



Les neurosciences et les fondements de la géométrie.

Pour les neurosciences, il s'agit de déterminer si certaines formes de mathématiques sont implémentées dans le cerveau. Ce qui rejoint parfois les interrogations des mathématiciens sur leur discipline.

Henri Poincaré, réfléchissant sur les fondements de la géométrie, dit dans son ouvrage *La Science et l'Hypothèse* : "... localiser un objet en un point quelconque signifie se représenter les mouvements qui seraient nécessaires pour l'atteindre, c'est-à-dire les sensations musculaires qui les accompagnent ".

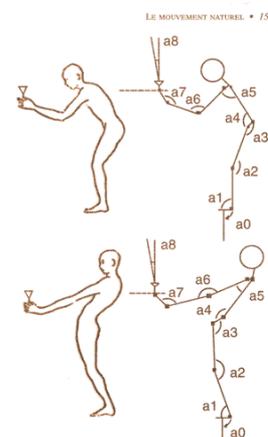
Albert Einstein approuve : " Poincaré a raison : l'erreur fatale qu'une nécessité mentale précédant toute expérience est à la base de la géométrie euclidienne est due au fait que la base empirique sur laquelle repose la construction axiomatique de la géométrie euclidienne fut oubliée. La géométrie doit être considérée comme une science physique, dont l'utilité doit être jugée par sa relation avec l'expérience sensible. "

Ces deux grands mathématiciens ont donc considéré que les fondements de la géométrie ne sont pas dans une axiomatique abstraite mais dans ce qui constitue le cœur de l'action humaine, le mouvement.

J'ai consacré au Collège de France, il y a quelques années, un cours sur les fondements cognitifs et moteurs de la géométrie, sujet qui a aussi fait l'objet d'un séminaire organisé à l'Ecole Normale Supérieure¹. Aujourd'hui nous travaillons sur le problème des géométries qui sous tendent la génération de trajectoires de la main et de trajets locomoteurs. C'est ce problème que je prendrai comme exemple de la façon dont nous travaillons avec des mathématiciens.

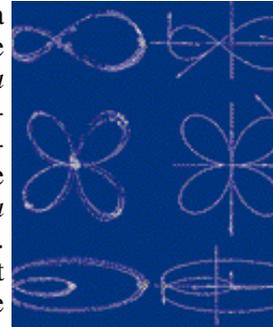
Les trajectoires de la main.

On a montré que, lorsqu'on trace une ellipse dans un plan avec son doigt, la vitesse tangentielle du doigt le long de sa trajectoire est linéairement liée -en coor-



Modélisation de postures par l'étude des angles reliant les segments d'un corps.
ext. *Le sens du mouvement*
A. Berthoz

données logarithmiques- à la courbure de l'ellipse. La vitesse du doigt est d'autant plus grande que la courbure est faible. Cette loi, qui reçoit le nom de *relation de la puissance un tiers*, est vraie pour de nombreux mouvements naturels. Elle influence la perception, car un observateur ne considèrera que le doigt se meut à vitesse constante que si son mouvement obéit à la *relation de la puissance un tiers*, et se déplace donc à vitesse variable. Des mathématiciens ont supposé que cette loi consistait en une minimisation de la secousse. Déplacer sa main ne supposerait pas de se représenter mentalement auparavant sa trajectoire ; il suffirait, d'après cette théorie de considérer le point de départ et le point d'arrivée et d'appliquer une loi de minimisation de la secousse pour obtenir la trajectoire observée. Nous avons aussi généralisé cette loi à des mouvements tridimensionnels où intervient la torsion².

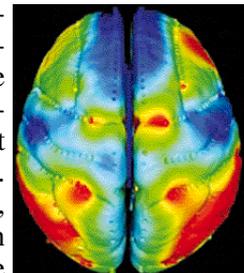


Tracés de dessin et modélisation basés sur la *relation de la puissance un tiers*

Nous avons cherché à déterminer si cette *relation de la puissance un tiers* était vérifiée pour des mouvements aussi complexes que celui de la locomotion. Nous avons enregistré la trajectoire de la tête de sujets décrivant, en marchant, une trajectoire elliptique, et nous avons constaté que ce mouvement obéissait aussi à cette relation. Si on remplace l'ellipse par un limaçon ou d'autres courbes, on observe que la relation linéaire entre la vitesse tangentielle et la courbure de la trajectoire est conservée. Cependant, le coefficient de proportionnalité n'est pas identique à celui de la *relation de la puissance un tiers*. Cette variation de coefficient entre différentes lois pourrait être le signe que celles-ci s'inscrivent dans une théorie mathématique plus générale.

Les géométries du cerveau.

Nous avons donc interrogé des mathématiciens, parmi lesquels le géomètre Daniel Bennequin et la mathématicienne Tamar Flash. Nous avons examiné ensemble l'idée que le cerveau utilise, non la géométrie euclidienne, mais une combinaison des géométries euclidienne, affine et équi-affine. Cette idée a été proposée voici quelques années par Pollick et par le physicien Koenderick pour la vision et par Faugeras pour l'analyse d'images. Si le cerveau combine trois géométries, il se peut qu'il y ait une théorie générale qui permette de le comprendre. Il faut aussi déterminer si les trois géométries sont implémentées dans des zones distinctes du cerveau. Rappelons que voici quelques années, nous avons montré, grâce à l'imagerie par résonance magnétique, que saisir un objet proche et se représenter une zone plus éloignée de l'espace étaient deux manipulations mentales impliquant des réseaux de neurones différents.

