Géométrie Fractale et Phénomènes Naturels

Jean-François COLONNA
Centre de Mathématiques APpliquées
Ecole Polytechnique

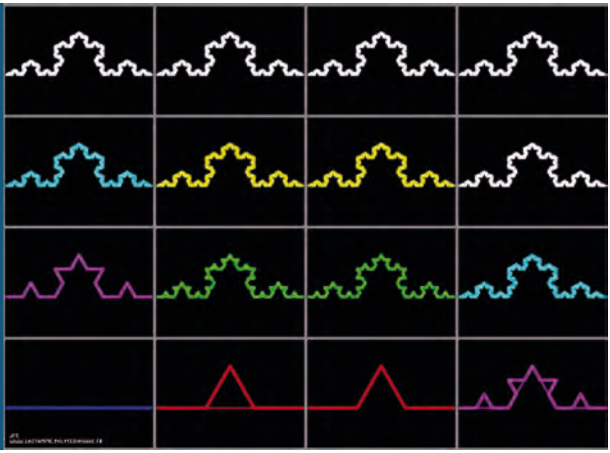
En 1960, Eugène Wigner s'interrogeait sur la redoutable efficacité des Mathématiques en Physique. Malgré ces succès, des *choses* bien quotidiennes échappaient à une description en terme de Mathématiques *classiques* : quelle est en effet la forme d'un nuage, d'une montagne ou encore des ramifications des bronches en terme d'*atomes* euclidiens ?

De Euclide à Mandelbrot

Or à la fin du dix-neuvième siècle, des mathématiciens (Weierstrass, Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff, Besicovitch, von Koch, Sierpinski,...) s'intéressèrent à des *monstres* et en particulier à des courbes continues n'ayant de tangente en aucun point... Ces courbes sont définies comme étant la limite d'un certain processus itératif de construction et ne sont donc jamais visualisables exactement, mais seulement de façon approchée. L'exemple le plus simple est celui de la *courbe de von Koch*. La Figure 1 présente les trois premières itérations de sa construction : partant d'un segment (bleu en bas et à gauche), son tiers central est remplacé par les deux côtés supérieurs d'un triangle équilatéral ; cette procédure est ensuite répétée pour chacun des 4 segments plus petits (dans un rapport égal à 3) obtenus, etc.

Figure 1

La courbe de von Koch.



Il est évident qu'à chaque itération la longueur totale est mutipliée par 4/3, ce qui fait que, par exemple, en quatre-vingt dix itérations, partant d'un segment d'un mètre, la longueur obtenue (175×10^6 km) est supérieure à la distance de la Terre au Soleil ! Cela met en évidence une première propriété : un objet fractal permet au *fini* (ici, le domaine de définition de cette courbe) et à l'*infini* (sa longueur) de coexister. Une seconde propriété, parfaitement visible, est celle d'*autosimilarité*. Elle indique que les parties sont identiques au tout, à un facteur d'échelle près et il s'agit là d'une propriété possédée par de très nombreux objets naturels : un nuage, une montagne, une branche de fougère,...

Nous n'insisterons pas sur la délicate notion de dimension dite *fractale* en général non entière. Notons seulement qu'elle est, pour les objets fractals, une mesure de leur *rugosité*, de leur irrégularité et de leur *taux* d'occupation de l'espace dans lequel ils existent.

Ces monstres restèrent assoupis plusieurs dizaines années jusqu'à ce que la curiosité, l'intuition et le génie de *Benoît Mandelbrot*, aidé par les progrès étonnants des technologies informatiques, les réveillent dans les années soixante/soixante-dix.

L'Universalité de la Géométrie Fractale

Pourquoi tant d'objets naturels sont-ils fractals ? L'examen d'un exemple particulier, celui de la structure des alvéoles pulmonaires (Figure 2), peut nous fournir une réponse possible. En effet, cet organe situé à l'extrémité de l'arbre bronchique (lui-même fractal) est destiné à assurer des échanges gazeux à travers une surface dont l'aire doit être la plus grande possible, alors que son volume est limité. Si la géométrie utilisée était celle d'une sphère, pour augmenter l'aire il conviendrait d'augmen-

