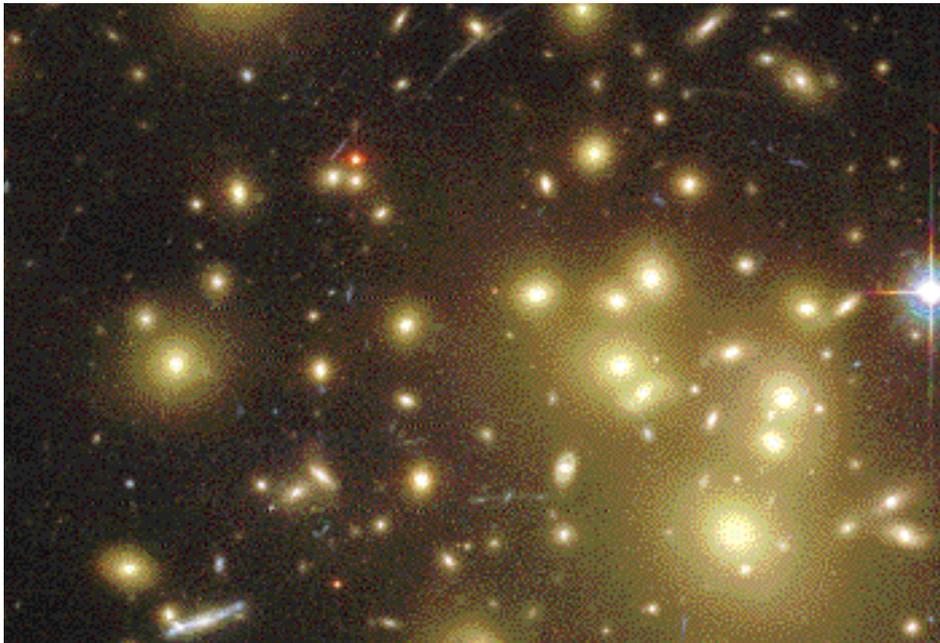




Les mathématiques s'invitent pratiquement toujours dans nos réflexions sur les tout premiers instants de l'Univers. Pour décrire l'Univers dans son ensemble, c'est la théorie de la relativité générale d'Einstein qu'il faut utiliser pour nous indiquer comment la gravitation agit. C'est donc une vision géométrique tout d'abord, l'espace-temps étant décrit par un espace riemannien, c'est-à-dire courbe, à la manière d'une sphère, mais quadri-dimensionnel, le temps étant compris comme une dimension. Les calculs se font dans le cadre de la géométrie différentielle qui n'est autre que la théorie mathématique permettant de décrire la structure locale des espaces courbes. On s'intéresse aussi, et c'est plus récent, à la structure globale de l'espace : dans ce cas, c'est la topologie qu'il faut étudier. Le quotidien d'un cosmologiste consiste à résoudre, souvent à l'aide de méthodes numériques, des équations différentielles.



Effet de lentille gravitationnelle dans l'amas galactique Abell
Nasa ESA

Certaines propriétés de l'Univers primordial (ou récent) pourraient être des conséquences de sa structure à grande échelle. Il faut alors intégrer sur l'espace avoisinant et/ou les temps précédents pour comprendre ce qu'on observe maintenant. De plus, la cosmologie primordiale s'occupe d'une période de l'Univers pour laquelle les interactions entre les particules avaient lieu à des énergies considérables, le microscopique produisant un effet sur le macroscopique. Par conséquent, ce sont aussi les lois de la physique quantique, avec ses espaces de Hilbert et autres opérateurs conduisant à des calculs non commutatifs. Enfin, que ce soit la théorie des supercordes ou celle de la grande unification, c'est aussi la théorie des groupes qui joue un rôle majeur. D'autres structures mathématiques encore moins intuitives sont utilisées fréquemment : la cosmologie est devenue une science complexe nécessitant un recours constant à des mathématiques très avancées.

La théorie des cordes en cosmologie.

