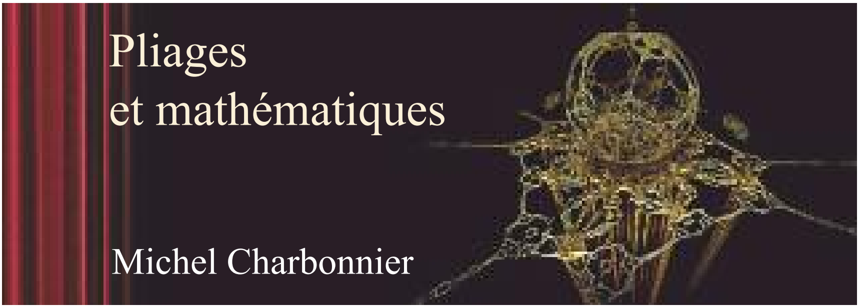


Pliages et mathématiques

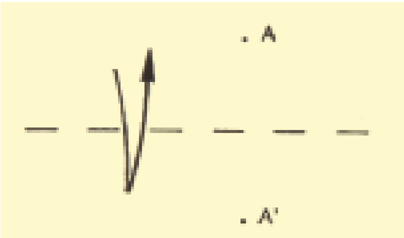
Michel Charbonnier

L'origami est un art traditionnel japonais, qui consiste à réaliser un objet à partir d'une simple feuille de papier uniquement par pliage, sans couper la feuille. Si de nombreuses figures représentent des animaux, des fleurs ou des boîtes, on peut tout faire en origami. A l'instar de notre *cocotte en papier*, cet art a longtemps été destiné aux enfants. Il est pour les enfants, non seulement une simple distraction, mais aussi comme un moyen d'expression et d'apprentissage de la géométrie. Jacques Justin ancien président du Mouvement Français des Plieurs de Papier, dit : *Plier le papier pour faire de la géométrie, cela ne date pas d'aujourd'hui.* Dans un intéressant historique, Vacca signale que le Révérend Dyonisus Lardner a écrit en 1840 un traité de géométrie où il fait appel au pliage. Plus tard, à la suite des expériences de Froebell, le pliage est introduit en 1882 dans l'enseignement élémentaire, notamment en France pour initier les enfants au calcul et à la géométrie.

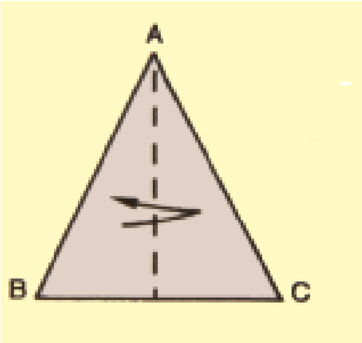
Axiome du pliage

Si nous voulons aborder les choses d'un point de vue plus moderne, nous dirons qu'en matière de géométrie plane tout se ramène à ce que Choquet appelle l'*axiome du pliage*. Le voici tel qu'il était énoncé dans *Mathématiques, classe de 4ème* de Rouquairol, édité par Nathan :

Etant donnée une droite D du plan P, il existe une bijection unique s de P vers P possédant les propriétés suivantes : 1) la bijection s conserve les distances ; 2) tout point de D est invariant par s ; 3) les demi plans ouverts P1 et P2 définis par D sont échangés par s. Cette bijection est appelée symétrie axiale d'axe D.



Construction du symétrique d'un point par pliage

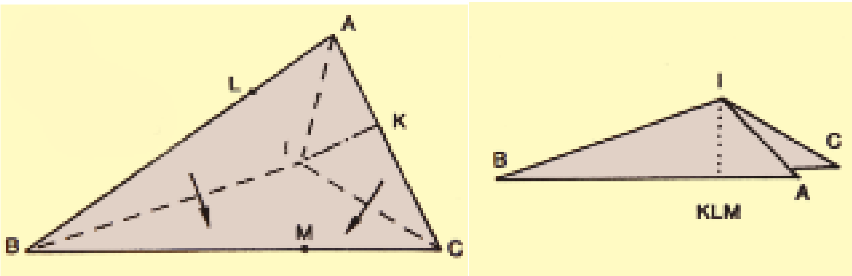


Propriété du triangle isocèle :
un triangle qui a deux cotés égaux a deux angles égaux.

Actuellement, la manipulation que nous venons de faire sert surtout à motiver pédagogiquement l'axiome du pliage. Mais l'inverse peut aussi se faire : démontrer en s'aidant du pliage.

Prenons par exemple un triangle ABC dont les cotés AB et AC sont égaux, le pliage selon la bissectrice de l'angle A amène C en B, fait coïncider les cotés BA et CA, on en déduit que les angles B et C du triangle sont égaux.

