

Le moulin et le papillon

Étienne Ghys et Jos Leys



Edward Lorenz (1917-2008) n'était ni mathématicien, ni informaticien, ni physicien, ni météorologue, mais il était tout cela à la fois : un grand scientifique qui a laissé beaucoup de travail pour toutes ces professions. Il a même inventé un moulin à eau pour expliquer clairement ses idées sur le chaos...

Dans les années 1960-1970, il met en évidence *l'effet papillon* qui est devenu célèbre, même à l'extérieur du monde scientifique. Il n'était pas le premier à introduire le concept de *dépendance sensible aux conditions initiales*, ou de chaos. Mais ces idées restaient théoriques et on n'imaginait pas qu'elles pourraient avoir des répercussions dans la vie de tous les jours, comme par exemple sur le temps qu'il fera demain.

L'article de Lorenz *Deterministic non periodic flow*, datant de 1963, reste un modèle. Sa première approche est celle du mathématicien face à un problème qu'il ne sait pas résoudre : il change de problème pour en choisir un plus simple, sur lequel il a quelque chose à dire... Les équations complexes qui gouvernent le mouvement de l'atmosphère sont trop compliquées ? Elles dépendent d'un trop grand nombre de variables ? Qu'à cela ne tienne ! Il écrit *une autre équation*, bien plus simple, qui ne dépend que de *trois* variables, et qui ressemble, *vaguement*, à l'équation initiale (qui, elle, dépend d'une infinité de variables). Puis, il analyse cette équation simplifiée, cette fois comme un *numéricien*. Il utilise les ordinateurs primitifs dont il dispose pour observer à quoi ressemblent les solutions. Il ne s'agit pas de théorèmes mathématiques mais seulement de *constatations numériques expérimentales*. Ensuite, il se comporte comme un physicien qui revient sur le problème initial et se demande si ses observations numériques de ces équations simplifiées ont quelque chose à voir avec le problème initial : l'atmosphère. Il ne s'engage pas, il suscite des questions, suggère des expériences à venir etc.

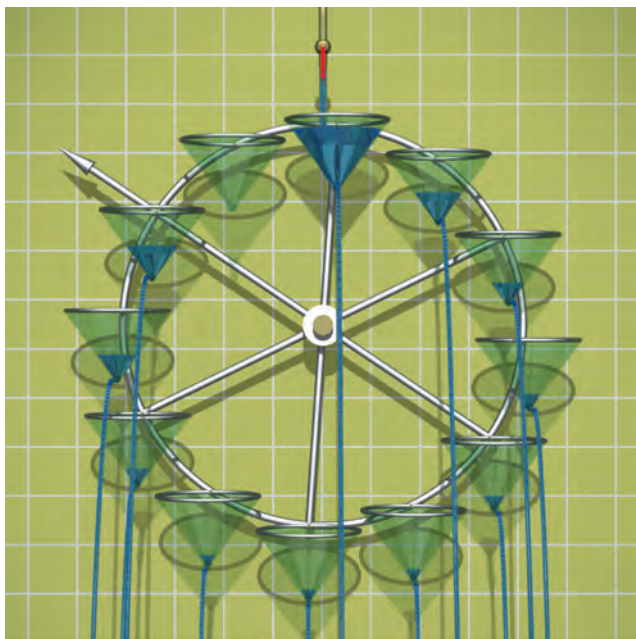
Les mathématiciens ont eu beaucoup de mal à placer les questions de Lorenz dans un contexte mathématique, mais ils y parviennent peu à peu.

On résume en général l'effet papillon par le titre d'une conférence de Lorenz : *Le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer un ouragan au Texas ?*. On parle de dépendance sensible aux conditions initiales : une petite modification sur les conditions initiales d'un mouvement peut engendrer de grandes modifications quelque temps plus tard. Il ne faudrait pas se limiter à cela. Comment un scientifique pourrait-il se contenter d'une idée qui postule l'impossibilité de prédire l'avenir dans la pratique puisque cet avenir dépend d'une connaissance extrêmement précise du présent, au delà de ce qu'on peut espérer raisonnablement ? Le travail du scientifique, comme par exemple un météorologue, est souvent de faire des *prédictions*. Si on part du principe qu'elles sont impossibles, il ne reste plus grand-chose à faire...

Lorenz et son moulin à eau chaotique

Nous allons décrire un objet imaginé par Lorenz et deux collègues physiciens. Ils ont eu l'idée de concevoir un système physique bien plus simple, un *moulin à eau*, qui obéit à ces équations simplifiées. Les conclusions physiques de Lorenz, même si elles sont douteuses pour la météorologie, sont alors de vraies conclusions physiques pour ce moulin, certes plus modeste mais quand même bien concret... Un physicien aime les *vraies expériences*.

