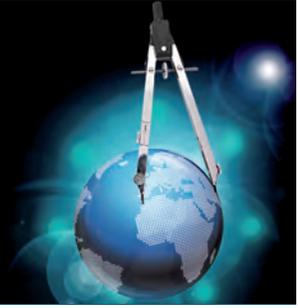


Mathématiques de la planète Terre

Christiane Rousseau

Professeur titulaire
Université de Montréal



Une année entière à explorer notre planète à l'aide d'outils mathématiques et à parler de son futur, n'est-ce pas trop long ? Lorsqu'on commence à se demander de quoi on pourrait parler, on compte sur les doigts d'une main les sujets qui nous semblent pertinents. Mais, plus l'on poursuit, plus l'aventure devient fascinante, et plus nombreux sont les sujets dont on entrevoit l'intérêt et que l'on n'aura pas le temps d'approfondir.

Pour ma part, cela fait déjà 4 ans que j'ai lancé l'idée de cette année internationale et ma passion d'en apprendre plus augmente avec le temps.

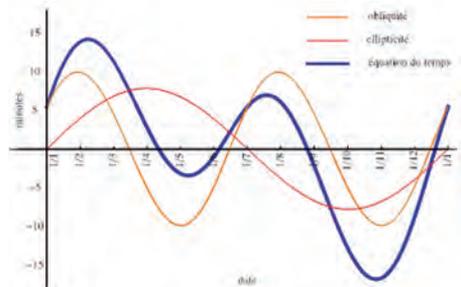
Pour expliquer le vaste spectre des sujets qui cadrent sous le thème des mathématiques de la planète Terre, on aime les regrouper en quatre grands thèmes :

- explorer notre planète, sa structure, ses océans et climats, ses mouvements planétaires ;
- notre planète est habitée par la vie ;
- notre planète est façonnée par la civilisation ;
- notre planète est menacée.

Explorer notre planète

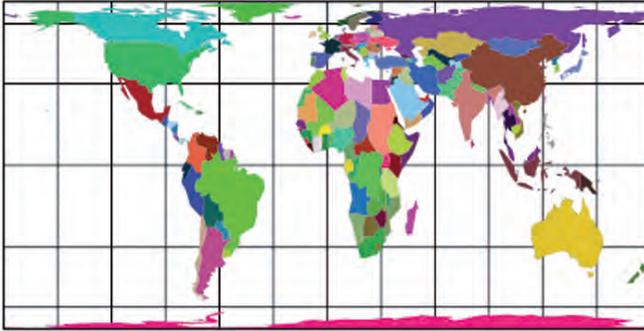
Le premier thème me semble le plus riche en problèmes mathématiques de niveau abordable.

On peut commencer par les classiques : décrire la hauteur du soleil à midi, et la longueur du jour selon les saisons et la latitude, découvrir la différence entre le midi solaire indiqué par un cadran solaire et le midi moyen indiqué par nos horloges.



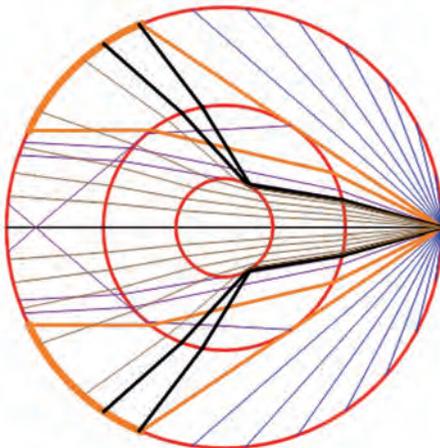
L'équation du temps est la différence entre le midi vrai et le midi moyen

cartographier la Terre, etc.



Archimède savait déjà que la projection horizontale sur le cylindre préserve les rapports d'aires

