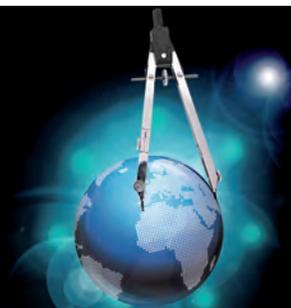


Un jour, une brève

Collectif *Un jour, une brève*



Notre petite planète, perdue dans la Voie Lactée pas très loin du Soleil, fait évidemment l'objet de toute notre attention, mais de nos inquiétudes aussi. Car c'est là que nous vivons, malades ou en bonne santé, partageant l'espace avec des millions d'espèces animales et végétales, qui sont elles-mêmes proliférantes ou espèces menacées ; c'est son climat que nous observons, modifions et subissons, tout comme nous sommes les victimes des soubresauts venus de ses entrailles ; c'est là que nous construisons nos villes, nos routes et nos réseaux d'ordinateurs ; ce sont ses ressources naturelles, en surface ou en sous-sol, que nous exploitons et parfois épuisons, c'est son atmosphère que nous polluons. C'est sur Terre que nous vivons en société, que vivaient nos parents et là que vivront nos enfants, mieux... ou moins bien que nous.

Observer, comprendre, proposer des solutions pour agir : c'est la mission confiée à la science. Et dans l'accomplissement de cette mission, les mathématiques sont très souvent présentes et de multiples façons, sans d'ailleurs que le public en général, les décideurs en particulier, en soient bien conscients.

L'année 2013 a été déclarée par l'UNESCO *Année des mathématiques de la planète Terre*. De nombreuses manifestations émailleront cette année, soit pour promouvoir des projets de recherche, soit pour faire prendre conscience au grand public des enjeux scientifiques et de la place qu'y jouent les mathématiques.

L'initiative *Un jour, une brève*¹ a pour objectif d'illustrer, par une publication quotidienne, la variété des problèmes scientifiques dans lesquels la recherche mathématique actuelle joue un rôle important, ainsi que certains grands moments dans l'histoire des sciences où les mathématiques ont, en interaction avec les autres sciences, aidé à comprendre ce que nul n'avait compris jusque là.

Ainsi, du 1^{er} janvier 2013 au 31 décembre 2013, du lundi au vendredi de chaque semaine, un court article est mis en ligne, présentant un problème scientifique, et la place tenue par les mathématiques, dans une langue compréhensible par chacun, qu'il ou elle soit un collégien ou une collégienne, un lycéen ou une lycéenne, un étudiant ou une étudiante ou tout simplement une personne curieuse.

Ce projet est réalisé à l'initiative de l'*Institut des Sciences Mathématiques* et de leurs interactions du *CNRS*, d'*INRIA*, de la *Société Française de Statistique*, de la *Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles* et de la *Société Mathématique de France*, avec le soutien de *Cap'Maths* dans le cadre des Investissements d'avenir.

Modéliser les océans du globe

Le texte suivant est tiré d'une brève publiée sur le site [Un jour, une brève](#). Il a été rédigé par Sebastian Minjeaud (CNRS), Maëlle Nodet (Université de Grenoble), et Antoine Rousseau (Inria).

Il existe, sous la surface de nos océans, un immense réseau de courants marins, véritables tapis roulants des mers, qui transportent des masses d'eau absolument gigantesques. Ces courants à grande échelle, parmi lesquels figure le célèbre Gulf Stream, jouent un rôle primordial dans la dynamique des océans, et bien entendu dans l'équilibre thermodynamique de notre planète. Il est donc essentiel de pouvoir les comprendre afin d'anticiper d'éventuels déséquilibres qui pourraient advenir, par exemple, dans le cadre du réchauffement climatique.

Un processus physique élémentaire

Les processus physiques à l'origine de la complexité des courants marins sont nombreux : gravité, influence des vents, rotation de la Terre, attraction de la Lune, effets de bord, topographie des fonds marins, etc.

Néanmoins les mouvements des grandes masses d'eau à l'échelle de la planète s'expliquent par un processus élémentaire : sous l'effet de la gravité, des fluides de masses volumiques différentes se mettent spontanément en mouvement jusqu'à atteindre leur position d'équilibre, le plus lourd en dessous, le plus léger au dessus. Ce processus peut être illustré par une expérience reproductible par tous² (voir Figure 1) : deux bouteilles identiques remplies d'eau sont reliées par des pailles et pour les distinguer, l'eau contenue initialement dans la première bouteille est colorée en vert, celle de la seconde en rouge. Rien ne se passe si la température des deux liquides est identique, mais un mouvement s'amorce dès lors que les températures initiales diffèrent : par exemple, sur la Figure 1 il ne se passe rien si la température des deux liquides est identique, mais un mouvement s'amorce dès lors que les températures initiales ne sont pas identiques dans les deux bouteilles : l'eau rouge plus chaude et donc moins dense passe au-dessus de l'eau verte plus froide et donc plus lourde.