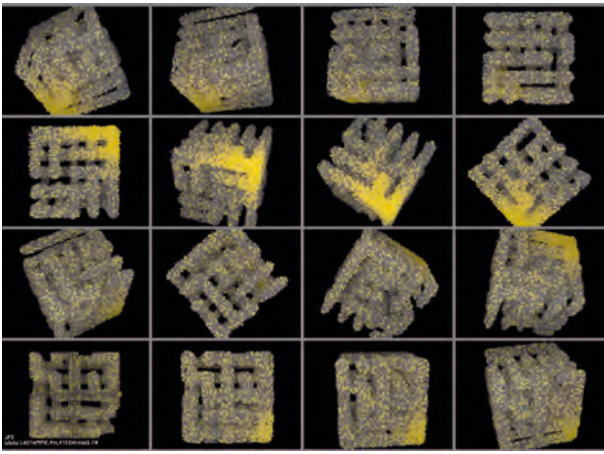


Figure 2

Diffusion de particules à l'intérieur des alvéoles pulmonaires humaines (modèle géométrique dû à Hiroko Kitaoka).

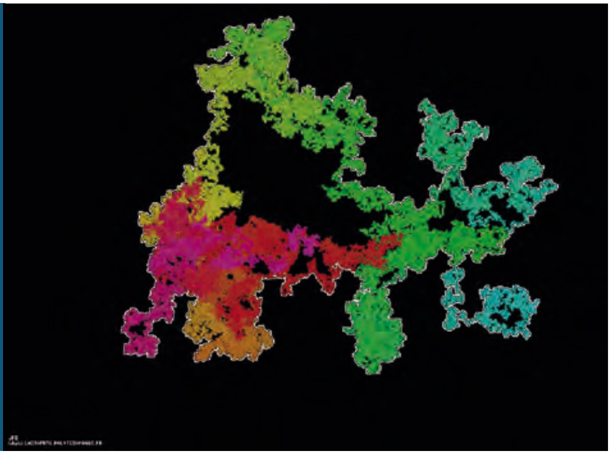
ter le rayon (notons que chez l'adulte la surface d'échange est de l'ordre de 100 mètres carrés, ce qui correspondrait à une sphère de 5,6 mètres de diamètre !).

Une structure fractale est donc la réponse à ce problème d'optimisation.

La géométrie fractale est rapidement devenue un outil mathématique fondamental en réussissant à réunir des domaines jusqu'alors disjoints.

Figure 3

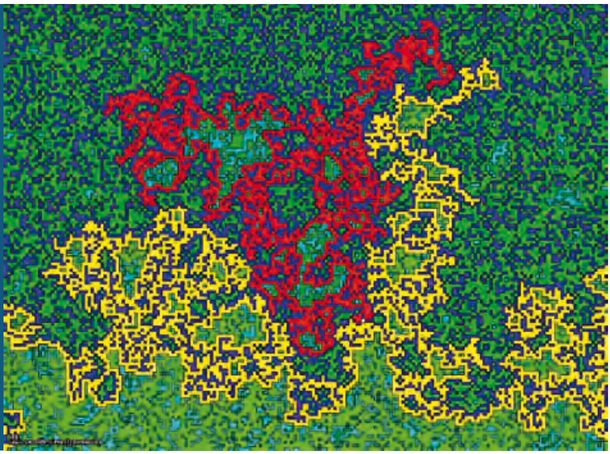
Le mouvement brownien.



Les cours de la bourse, le mouvement brownien (Figure 3), le chaos déterministe, les feux de forêts, les fronts de diffusion (Figure 4),

Figure 4

Le front de diffusion (jaune) de particules (vertes) soumises à une marche aléatoire dans un milieu initialement vide (bleu). L'amas rouge peut se connecter au front par par le simple saut de la particule blanche



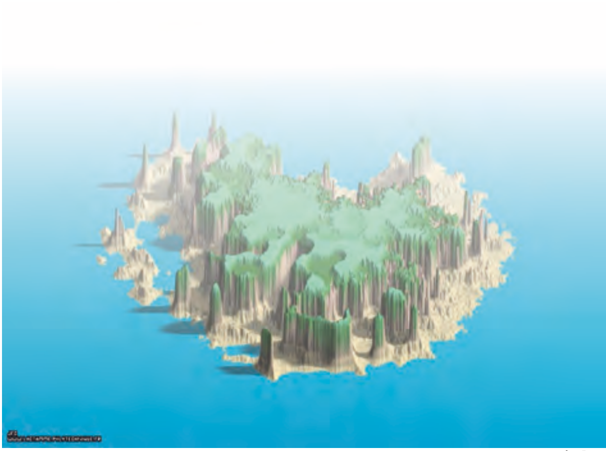


Figure 5

L'érosion des côtes d'une île d'après le modèle de Bernard Sapoval, Andrea Baldasarri et Andrea Gabrielli.

l'érosion des côtes (figure 5),... autant de domaines de recherche (fondamentale ou appliquée) où elle s'est imposée. La Science elle-même, avec les structures sans fin qu'elle nous dévoile, ne serait-elle pas l'ultime *objet* fractal ?