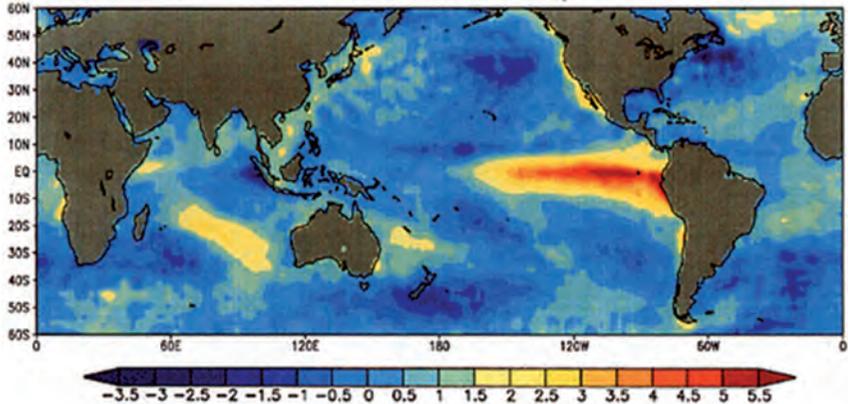
Mais on peut aller plus loin : comment peut-on explorer l'intérieur de notre planète et découvrir sa structure ? On le fait de manière indirecte en observant et analysant les signaux réfléchis et réfractés par les différentes strates géologiques. Nous mettons alors nos *lunettes mathématiques* qui nous permettent de *voir* l'intérieur de la Terre. Lorsqu'il s'agit de détecter du pétrole dans le sol, il suffit d'envoyer des signaux et d'analyser leur réflexion. Par contre, les seuls signaux suffisamment puissants pour explorer les entrailles de la Terre sont les signaux sismiques générés par les grands tremblements de terre et répertoriés par les stations sismiques de par le monde. Ainsi, la mathématicienne danoise Inge Lehmann a découvert le noyau interne de la Terre en 1936, en remarquant que des ondes sismiques étaient réfléchies sur ce noyau.



Les ondes sismiques réfractées ou réfléchies sur les diverses strates de la Terre

Beaucoup plus près de nous, Ingrid Daubechies entraîne actuellement des géophysiciens à *voir* les panaches volcaniques qui suintent au travers du manteau terrestre. Comme les plaques tectoniques bougent, cela crée des îles volcaniques isolées comme celles des archipels de Hawaïi, Tahiti, des Canaries, etc.

Ceci est loin d'épuiser le premier thème. Ainsi, la force de Coriolis due à la rotation de la Terre autour de son axe explique la circulation atmosphérique à grande échelle et pourquoi il n'y a jamais d'ouragans le long de l'équateur. On a maintenant une bonne modélisation de la propagation des tsunamis loin des côtes, et on sait que leur vitesse de propagation est inversement proportionnelle à la racine carrée de la profondeur de l'océan. Et on peut maintenant non seulement faire des prévisions météorologiques à court terme mais aussi prévoir des tendances saisonnières dues à des phénomènes comme el Niño et la Niña.

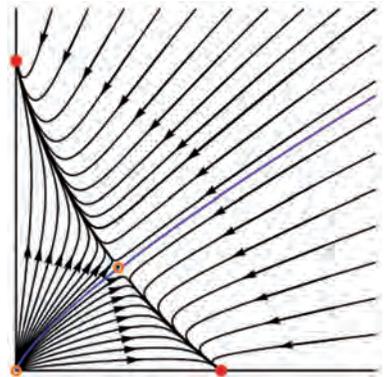


Anomalies de températures à la surface des océans (en °C) lors d'El Niño en 1997 (source NOAA)

Notre planète est habitée par la vie

Notre planète foisonne d'une multitude d'espèces et les scientifiques sont intrigués par le maintien de cette grande biodiversité. En effet, les modèles mathématiques d'espèces en compétition prévoient l'extinction d'espèces dès que la compétition pour les ressources est suffisamment forte.

C'est qu'il existe d'autres forces que la simple compétition qui assurent la biodiversité. Tout d'abord, il faut compter sur l'hétérogénéité spatiale : les modèles ou les conditions initiales ne sont pas les mêmes d'une région à l'autre. On ne peut pas non plus négliger l'hétérogénéité temporelle : une espèce pourrait être favorisée lorsqu'il fait chaud ou en période de sécheresse et une autre dans des



La compétition forte entre deux espèces : selon la condition initiale, une des espèces est éliminée.

conditions inverses. Une autre grande force qui maintient la biodiversité est la coopération. La coopération dont on parle ici est une coopération intéressée : les partenaires de la coopération seront tous les deux gagnants. De tels modèles de coopération existent dans les mondes animal et végétal. Et l'homme est devenu champion de la coopération dans son organisation de la planète. La théorie des jeux coopératifs joue un rôle de premier plan dans les modèles économiques et financiers. Dans la théorie des jeux coopératifs, on fait l'hypothèse que l'autre partenaire est intelligent et pourrait donc prévenir et déjouer une tentative d'anéantissement. Il est donc de l'intérêt de chacun des partenaires de coopérer et de rechercher une solution optimale pour les deux partenaires.