Voici un moulin. Il est constitué d'une roue autour de laquelle sont suspendus des seaux d'eau. Bien sûr, les seaux sont percés au fond, et



l'eau s'écoule, d'autant plus vite que le niveau est élevé. Tout en haut, on ouvre un robinet et on observe le mouvement.

Le moulin
de Lorenz

Le moulin ne semble pas capable de trouver son régime permanent. Il tourne tantôt à droite, tantôt à gauche et nous laisse totalement incapables de prévoir dans quel sens il tournera trois secondes plus tard.

Le mouvement paraît totalement erratique, imprévisible, chaotique pour employer le mot approprié... Que se passe-t-il ? La première chose est que le mouvement n'est pas *périodique* : cela saute aux yeux. Plus sérieusement, le mouvement semble *aléatoire*. Mais que pourrait signifier ce mot dans ce contexte puisque le mouvement est parfaitement *déterministe* : la physique ne joue pas aux dés avec le mouvement ; elle suit des équations bien précises et si l'on connaît la position et la vitesse à un instant donné, on peut en déduire mathématiquement la position et la vitesse à n'importe quel moment futur. Le problème est qu'il faut interpréter le mot *connaît* dans la phrase précédente dans un sens mathématique et pas physique : un mathématicien connaît un nombre quand il en connaît *toutes* les décimales et ce n'est jamais le cas d'un physicien qui fait ce qu'il peut avec ses mesures et ne peut considérer comme connues qu'un certain nombre de décimales. Le physicien ne pourra *jamais* s'affranchir d'une certaine incertitude dans ses mesures.

Changeons imperceptiblement la position initiale. On observe bien la *dépendance sensible aux conditions initiales* : au début les deux moulins semblent se mouvoir de la même manière et après quelque temps, les choses changent de manière très significative. Au point que les deux moulins semblent ne plus rien avoir à voir entre eux. C'est la première partie du message de Lorenz. Si l'on ne connaît qu'approximativement la condition initiale, il est bien possible qu'on ne puisse absolument rien dire sur le futur du mouvement. Beaucoup ont résumé la contribution de Lorenz à cette affirmation, certes intéressante mais limitée. Si on ne peut pas prédire l'avenir, que va-t-on faire ?

Des probabilités et des statistiques dans un contexte déterministe ?

Lorsqu'on n'a pas de certitude sur l'avenir, on parle de probabilités... Prenons notre moulin et faisons le tourner. Supposons qu'on l'observe par exemple 25 fois par seconde (comme au cinéma), pendant 5 000 secondes, donc 125 000 observations. À chaque observation, notons la vitesse de rotation de la roue (positive si la roue tourne dans un sens et négative si elle tourne dans l'autre). Nous obtenons donc une longue liste de 125 000 nombres que nous épargnerons au lecteur. On peut penser à la liste des mesures météorologiques dont on dispose depuis très longtemps.

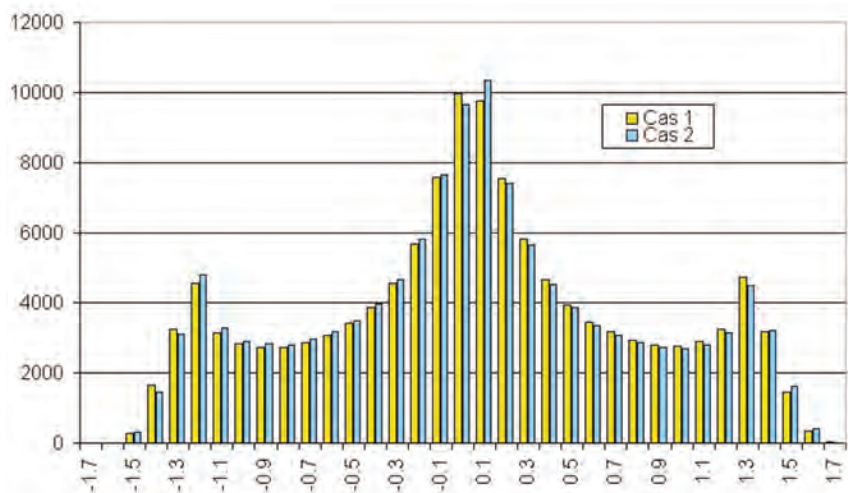
Y aurait-il un sens à dire que cette suite est *aléatoire* ? Une idée très simple est de faire ce que font les statisticiens : un diagramme en bâtons pour illustrer la distribution. Nous avons découpé l'intervalle allant de -1,8 à +1,8 en 35 intervalles de même longueur et nous avons comp-

té le nombre de fois où la mesure de la vitesse donnait un résultat dans chacun de ces intervalles. Voici le résultat. Certains des intervalles semblent plus visités que d'autres.