Un modèle mathématique simplifié

Bien que facile à réaliser, cette expérience est délicate à modéliser mathématiquement et à reproduire numériquement. L'évolution dans le temps des fluides visqueux (comme l'eau ou l'air) est décrite par le

Figure 1
Expérience des deux bouteilles :
l'eau rouge, plus légère que l'eau verte,
passe au-dessus.

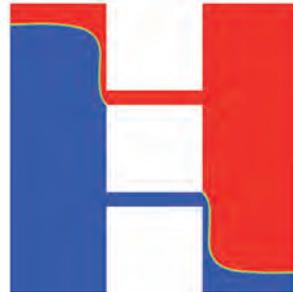
© Inria



modèle de Navier-Stokes : ce système d'équations repose sur les principes généraux de conservation de la dynamique des fluides (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie). Pour que ces équations aient une chance d'admettre une solution unique (il faut noter que malgré tous les efforts des mathématiciens, il n'existe toujours pas de démonstration de l'existence de solutions aux équations de Navier-Stokes dans un cadre général !), il faut ajouter à ce système une loi d'état qui précise, par exemple, le lien entre la masse volumique et la température d'un fluide. Ainsi, le modèle mathématique est très complexe et il est impossible d'en trouver une solution exacte explicite.

Figure 2
Simulation numérique
de l'expérience des deux bouteilles :
elle permet de reproduire
l'expérience

© S. Minjeaud



Il est par contre possible de le remplacer par un problème ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'inconnues qui décrivent de manière approchée mais fidèle la solution physique du problème. Ce problème *discret* peut alors être résolu à l'aide d'un algorithme adapté et mis en place sur un ou plusieurs ordinateurs. On obtient ainsi une réalisation virtuelle, Figure 2, d'un processus bien réel.

Vers des modèles océaniques réalistes

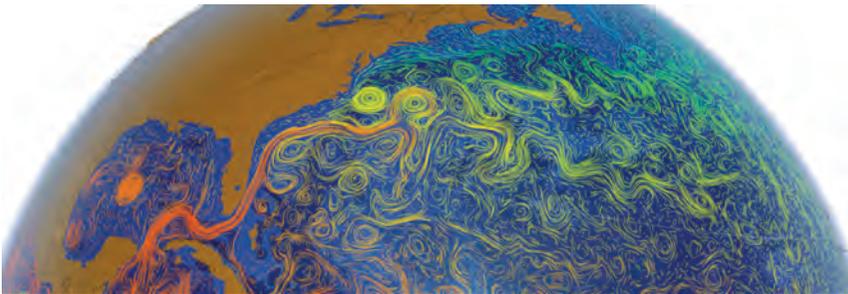
Le rôle essentiel de la masse volumique de l'eau comme moteur principal de la circulation océanique à grande échelle a été mis en évidence dans des bacs de laboratoire par un océanographe suédois, J. W. Sandström, en 1908. La masse volumique des eaux des océans varie pour deux raisons essentielles :

- les variations de température : plus la température augmente, plus la

masse volumique diminue.

- **les variations du degré de salinité** : plus l'eau de mer est chargée en sel, plus elle est dense. On peut s'en convaincre en prenant un litre d'eau dans une casserole, et en y ajoutant du sel. Le volume ne change pas mais la masse de l'eau salée est la somme de celle de l'eau et du sel ajouté (on peut dissoudre plus de 300 grammes de sel par litre à 25°C !). Par conséquent, la masse volumique augmente au fur et à mesure que l'on ajoute du sel.

Bien entendu, dans les océans du globe, les phénomènes sont plus complexes que dans les deux bouteilles de notre expérience. Chaque processus élémentaire, après avoir été validé grâce à des expériences ou des données, doit être intégré à un modèle global, très complexe, qui intègre l'ensemble de ces briques élémentaires. Ainsi, des scientifiques de la NASA, grâce à un modèle développé au Massachusetts Institute of Technology (MIT), ont récemment produit des images spectaculaires des grands courants marins de notre planète. On peut ainsi voir ci-dessous une *carte numérique* des courants qui parcourent l'océan Atlantique Nord, comprenant le célèbre Gulf Stream. Ces images, bien que splendides et relativement réalistes, sont pourtant encore imparfaites. Il faudrait ajouter encore bien d'autres processus physiques ou même chimiques pour simuler précisément les courants de notre planète. Pour cela, on aura encore besoin de bien des mathématicien(ne)s pour aider à concevoir et étudier les futurs modèles...



Simulation numérique des courants marins dans l'Atlantique Nord.

La couleur illustre la température à la surface de l'océan.

© nasa/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio.

S.M., M.N. et A.R.

Pour en savoir plus :

- 1 <http://www.mpt2013.fr>
- 2 <http://videotheque.inria.fr/videotheque/doc/792>