Les choses deviennent plus intéressantes si l'on effectue plusieurs plis. Faire plusieurs plis revient à effectuer ce qu'on appelle en mathématiques la composition des symétries associées à ces plis. Le pliage en *oreille de lapin* permet par exemple de montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.



On plie le triangle ABC selon les bissectrices BI et CI de B et de C et selon la ligne AI. Il se forme un troisième pli IK. Le pliage montre que AI est la bissectrice de A, et que les trois bissectrices sont concourantes.
En étudiant les trois points K, L, M qui coïncident après pliage, on peut même montrer que ce sont les points de contact du cercle inscrit.

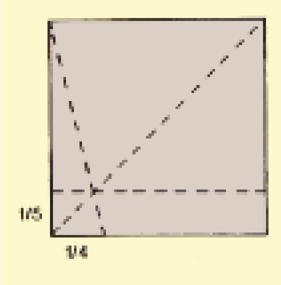
Dans certains ouvrages on peut trouver la «démonstration» par le pliage de théorèmes plus compliqués comme celui dû à Poncelet (général de Napoléon et l'un des pères de la géométrie moderne), ainsi qu'une propriété qui fait appel au pli de *pétale* (c'est-à-dire à la combinaison de deux oreilles de lapin). L'avantage du pliage est qu'il rend évident des résultats qui sont moins faciles à obtenir en raisonnant directement sur les symétries.

Le pliage présente un autre intérêt en géométrie : il est plus facile de tracer une droite, une bissectrice, une médiatrice par pliage qu'avec une règle et un compas. On peut ainsi sans trop de peine obtenir des figures précises mais il faut se méfier et savoir distinguer ce qui est démonstration de ce qui est simple constatation. Les démonstrations, comme celles dont nous avons parlé plus haut sont de véritables raisonnements qui entraînent la conviction, une fois acceptées les propriétés fondamentales du pliage. Par contre, en construisant par pliage les trois hauteurs d'un triangle, on «constate» simplement qu'elles passent par un même point.

Diviser un segment par pliage

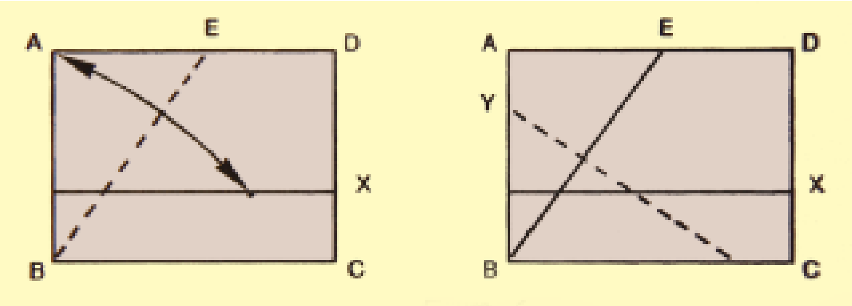
Diviser un segment de droite en 2, 4, 8… parties égales par pliage, tout le monde sait le faire. Mais, comment diviser dans un autre rapport, en 5 ou 7 par exemple ? Il y a bien une méthode par itération qui est approximative et qui a l'inconvénient d'abîmer le papier.

On peut faire mieux et obtenir une solution exacte basée sur le théorème de Thalès.



Division du côté d'un carré en 5 parties égales dans une brochure de La British Origami Society.

Voici deux exemples d'une division de segment, l'une en 3/8 l'autre en 3/11.



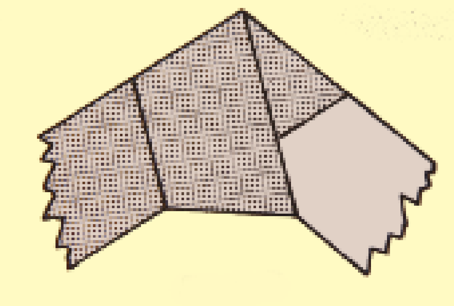
Une très belle méthode due à Fijimoto permet de passer d'une division en CX/CD = m/n en une division en AY/AB = m/(m+n).

Par exemple, si X se trouve aux trois huitièmes sur CD, et si on fait les trois plis indiqués Y sera aux trois onzièmes sur AB.

Construire des polygones réguliers

Il existe des méthodes de construction exactes pour le triangle, l'hexagone et l'octogone réguliers en partant d'un carré mais aussi des méthodes exactes pour le pentagone, même si elles sont plus compliquées.

Voici un pliage, dit du noeud d'or, qui permet d'obtenir un pentagone.