La théorie des cordes est basée sur l'idée, simple au départ, suivant laquelle les particules élémentaires ne sont pas réellement des particules, mais plutôt des petites cordes, si petites qu'on a l'impression qu'elles sont ponctuelles.

L'expansion de l'Univers nous révèle que celui-ci était, dans le passé, beaucoup plus petit qu'il ne l'est actuellement. Tellement petit, en fait, qu'il y a environ treize milliards d'années de ça, la taille des cordes n'était pas négligeable. Et ça change tout. Par exemple, si la matière est constituée de particules ponctuelles, alors ces particules peuvent tout à fait se mettre toutes au même endroit : l'Univers aurait alors eu toute sa matière concentrée en un seul point. C'est une singularité. Dès lors qu'il s'agit de cordes, la situation est très différente, puisqu'il faut nécessairement un volume fini pour les contenir, même en les entassant au maximum. Bref, si la théorie des cordes dit vrai, on peut comprendre ce qui se passe au moment du Big-Bang, qui n'est alors plus singulier, mais une simple étape dans l'histoire de l'Univers.

Il y a beaucoup plus que cela à apprendre de ces cordes. Par exemple, grâce à elles, il est possible de décrire de façon cohérente comment la gravitation devient quantique. Et pour ce faire, il faut que notre espace-temps ait un nombre déterminé de dimensions. On s'est longtemps interrogé sur la question de savoir pourquoi nous vivons dans un espace à trois dimensions, et c'est la première fois dans l'histoire de l'humanité qu'une réponse possible est proposée qui soit basée sur une idée scientifique ! Malheureusement, cette réponse n'est pas très satisfaisante : l'espace-temps de la théorie des cordes a une dizaine de dimensions.

Examinons deux cas concrets de ce recours absolument nécessaire aux mathématiques en cosmologie primordiale : les *dimensions supplémentaires* et les *défauts topologiques*.

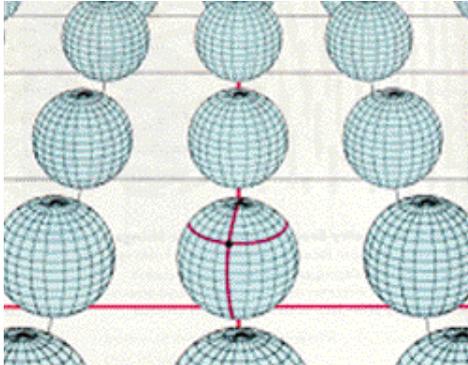


Figure 1: Associer un espace compact bi-dimensionnel tel qu'une sphère en chaque point d'un plan permet de former un espace à 4 dimensions. La théorie des cordes associe de même un espace à 6 dimensions en chaque point de notre espace-temps.

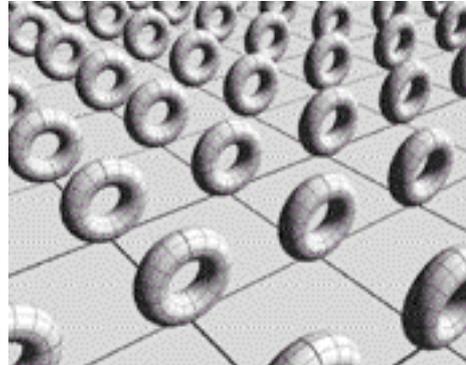


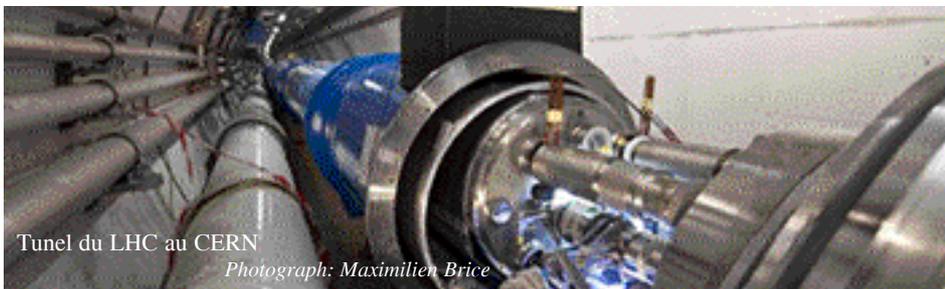
Figure 2: Si le plan est donné, l'espace "interne" à 2 dimensions peut avoir une topologie différente de la sphère, ici le tore. En théorie des cordes, les espaces ayant 6 dimensions et satisfaisant les conditions voulues sont au moins au nombre de 10^{500} .