L'idée principale de Lorenz, bien plus novatrice que celle de la dépendance sensible aux conditions initiales, est que l'aléa du mouvement, qui est bien réel, est insensible aux conditions initiales. Expliquons cela. Prenons le même moulin, modifions très légèrement les conditions initiales comme nous l'avons fait précédemment, et observons à nouveau la roue 25 fois par seconde, en notant sa vitesse de rotation.

On obtient une autre longue suite de données, bien différente de la première puisqu'il y a dépendance sensible aux conditions initiales. Mais l'observation est que les deux suites de données, bien que différentes, sont statistiquement identiques.

Dessignons le nouveau diagramme en bâtons correspondant à cette nouvelle condition initiale en le plaçant à côté du premier.



Les diagrammes sont différents mais ils se ressemblent beaucoup. On pourrait demander à un statisticien s'il lui semble raisonnable que les deux diagrammes puissent être considérés comme deux échantillons d'une même population ? Là encore, il faut nous faire confiance : en effet, tous les tests statistiques montrent que les différences entre les deux diagrammes peuvent sans problème s'expliquer par les probabilités. Si on avait pris un échantillon encore plus grand, les différences entre ces fréquences seraient plus faibles. Et bien sûr, la même chose serait vraie si on mesurait autre chose que la vitesse de rotation.

Que serait l'analogie d'un ouragan dans le contexte de notre moulin ? C'est une circonstance particulière, heureusement rare, où certaines circonstances précises se présentent. Les auteurs ne connaissent rien en météorologie, mais ils peuvent imaginer qu'un ouragan est peut-être la conjonction de certaines pressions atmosphériques, températures, vitesse du vent etc. En termes de moulin, peut-être qu'un ouragan correspondrait à une valeur extrême de la vitesse de rotation du moulin, disons supérieure à une certaine valeur, disons par exemple 1,7 avec notre roue ; une circonstance très rare. Ce que nous venons de voir, c'est que si on change très peu la condition initiale, la liste des valeurs des vitesses sera très différente, mais sur de très longues périodes, la fréquence d'apparition de ces conditions extrêmes ne change pas. Le nombre moyen de jours d'ouragans par an, ou par décennie par exemple, est insensible aux conditions initiales. Il devient possible pour le physicien de faire des prévisions, météorologiques par exemple, mais ces prévisions seront d'une nature très différente.

Des théorèmes ?

Jusqu'à présent, nous n'avons mentionné cette *insensibilité statistique aux conditions initiales* que comme une intuition de Lorenz. Peut-on démontrer que c'est effectivement le cas dans les systèmes dynamiques que l'on rencontre dans la nature ? C'est en grande partie un défi lancé aux mathématiciens contemporains et de grands progrès ont été réalisés récemment.

Pour de grands systèmes tels que l'atmosphère, qui intéressaient initialement Lorenz, il faut bien reconnaître que les progrès mathématiques sont lents. Il n'est pas clair que le mouvement de l'atmosphère est sensible aux conditions initiales, et la question de l'insensibilité statistique semble encore plus hors de portée pour l'instant. Par contre, pour des systèmes plus *raisonnables* dépendant de beaucoup moins de paramètres, comme par exemple l'équation que Lorenz a lui-même rencontrée en trois variables, les progrès ont été importants dans les années récentes. On peut citer par exemple le travail de Tucker qui démontre mathématiquement que l'équation de Lorenz à trois variables est effecti-

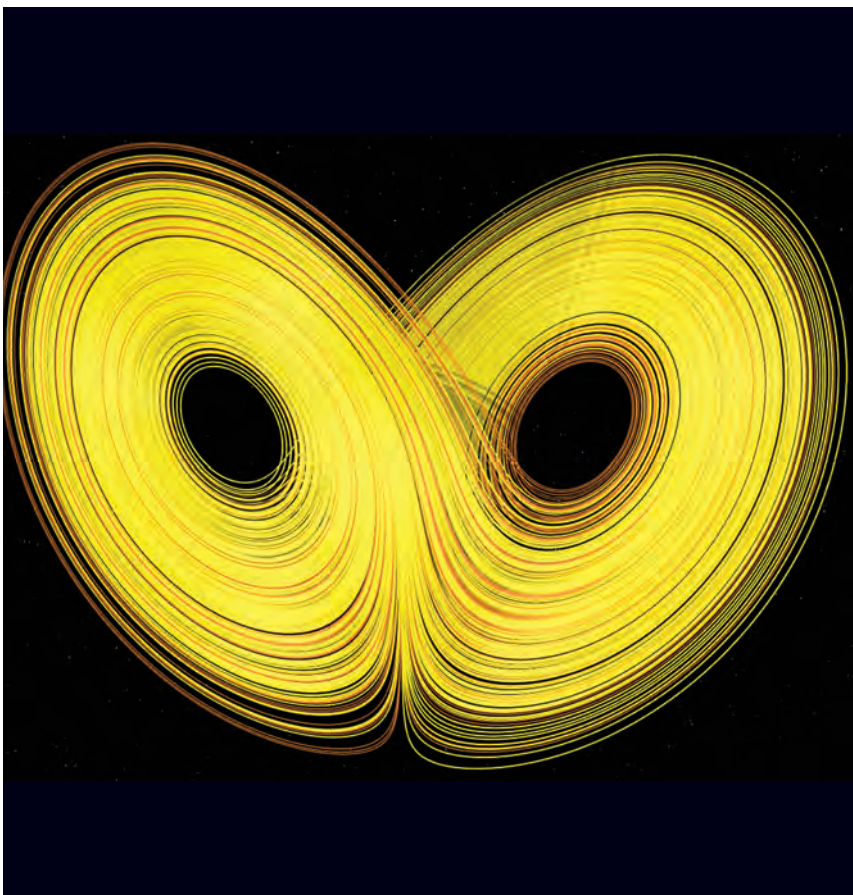
vement insensible statistiquement aux conditions initiales (les auteurs parlent de l'existence de mesure de Sinai-Ruelle-Bowen pour énoncer cette propriété). Mais il reste beaucoup à faire sur le plan mathématique.