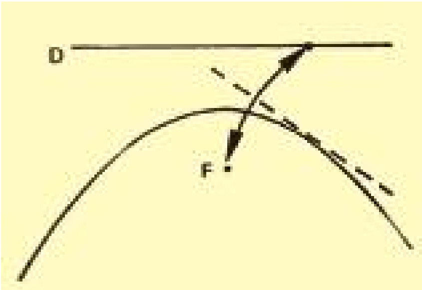
Le nœud d'or
Faisons un nœud avec une bande de papier assez longue et aplatissons- le. On obtient un magnifique pentagone. Est il régulier ? Si le papier est translucide et qu'on regarde par transparence on voit apparaître une étoile à 5 branches (il faut plier le papier une fois de plus pour voir l'étoile complète).

Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'on peut de la même façon, avec un nœud plus compliqué, faire n'importe quel polygone régulier ayant un nombre impair de côtés ; par exemple un heptagone (la manipulation n'est pas très facile, il faut un papier très glissant, ayant juste la bonne souplesse). Et pourtant, l'heptagone régulier ne peut pas se construire avec la règle et le compas. Paradoxe !
La clé du mystère, l'explication du paradoxe, c'est que quand on plie, on ne fait pas que de la géométrie plane, mais on manipule le papier dans l'espace en respectant la propriété topologique qu'il ne peut pas se traverser lui-même.En d'autres termes on peut dire que quand on plie l'heptagone régulier au moyen d'un nœud, on utilise le papier un peu comme un mécanisme.

Construire des courbes par pliage

En pliant on peut obtenir les tangentes d'une courbe non tracée et on voit apparaître ce que les mathématiciens appellent *enveloppe* de la courbe (en fait ce sont plutôt les plis qui enveloppent la coube).

Si au lieu d'une droite D pour obtenir une parabole, on avait tracé un cercle, on aurait obtenu de la même façon une ellipse ou une hyperbole selon que F soit à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.

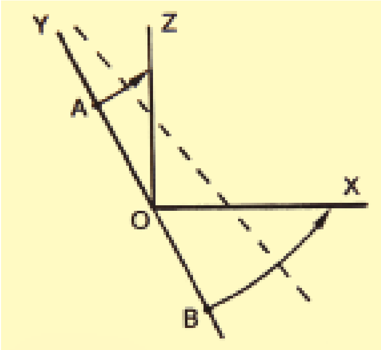


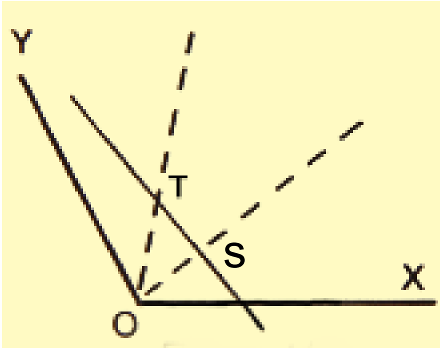
la Parabole
Sur un papier, marquez une droite D et un point F. Amenez par pliage le point F sur la droite D. Dépliez et répétez un grand nombre de fois, en variant la position sur D, vous verrez apparaître une superbe parabole.

Trisection d'un angle par pliage

Il est impossible de diviser un angle en trois parties égales avec la règle et le compas :

Comment faire avec un pliage ?





Soit XOY l'angle à diviser en trois. Choisissons un point A sur OY et marquons son symétrique B par rapport à O. Marquons OZ perpendiculaire à OX. Amenons simultanément A sur OZ et B sur OX. On obtient un pli. Traçons, la perpendiculaire à ce pli passant par O, soit OS, puis la bissectrice OT de SOY. Les droites OS et OT divisent l'angle XOY en trois parties égales.

En conclusion

Aujourd'hui, connu dans le monde entier, l'origami intéresse et fascine petits et grands. Cette mondialisation a produit la grande diversité des modèles actuels. Si la majorité des plieurs perpétuent la tradition en utilisant un carré de papier, d'autres préfèrent utiliser le format A4 (rectangulaire), que l'on trouve partout. Certains spécialistes créent leurs propres modèles, qui peuvent atteindre un très haut degré de complexité. L'art du pliage et l'art mathématiques sont totalement indissociables.

M.C.

Pour en savoir (un peu) plus :

C. Savineau, *Pliage et découpage du papier, travaux manuels scolaires,* Hachette, Paris (1897), Bibliothèque Nationale, cote 8° V26762.

G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie,* Hermann, Paris (1964).

P. Tougne, *Jeux mathématiques*, Pour la Science, (février 1983), 113-119.

S.Fujimoto et **M.Nishiwaki**, *Sojo Suru Origami Asobi no Shotai* (jouez à créer en pliant), Asahi Culture Centre, Osaka (1982).

E. Lucas, *Récréations Mathématiques*, tome 2. Nouveau triage, Librairie Sciences et Tech. A. Blanchard, Paris (1979).

J. Justin, *Démonstration par le pliage des théorèmes de Poncelet sur les tangentes* aux coniques, manuscrit (1982). Orithèque MFPP et BOS Library.