La collection de modèles de l’Institut Henri Poincaré

François Apéry

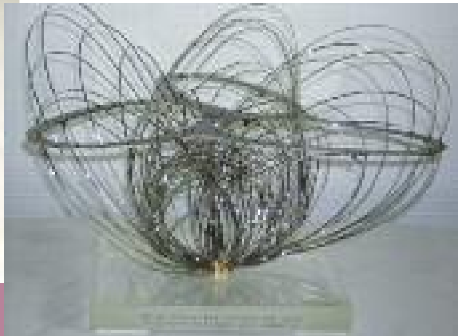
L’Institut Henri Poincaré (IHP) à Paris possède une remarquable collection d’objets mathématiques datant de la fin du XIX^{e} siècle ou du début du XX^{e}. Ils servaient alors à illustrer les cours de mathématiques.

Même si ce sont de pures abstractions, les objets mathématiques proviennent souvent d’intuitions concrètes, et donc peuvent conduire à des réalisations physiques qui jouissent de qualités plastiques dont les artistes peuvent s’emparer. Ceci explique le renouveau d’intérêt de certains musées pour ces objets, d’autant que des célébrités, comme le photographe Man Ray, s’y sont intéressés, leur donnant ainsi le statut d’œuvre d’art.

La collection de l’IHP a traversé un bon siècle de désamour avant d’entamer sa renaissance ces dernières années, et elle s’enrichit aujourd’hui de modèles nouveaux suggérés par les mathématiciens en action.

J’ai souhaité prêcher par l’exemple en proposant deux objets en fil de fer exposés actuellement dans la bibliothèque de l’IHP: une surface de Boy du sixième degré et une surface de Morin du huitième degré, surfaces liées au problème du retournement de la sphère.

Surface de Boy en bouquet d’ellipses



Surface de Morin en bouquet d’ellipses.

La collection complète de l'IHP comprend quatre cent cinquante modèles environ, dont voici quelques exemples.

Cyclide unilatère

Ce modèle a été réalisé en juillet 1947 par Maurice El-Milick et offert à Paul Belgodère, bibliothécaire de l'IHP.

Surface de sixième degré

Notons qu'il ne s'agit pas réellement d'une cyclide, mais d'une surface du sixième degré dont l'allure rappelle la cyclide de Dupin (voir figure ci-dessous).

Véritable cyclide de Dupin

La bouteille de Klein

Nous ne présenterons pas ici la bouteille de Klein puisqu'elle est décrite dans l'article sur le graveur Patrice Jeener, mais l'IHP en possède une intéressante représentation en verre, clin d'œil sur ce nom de *bouteille* qui vient, selon certains, d'une confusion entre les deux mots allemands *Flasche* et *Fläche*.

Bouteille de Klein en verre.

Le grand dodécaèdre de Poinsot

Un modèle en carton recouvert d'un vernis représente le grand dodécaèdre découvert par Louis Poinsot en 1809. Les arêtes du polyèdre sont en noir. Les lignes rouges sont des lignes d'intersection de faces. Il a douze faces, douze sommets et trente arêtes, de sorte que sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut -6.

Le grand dodécaèdre de Poinsot représente une décomposition cellulaire de la surface fermée de genre 4.

Grand dodécaèdre de Poinsot.
Cette phototographie peut créer une illusion d'optique : l'étoile doit être vue en bosse

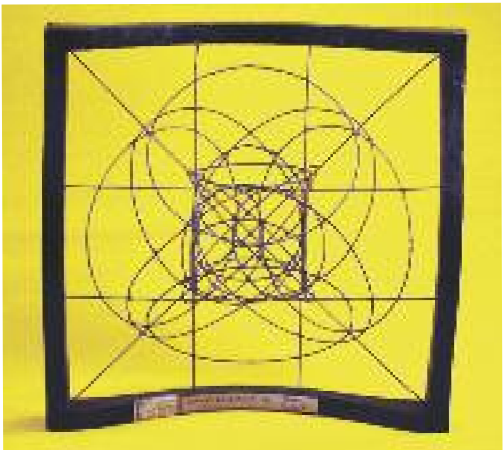
Cubique lisse à sept droites réelles

On ne voit sur ce modèle de surface réalisé en fil de fer par Joseph Caron le 10 juin 1912, que quelques courbes remarquables.

