peine une page, qui n'est pas la plus difficile du livre ni la plus profonde. C'est pourtant ce seul passage qui vaut à Fibonacci une notoriété mondiale, tant la *suite* qui apparaît dans cette devinette s'est révélée fondamentale en théorie des nombres.

Autant les mathématiciens célèbrent Fibonacci pour avoir inventé la suite qui porte son nom (bien que lui-même n'en ait nullement mis au jour les propriétés), autant ils négligent un aspect au moins aussi impressionnant du fameux passage du *Liber Abaci* : le fait qu'il s'agit historiquement de la *première modélisation mathématique de l'évolution d'une population*, à partir de données numériques tout à fait réalistes (le temps de reproduction des lapins, l'âge où ils deviennent féconds). Il est difficile de savoir si Fibonacci avait vraiment autre chose en tête qu'un simple exercice de calcul, toujours est-il que, rétrospectivement, l'originalité du mathématicien pisan apparaît frappante.

Après Fibonacci, il faut attendre le XVII^{e} siècle pour voir des mathématiciens s'intéresser à nouveau à ce genre de question. Ce n'est que tout récemment qu'a été redécouvert dans cette perspective le travail d'un mathématicien aujourd'hui méconnu, Jean Leurechon, publié dans un ouvrage de mathématiques récréatives intitulé *Selectae Propositiones* en 1622 et suivi deux ans plus tard d'un autre appelé à une renommée internationale tout au long du XVII^{e} siècle, *Récréation mathématique*. Leurechon y modélise la croissance de populations végétales et animales par des suites géométriques (voir encadré), non sans insister sur la vitesse stupéfiante avec laquelle une telle modélisation permet de recouvrir la Terre entière avec telle ou telle plante.

Les suites géométriques

Une suite géométrique est une suite définie par un nombre a (le *terme initial*) et un nombre r (la *raison*). Chaque nouveau terme s'obtient en multipliant le précédent par r. Ainsi, la suite géométrique de terme initial 3 et de raison 2 a pour premiers termes :

3 6 12 24 48 96…

Plus généralement, les premiers termes de la suite géométrique de terme initial a et de raison r peuvent s'écrire :

$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \quad ar^4 \quad ar^5$…

Thomas Malthus
1766 - 1834

Les premiers démographes du XVII^{e} siècle utilisent abondamment les suites géométriques, notamment pour répondre à d'étranges questions d'exégèse biblique (nombre de descendants du couple originel, nombre d'Hébreux en Égypte avant l'Exode…).

Toutefois, c'est surtout Thomas Malthus, à la toute fin du XVIII^{e} siècle, qui fait entrer le modèle des suites géométriques dans la conscience collective. Affolé à l'idée que la croissance d'une telle suite dépasse toujours, selon lui, la vitesse à laquelle peuvent croître les ressources agricoles, le pasteur anglican estime que le bon moyen d'éviter une famine généralisée consiste à supprimer les lois qui viennent en aide aux plus pauvres et qui, selon lui toujours, présentent l'inconvénient de favoriser leur reproduction. Depuis, une telle angoisse n'a cessé de ressurgir sous une forme ou sous une autre, et certains passages d'un René Dumont ou d'un Paul Ehrlich montrent que notre époque est capable de porter des discours d'une brutalité tout aussi transparente que celle de Malthus, sous couvert des meilleures intentions, comme il se doit.

Dans le modèle de croissance utilisé par Malthus (entre autres), le taux relatif de croissance de la population est constant. Cela revient, par exemple, à supposer que la population croît de 1 % tous les ans. L'évolution de la population au fil des années est alors celle d'une suite géométrique. Regardons à présent ce qui se passe en temps continue. Si *p(t)* désigne la population au temps *t* et *p'(t)* sa vitesse (absolue) de croissance à l'instant *t*, la croissance relative s'exprime par le rapport *p'(t)/p(t)*. Supposer une croissance relative constante, c'est postuler l'existence d'une valeur c indépendante du temps et telle que $p'(t)/p(t) = c$. Une telle expression est une *équation différentielle*. C'est une équation dans laquelle ce qu'il s'agit de trouver est une fonction (en l'occurrence *p*).

