

# Les progressions en musique

Emmanuel Amiot



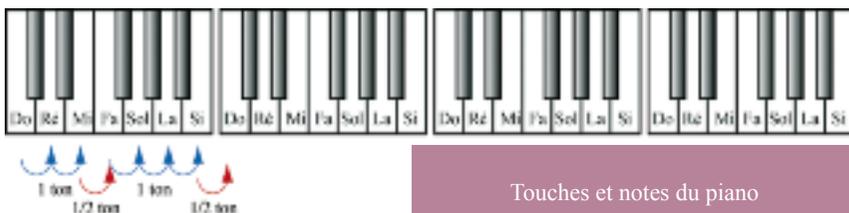
La musique est réputée avoir des rapports avec les mathématiques, au point que, pour certains, il semble naturel qu'un mathématicien soit musicien. Pourtant, au-delà de l'idée floue et simpliste que *la musique est nombre*, ces rapports sont parfois fins et subtils, voire cachés. Les chercheurs dans ce domaine sont d'ailleurs amenés à faire usage des ressources les plus ésotériques des mathématiques contemporaines.

## Les clefs de la beauté.

Nous allons voir comment une apparente irrégularité peut cacher une structure très régulière de façon élémentaire. Chaos apparent et symétries cachées ne sont-ils pas une des clefs de la beauté ? Dans bien des styles de musique, un court passage emprunte ses notes à une gamme, c'est à dire à un sous-ensemble spécifique de l'ensemble des notes possibles. La gamme la plus courante dans les musiques ouest-européennes, celles qu'on entend à la radio, est la *gamme majeure*. Son prototype est constitué par les touches blanches du piano.

Comme il s'agit de sept notes choisies parmi douze, sa répartition ne peut qu'être irrégulière. Plus précisément, les intervalles de *seconde*, c'est-à-dire entre deux notes consécutives, sont de deux espèces différentes, selon qu'il y a ou non une touche noire entre les deux touches blanches. L'intervalle entre deux notes consécutives s'appelle le demi-ton, il y a deux demi-tons dans le premier cas, un seul demi-ton dans le second.

## Cardinalité égale variété



Touches et notes du piano

Cette irrégularité des intervalles entre notes successives se lit bien quand on les compte : 2212221222122212221... La répétition de cette séquence 2212221 signifie que, quand la gamme est passée du do au do suivant, la séquence recommence à l'identique. La coutume est de représenter cela sur un diagramme circulaire.

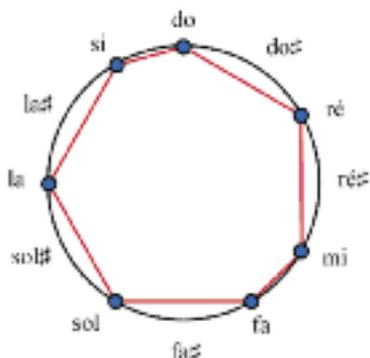
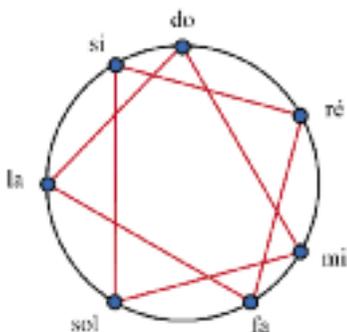


Diagramme de la gamme majeure.  
Si on note 0 le do (en haut) puis 1 le do#, etc. le si est noté 11.  
L'arithmétique sur ce cercle se fait comme sur une montre: 12 vaut 0, 13 vaut 1, etc. La gamme peut ainsi être notée 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11.

De manière surprenante, cette propriété se manifeste aussi pour les tierces, c'est à dire pour les intervalles de deux notes en deux notes.

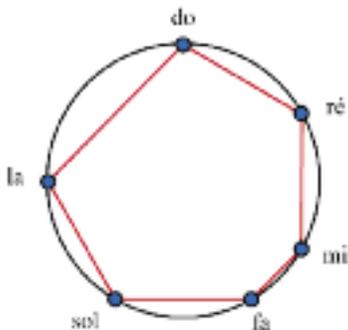
Diagramme des tierces.



Il en est de même pour les quartes, les quintes, etc.

Cette propriété a été nommée par les théoriciens *cardinal égale variété*. Elle est assez rare. Ainsi, la gamme hexatonique ne la vérifie pas, il y a trois sortes différentes de *secondes*. Dans d'autres gammes (comme *do do# ré ré# mi*), on a bien deux sortes de *secondes*, mais trois sortes de *tierces*.

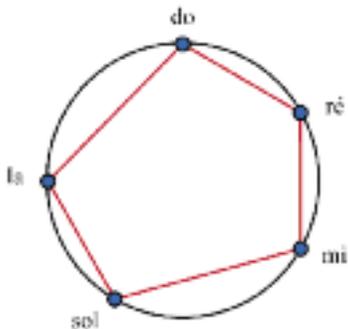
Gamme hexatonique :  
*do ré mi fa sol la.*  
Elle ne vérifie pas la propriété  
*cardinal = variété.*



### La gamme pentatonique

En revanche, la gamme pentatonique, souvent qualifiée de chinoise, mais omniprésente en blues, rock et de nombreux autres idiomes musicaux, vérifie les mêmes propriétés !

Gamme pentatonique  
*do ré mi sol la,*  
dite chinoise.