La surface, d'équation :

$$Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2(X^2 - Y^2) - 16Z = 0$$

est une *cubique lisse*, autrement dit sans points singuliers.



Cubique lisse à sept droites réelles.

Ludwig Schläfli avait imaginé en 1858 de classer ces surfaces suivant le nombre de leurs droites réelles, lequel, dès lors que la surface n'est pas réglée, ne peut prendre que les valeurs 3, 7, 15 et 27. Dans le cas présent, la surface contient sept droites réelles, dont six sont représentées, la septième étant à l'infini. La surface est en outre engendrée par des ellipses. Certaines d'entre elles sont des cercles qui sont figurés sur le modèle. Le choix des courbes matérialisées par le fil de fer respecte l'invariance par le groupe des isométries laissant la surface globalement inchangée.

Quoique d'allure très proche, cette surface cubique ne doit pas être confondue avec la *cyclide parabolique annulaire* d'équation :

$$Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + 4(X^2 - Y^2) - 16Z = 0.$$

Cette dernière possède en effet deux droites doubles. Chacune des deux surfaces sépare l'espace en deux parties isométriques qui sont échangées par le demi-tour d'axe $X = Y$ et $Z = 0$.

Cyclide parabolique annulaire,
série X n° 5 de la collection Schilling

Modèle de Dandelin

Le but didactique du modèle de Dandelin saute aux yeux. Sur un cône en bois séparé en deux parties pour laisser apparaître deux sphères inscrites, également en bois, on observe d'une part une génératrice en laiton, et d'autre part une ellipse métallique dont le plan est tangent aux deux sphères. Les points de contact avec les sphères matérialisent les foyers de l'ellipse (première partie du théorème de Dandelin), tandis que les cercles de contact des sphères avec le cône définissent des plans qui recoupent celui de l'ellipse suivant ses directrices (deuxième partie du théorème de Dandelin).

Modèle de Dandelin

Le Gömböc

La dernière acquisition de l'IHP est le Gömböc, construit en 2006 pour prouver l'existence d'un corps homogène mono-monostatique, conjecturée auparavant par Vladimir Arnold. Cet objet en aluminium a exactement une position d'équilibre stable et une instable. En dimension deux, un ensemble convexe compact posé sur une droite jouit d'au moins quatre positions d'équilibre statique. La situation diffère en dimension trois, puisque, comme l'avait pensé Arnold, il existe des corps convexes compacts et homogènes admettant seulement deux positions d'équilibre, en comptant les positions stables comme les instables.

Gömboc

Cédric Villani présente le Gömboc sur le Salon Culture et Jeux Mathématiques

Cet exemple a été découvert par un ingénieur et un mathématicien appliqué, Gàbor Domokos et Peter Vàrkonyi, en partant d'un modèle physique qu'ils ont graduellement travaillé en une suite d'approximations jusqu'à l'objet final, le Gömböc, dont ils ont ensuite prouvé, au sens mathématique du terme, l'exactitude.

Voilà un bel exemple de ce que les modèles géométriques peuvent apporter aux mathématiciens.

F.A.

Pour en savoir (un peu) plus :

F. Apéry, *Models of the real projective plane*, Vieweg, Braunschweig, (1987).

F. Apéry, *Immersionen der reellen projektiven Ebene in R^3*, Mathematische Semesterberichte, n°591, 2011.

J. Brette, *La collection de modèles mathématiques de la bibliothèque de l'IHP*, Gazette des mathématiciens, n°85, juillet (2000), p.4-8.

G. Fischer Ed, *Mathematische Modelle*, Vieweg, Braunschweig, (1986).