Notre planète est en danger

Les dangers qui menacent notre civilisation sont de toutes sortes. La modélisation mathématique des épidémies a permis de mieux comprendre leur propagation et de mettre au point des stratégies de contrôle efficaces. Ainsi, on sait qu'il n'est pas nécessaire de vacciner toute une population pour éradiquer une maladie. Il suffit de vacciner un pourcentage de la population de telle sorte que chaque individu contagieux contamine en moyenne moins d'un individu.

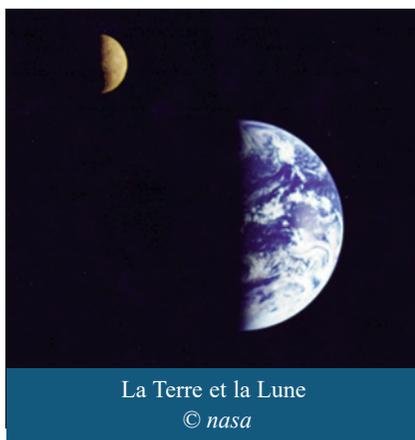
Les défis des changements climatiques et du développement durable sont par contre immenses parce que tous les problèmes sont inter-reliés. Déjà, quantifier les changements climatiques et la fourchette de hausse des températures est un défi en soi. Mais les changements climatiques risquent d'augmenter la fréquence et l'intensité des événements météorologiques extrêmes. Ils vont affecter les écosystèmes, soit directement, ou encore indirectement via de nouvelles espèces invasives. Ainsi, la coccinelle du pin des montagnes détruit les forêts de l'ouest canadien : auparavant, les hivers rigoureux maintenaient la population de cet insecte sous contrôle mais ces coccinelles prolifèrent maintenant en profitant des hivers plus doux. Les poissons des océans ne peuvent s'adapter aux températures plus chaudes. Ils migreront vers les régions plus près des pôles ou disparaîtront. La fonte des grands glaciers de l'Antarctique et du Groenland et le réchauffement des océans vont faire monter le niveau des océans et inonder des régions côtières très peuplées et des régions agricoles, en même temps que la croissance de la population mondiale va mettre une pression sans précédent sur les ressources de la planète.

Que peuvent faire les mathématiques ?

Comment alors convaincre les gouvernements d'agir, surtout en période de crise économique ? Une possibilité est de mettre un coût sur les différents scénarios et stratégies. Le rapport Stern sur l'économie du changement climatique disait déjà en 2006 que les bénéfices d'une

action rapide et musclée sur les changements climatiques sont de loin supérieurs aux coûts de l'inaction. Dans ce domaine, la modélisation des événements extrêmes, dont la probabilité est très faible mais les coûts astronomiques, est un défi important pour les mathématiciens. Et peut-on espérer migrer vers une économie plus verte qui soit en même temps synonyme de prospérité et de plein emploi ?

Vous me direz que la Terre a connu des cycles climatiques et même des périodes de glaciation. Vous avez raison et les mathématiques permettent d'expliquer ces cycles par les variations cycliques de l'orbite terrestre, appelées cycles de Milankovitch. Ainsi, les oscillations de l'obliquité de l'axe de la Terre ou encore celles de l'excentricité de l'orbite elliptique de la Terre sont corrélées avec les climats anciens de la Terre, soit parce que les régions polaires reçoivent moins de soleil, ou encore parce que la Terre passe plus de temps loin du soleil lorsque son orbite est plus allongée. Ces cycles climatiques se poursuivront-ils pour l'éternité ? Probablement pas : Jacques Laskar a montré que l'orbite de la Terre était chaotique et qu'une collision avec les autres planètes internes n'est pas exclue. Mais rassurez-vous : cela n'arrivera pas dans le prochain milliard d'années. Jacques Laskar a aussi montré que la Lune nous protège : c'est elle qui stabilise l'axe de la Terre et qui est responsable du cycle des saisons que nous connaissons.



J'espère que vous avez noté que j'ai oublié ou négligé plusieurs sujets qui se rapportent aux mathématiques de la planète. Par exemple, les réseaux de transport ou encore le graphe de la Toile. Vous l'avez compris, le sujet est aussi vaste que notre bonne vieille Terre et seule votre curiosité pourra vous amener à en découvrir les nombreuses facettes.

C.R.

Pour en savoir plus :

Vous pouvez commencer votre quête des *Mathématiques pour la planète Terre* sur les sites :

mpe2013.org/

ou

mpt2013.fr/