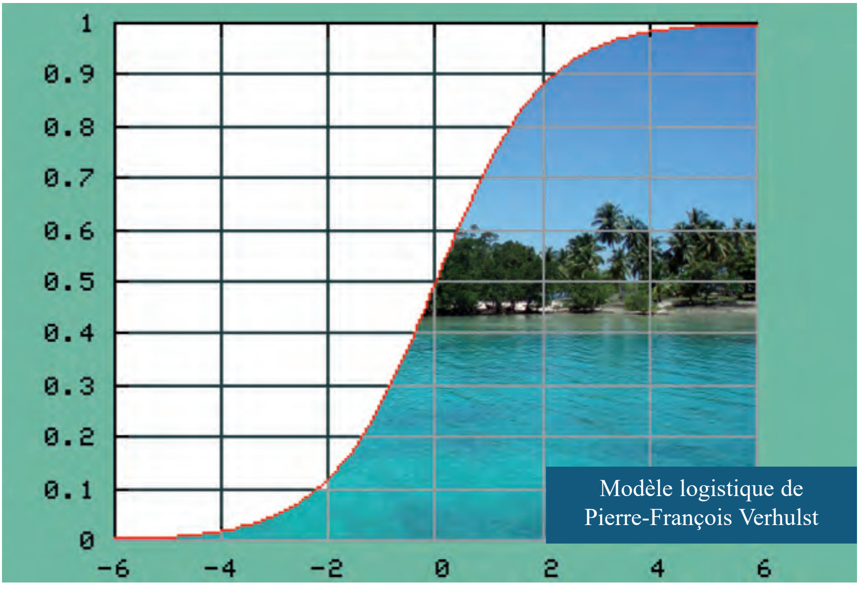
L'équation différentielle $p'(t)/p(t) = c$ est l'une des plus simples et aussi des plus fondamentales qui soit. Ses solutions sont les fonctions exponentielles de la forme $p(t) = p_0.e^{ct}$, où p_0 est la population au temps 0 et où e est la *base du logarithme néperien* (soit environ 2,7). Une telle fonction donne à voir une courbe dont le comportement est qualitativement identique à celui d'une suite géométrique.

Courbe de croissance de la population mondiale © *Robert Laffont*
Photo Festival des Vielles Charrues © *Pierre Iglésias*

Leur propriété qui effrayait tant Malthus est la rapidité de leur croissance : si rien ne venait à l'interrompre, celle-ci en viendrait vite à transformer en êtres humains chaque morceau de la Terre, ce qui est évidemment impossible. D'où l'idée d'une inévitable *catastrophe malthusienne*, qui brise sans pitié la croissance démographique d'une manière ou d'une autre : famine, guerre…

Pierre-François Verhulst
1804 - 1849

Dès le milieu du XIX^{e} siècle, un outil mathématique plus précis voit le jour, qui corrige les défauts les plus criants du modèle de Malthus : c'est le *modèle logistique* de Pierre-François Verhulst. Dans celui-ci, l'accroissement de la population est à chaque instant freinée par une f*orce de rappel*, supposée proportionnelle au carré de la population totale. En terme d'équations différentielles, cela revient à réécrire le modèle de Malthus sous la forme $p'(t) = c \times p(t)$, puis à le modifier pour obtenir l'équation logistique $p'(t) = c \times p(t) - d \times p(t)^2$, dans laquelle la valeur d, indépendante du temps, est un paramètre définissant la force de rappel. À l'instar des forces de rappel issues de la physique (et dont le modèle s'inspire), celle-ci a pour effet d'empêcher la population de croître à l'infini. Cette dernière se trouve, à terme, bloquée sous un maximum infranchissable.



Modèle logistique de
Pierre-François Verhulst

Beaucoup moins catastrophiste que le modèle de Malthus, le modèle de Verhulst est aussi beaucoup plus réaliste, même si l'on sait aujourd'hui que l'enthousiasme d'un Raymond Pearl, qui le redécouvrit indépendamment au début du XX^{e} siècle, était excessif.

La solution de cette nouvelle équation est bien plus paisible que celle du modèle de Malthus : après une croissance à peu près exponentielle, la courbe de population s'infléchit puis se stabilise à un maximum.

Aujourd'hui encore, le modèle de Verhulst est un point de repère pour l'élaboration de diverses projections de population, qu'il s'agisse d'une population humaine ou de celle d'un nouveau produit vendu sur le marché.

B.R.

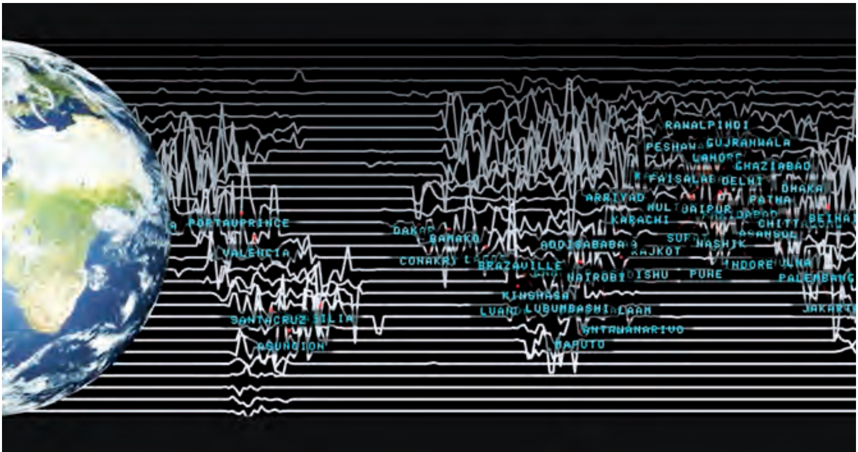


Image du film *Exit* mettant en scène les données statistiques mondiales.
Ici, les regroupements de population dans les grandes villes du monde.
© Fondation Cartier

Références pour en savoir plus :

René Dumont, ***L'Utopie ou la mort***, Seuil, 1974.

Paul Ehrlich, ***La Bombe P***, Fayard/Les Amis de la Terre, 1972

Hervé Le Bras, ***Les Limites de la planète***, Flammarion, 1994.

Laurence Sigler, ***Fibonacci's Liber Abaci***, Springer, 2003.