Un exemple de *tierces* dans la gamme pentatonique se trouve à la fin de *La Fille aux Cheveux de Lin* de Claude Debussy.



Tierces dans la gamme pentatonique sous la forme *réb mi<sup>b</sup> sol<sup>b</sup> la<sup>b</sup> do<sup>b</sup>*  
dans *La Fille aux cheveux de lin* (Prélude I) de Debussy, exemple emprunté  
à D. Tymockzo. Pour l'écouter, aller à l'adresse :  
<http://manu.amiot.free.fr/Musiques/LaFilleAuxChLin.mp3>

## Régularité de ces gammes

Je vais vous confier un secret de ces régularités inattendues... En fait la gamme majeure, comme la gamme pentatonique, sont *parfaitement régulières*. Reprenons en effet les numéros des notes de la gamme de do majeur (les touches blanches *do ré mi fa sol la si*) : 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 (voir la figure diagramme de la gamme majeure).

Compte tenu que l'on trouve la même note une octave plus haut, cela revient à compter de douze en douze ; cela fonctionne comme les heures d'une montre, on ne garde que le reste dans la réduction modulo 12. Ainsi la progression arithmétique de raison 7 : 5, 12, 19, 26, 33, 40, 47, (une séquence de quintes, pour les musiciens), donne avec cette règle : 5, 0, 7, 2, 5, 9, 11 soit les notes *fa do sol ré la mi si* (voir la figure *diagramme de la gamme majeure*). Il en est de même pour la gamme pentatonique, par exemple *mi la ré sol do* peut s'écrire 4 9 14 19 24 alias 4 9 2 7 0, ce qui donne bien *do ré mi sol la* permutés. Un diagramme respectant cet ordre met en évidence la régularité de ces deux gammes. Il en est de même de 0, 2, 4, 6, 8, 10 soit *do ré mi fa# sol# la#* dont la régularité est encore plus évidente : une gamme par tons, fréquemment utilisée par Debussy, Gershwin et d'autres.

On comprend mieux pourquoi cela donne une si petite variété de valeurs des intervalles : par exemple pour la gamme majeure, on voit bien que la plupart des notes consécutives sont distantes en fait de deux quintes, ce qui fait bien un intervalle de  $7 + 7 = 14$  qui se réduit à 2. Est-ce enfin la clef de ces mystérieuses symétries ?

Pas tout à fait... la *raison* de ces progressions arithmétiques doit être *liée* au *nombre de notes* de la séquence, 7 demi-tons pour la gamme à 7 notes, etc. Je vous laisse le plaisir d'expérimenter différents cas possibles pour conjecturer quelle doit être cette relation ! Notez que par exemple la gamme hexatonique mentionnée plus haut (*do ré mi fa sol la*, alias 0 2 4 5 7 9), est elle aussi une progression arithmétique (5 12 19 26 33 40 alias 5 0 7 2 9 4) mais ne vérifie pas la propriété *cardinal égal variété*.

Aussi, si on *transpose* la gamme majeure de son intervalle générateur 7, une seule note va changer dans l'ensemble, et changer de la distance la plus petite possible : *fa* devient *fa#* d'où : *fa do sol ré la mi si* donne *do sol ré la mi si fa#*.

## La clef

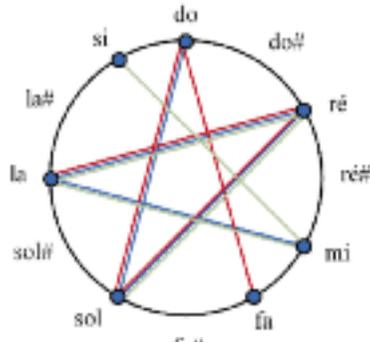
Ces transpositions à la quinte donnent la clef (le jeu de mot est intentionnel) des *armures* des portées musicales, où l'on trouve des séquences de dièses qui suivent précisément la progression de ces notes nouvelles.



Séquences de dièses à la clef...

Dans son *étude* n° 5 op 10, Frédéric Chopin joue d'une propriété remarquable : une gamme pentatonique, qui est une séquence de quarts (progression de raison 5), est aussi bien une séquence de quintes (raison 7 : en effet 7 est l'opposé de 5 puisque  $7 + 5 = 12$ , c'est la même séquence à l'envers !) : *mi la ré sol do* est l'ordre inverse de *do sol ré la mi*. Mais une progression plus longue de deux notes fournit, comme on l'a vu, une gamme majeure : on a donc un petit théorème, selon lequel toute gamme majeure contient trois gammes pentatoniques ! Chopin fait jouer la main droite sur les cinq touches noires (la même gamme pentatonique qu'utilisée par Debussy dans le prélude précédent), et la main gauche joue dans 2 des trois tonalités majeures qui la contiennent, de façon parfaitement harmonieuse donc !

En rouge, la gamme *fa do sol ré la*,  
 en bleu *do sol ré la mi*  
 et en vert *sol ré la mi si*.



On a vu combien des calculs élémentaires (addition et réduction modulo 12) permettent d'expliquer des phénomènes musicaux apparemment très compliqués.

La *déraisonnable efficacité des mathématiques* dont parle Eugène Wigner (1902 – 1995) ne se cantonne pas à la physique, elle opère aussi bien dans les arts et tout particulièrement dans la musique.

**E.A.**