Espérons avoir rendu justice à Lorenz qui ne s'est pas contenté de dire que le futur dépend fortement du présent. Beaucoup l'avaient dit avant lui, ou au moins le savaient très bien sans ressentir le besoin de le dire...

Mais sa contribution est aussi, et peut-être surtout, de montrer qu'en recentrant ses ambitions autour de questions statistiques, même dans un système déterministe, on peut préserver un caractère prédictif à la science.

Un papillon pour terminer

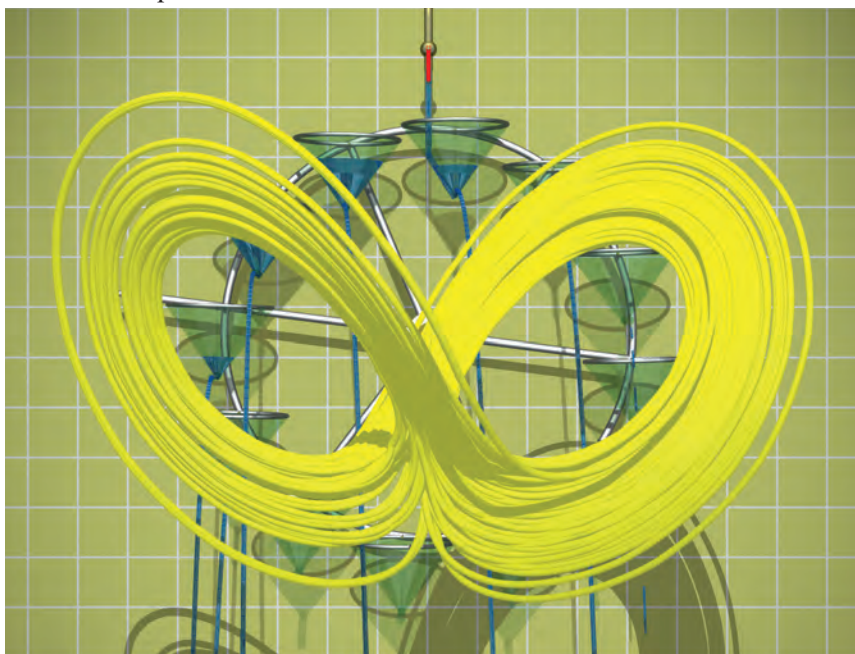
L'équation simplifiée de Lorenz a une autre propriété : elle est belle. Si l'on trace ses solutions dans l'espace, on voit apparaître un très bel objet appelé *attracteur de Lorenz* qui est devenu l'un des symboles les plus célèbres de la théorie des fractales et du chaos. En voici une image :



Il est bien clair que la ressemblance avec un papillon ne fait que renforcer la force symbolique de l'effet *papillon*.

Le moulin de Lorenz a été conçu pour être un phénomène réel qui illustre l'effet papillon. Pour décrire dans ses grandes lignes le moulin à un instant donné, nous avons choisi trois nombres. Leur définition importe peu. Lorsque le moulin tourne, on peut donc dessiner dans l'espace la courbe décrite par ces trois nombres.

Voici ce qu'on obtient :



Le moulin est donc un papillon !

E.G et J.L.

Pour en savoir plus :

Cet article est extrait d'un article des mêmes auteurs sur Images des Mathématiques :
<http://images.math.cnrs.fr>

Le film *Chaos, une aventure mathématique* par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez contient beaucoup plus d'informations (et d'images). Il peut être consulté (et téléchargé) sur <http://www.chaos-math.org/fr>