Géométrie fractale et synthèse de phénomènes naturels (nuages, montagnes,...) :

Remarquons que la première itération de la construction de la courbe de von Koch ressemble de façon très grossière et trop parfaite à une ligne de crête. En introduisant un peu d'aléatoire, cette courbe pourra prendre une forme moins régulière et donc plus naturelle ; elle sera alors qualifiée de fractale non déterministe. L'auteur de ce texte a généralisé cette procédure à des espaces à N dimensions ; cela permet, par exemple, pour N=3 de produire des paysages extrêmement variés (Figure 6)

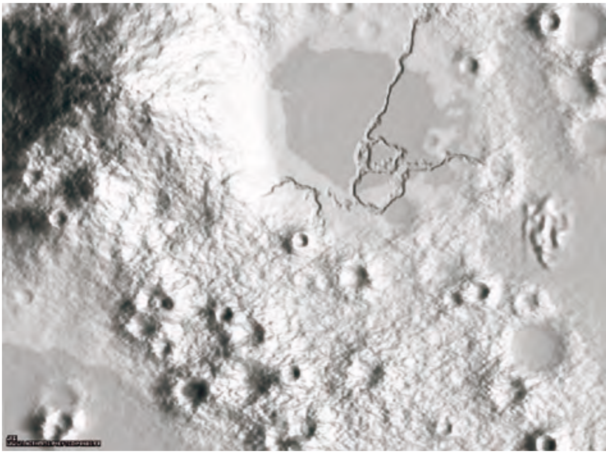


Figure 6

Simulation de la surface lunaire.

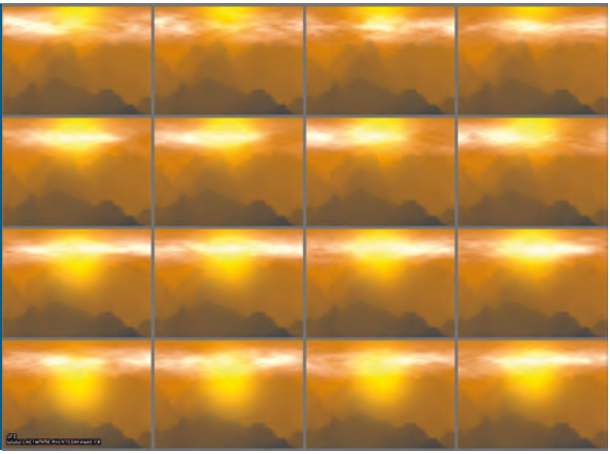


Figure 7

Simulation d'un lever du Soleil.

et pour N=4, de les animer (Figure 7).

Il convient de noter que la simplicité conceptuelle de cet algorithme (et de ceux qui permettent de calculer les ensembles dits de Julia et de Mandelbrot, par exemple) est pratiquement en contradiction avec l'infinie richesse visuelle des structures obtenues. Ainsi, la géométrie fractale nous donne l'occasion de rappeler que du *simple peut naître le complexe.*

Ordinateur et géométrie fractale

Le rôle joué par l'ordinateur fut décisif dans ces progrès. Or la géométrie fractale nous a montré que renoncer parfois à la différentiabilité pouvait s'avérer être une idée fructueuse. Qu'en est-il de la continuité ? L'ordinateur, de par sa structure même, nous contraint à y renoncer bien involontairement. Mais évidemment il ne s'agit pas ici, du moins pas encore, de la continuité de la nature, mais bien de celle des modèles ! Les nombres réels, essentiels à la Physique, sont impossibles à représenter dans nos calculateurs, machines *discrètes* par définition et très facilement cela peut conduire à des résultats faux.

Géométrie fractale et art

La géométrie fractale est connue du public par les images qu'elle permet de produire et qui font dire bien souvent qu'elle est un pont entre l'Art et la Science. Mais alors, l'œuvre ce n'est plus l'image : c'est le modèle mathématique, introduisant ainsi le concept *borgésien* d'œuvre potentielle (c'est-à-dire contenant en elle une quasi-infinité d'œuvres du même type, prêtes à émerger du néant)...

J.F. C.

www.lactamme.polytechnique.fr