Dimensions supplémentaires.

Il existe deux manières de repasser de dix à quatre dimensions. La plus facile consiste à supposer que les six dimensions supplémentaires sont, comme les cordes elles-mêmes, trop petites pour être visibles. Pour cela, il faut supposer que ces dimensions forment un espace compact (Figure 1), et dans ce cas, il faut encore savoir lequel, car des espaces compacts à six dimensions, il y en a beaucoup (Figure 2). Une autre option repose sur l'idée que nous n'avons pas forcément accès à tout l'Univers.

De même qu'une fourmi collée au sol ne perçoit pas la troisième dimension, nous pouvons être collés à un objet dynamique de trois dimensions, dont nous ne pouvons pas nous échapper, de sorte que nous ne percevons pas les dimensions supplémentaires.

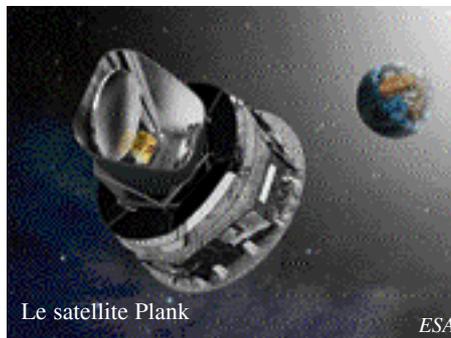
S'il existe plus de quatre dimensions, il doit être possible de les voir. Certains espèrent qu'elles ne sont pas si petites que ça et qu'il sera alors possible que leurs effets se fassent sentir dans les expériences dans les accélérateurs de particules, en particulier le LHC.



Tunnel du LHC au CERN

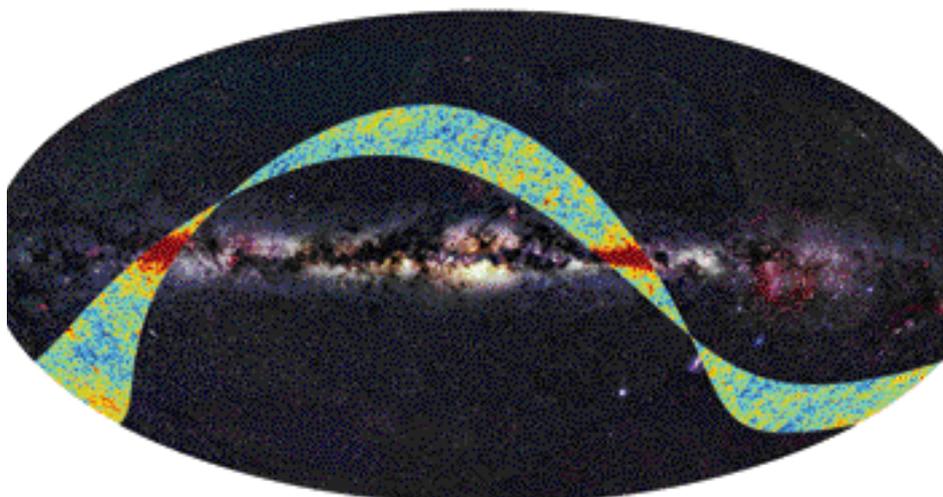
Photograph: Maximilien Brice

D'autres envisagent les conséquences au moment du Big-Bang, comme par exemple la manière dont a pu se dérouler une phase d'inflation, c'est-à-dire d'expansion accélérée nécessaire pour résoudre certains problèmes qui sinon peuvent se poser en cosmologie standard. Dans ce dernier cas, ce sont les données fournies par des observations cosmologiques qu'il faudra étudier de près ; par exemple, celles du satellite Planck qui fournira, en 2012, l'image la plus complète du ciel tel qu'il était très peu de temps après le Big-Bang : on pense que cette image contient une grande quantité d'informations relatives aux tout premiers instants, et peut donc peut-être nous apporter des informations cruciales sur les théories valables à des énergies trop élevées pour être directement accessibles.



Le satellite Planck

ESA



Premiers relevés du satellite Planck sur une petite partie du ciel.

L'image du fond diffus cosmologique est superposée à une image de la Voie Lactée en lumière visible. Les couleurs correspondent à d'infimes variations de température : rouge pour les zones plus chaudes, vert pour les températures moyennes et bleu pour les zones plus froides.

ESA

Défauts topologiques.

L'histoire de l'Univers est celle d'un refroidissement. Lorsque l'eau gèle, elle passe d'un état très symétrique, isotrope (on voit la même chose dans toutes les directions) à un état de cristal moins symétrique (on ne voit les mêmes choses

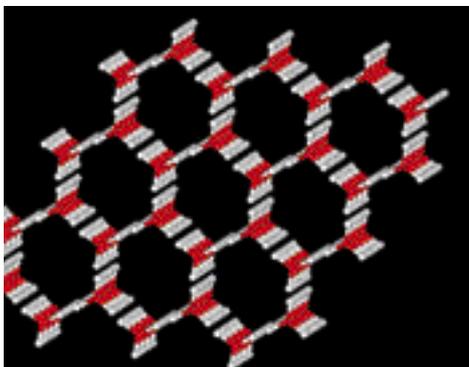


Figure 3: Le cristal de glace avec sa structure hexagonale fait apparaître des lignes et plans de symétrie. C'est un niveau de symétrie bien moindre que celui de l'eau liquide pour laquelle, les molécules n'ayant pas de localisation privilégiée, montrent une image dont les propriétés sont identiques dans toutes les directions.

que suivant des axes privilégiés (Figure 3). De la même manière, lorsque la température décroît au cours de l'expansion, des symétries internes se défont au cours de transitions de phases, à cette différence près que c'est la structure du vide qui change. Et comme dans la glace, des défauts peuvent apparaître, qualifiés de topologiques.

Ces objets sont stables, et quoique produits dans les tous premiers instants de l'Univers, ils devraient encore être visibles maintenant (Figure 4), peut-être dans les futures observations astronomiques : on pourrait voir se refléter dans le ciel des conséquences encore bien actuelles d'une physique qui ne peut se manifester qu'à des énergies telles qu'elles n'ont été mises en jeu que dans les premières fractions de secondes après le Big-Bang ! C'est probablement notre seul espoir d'atteindre de telles énergies.

P.P.

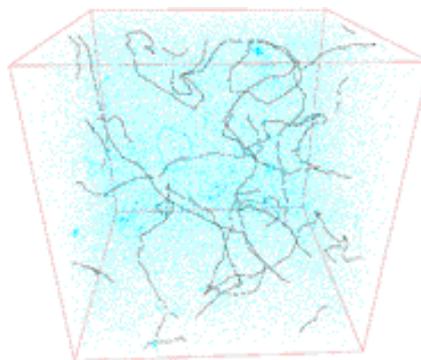


Figure 4: Réseau de défauts topologiques linéaires ("cordes cosmiques") produits à la première transition après le Big-Bang. La boîte représente tout le volume observable de notre Univers maintenant, les fils noirs étant ceux qui traversent la boîte, les bleus étant des boucles entièrement contenues dedans. D'une masse de 10^{17} tonnes par centimètre, ils se baladeraient dans l'Univers à une vitesse proche de celle de la lumière !
[Simulation numérique réalisée par C. Ringeval (Louvain) et F. Bouchet (IAP).]

Pour en savoir (un peu) plus

P. Peter et J.-P. Uzan, *Cosmologie Primordiale*, Belin;
P. Peter et A. Gangui, *Des défauts dans l'Univers*, CNRS Éd.;
R. Lehoucq, *L'Univers a-t-il une forme*, Flammarion