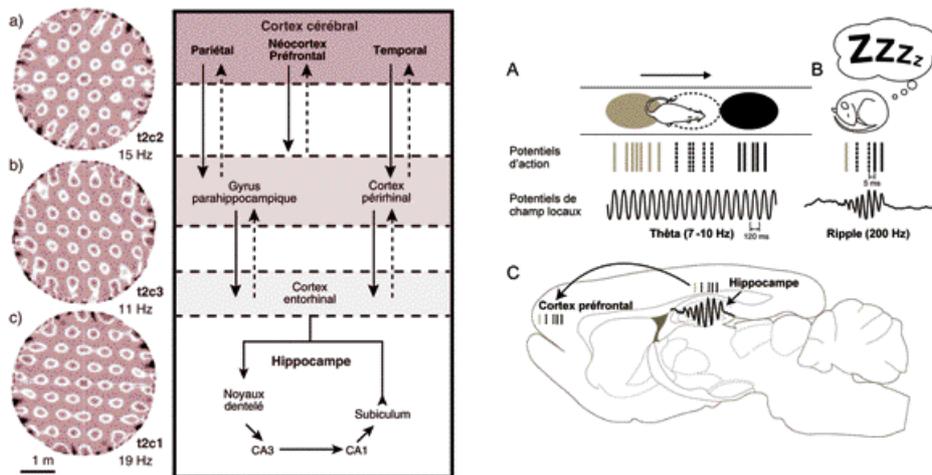


Etude du cerveau
INRIA

On voit ici comment hypothèses neurophysiologiques et théories mathématiques peuvent dialoguer.

La perception de l'espace.

Des problèmes semblables concernant les bases neurales de notre perception de l'espace sont en cours de formulation. On sait depuis fort longtemps que des neurones de l'hippocampe codent pour certains le lieu, et pour d'autres la direction. Voici une dizaine d'années, on a également découvert que des neurones du cortex entorhinal du rat déchargent lorsque celui-ci se trouve sur les points d'un réseau formé de triangles équilatéraux. Cette représentation de l'espace pourrait résulter de phénomènes d'interférence un peu comme en optique. En effet, notre cerveau est essentiellement constitué d'oscillateurs couplés et si, deux oscillateurs convergent vers les dendrites des neurones du cortex entorhinal avec des fréquences différentes, une interférence peut se produire.



A gauche la figure illustre la remarquable régularité de l'activité de neurones dits *de grille* dans le cortex entorhinal. A droite le schéma indique la place stratégique du cortex entorhinal dans les circuits qui relient les aires de traitement de l'information qui lient les aires de traitement de l'information avec les aires de la formation hippocampique.

d'après A.Berthoz "La simplicité"

O. Jacob 2009

Il faut dormir pour mémoriser. Pendant l'exploration (A), le rat traverse successivement les champs d'activation des neurones de *lieu* de l'hippocampe. Pendant son sommeil (B), le rat mémorise l'information de l'exploration qui lui est restituée, compressée, comme dans les télécommunications modernes.

d'après A.Berthoz "La simplicité"

O. Jacob 2009

De nombreux problèmes se situent donc à la frontière des neurosciences et des mathématiques et on pourrait en fournir de nombreux exemples. Citons en particulier, les théories de la *contractance* élaborées par Jean-Jacques Slotine de MIT, qui permettraient, si cette propriété est implémentée dans le cerveau, de faire travailler ensemble les milliers de boucles dont notre cerveau est constitué. Nous avons récemment étudié la possibilité que cette propriété soit présente dans des circuits qui contrôlent les mouvements des yeux.

Physiologie et mathématiques.

L'interaction de la physiologie et des mathématiques est nécessaire. En particulier parce que, dans l'étude de l'évolution des organismes vivants, des principes simplificateurs ont été trouvés pour mieux comprendre les processus de perception et d'action. Ces processus ne sont ni simples ni complexes. J'ai proposé de les désigner comme *simplexes* et je m'en suis expliqué dans un livre.

Malheureusement, les physiologistes comprennent peu les mathématiques. La solution est de constituer des équipes comprenant un mathématicien et un physiologiste qui comprend les mathématiques et qui peuvent soumettre les problèmes soulevés à un informaticien, qui cherchera alors à obtenir des résultats pour les modèles proposés.

A. B.

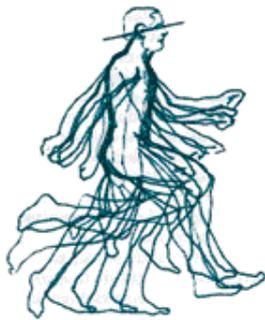
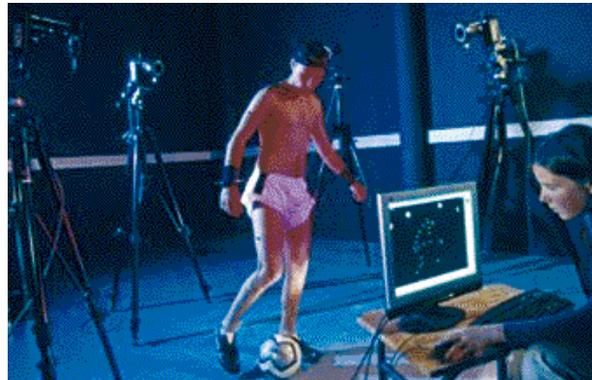


Fig. 4.1. La tête est stabilisée pour contrôler la posture et la coordination des mouvements.



Etude du mouvement, à gauche un dessin A. Berthoz dans *Le sens du mouvement*, à droite un système d'analyse sur un plateau de marche UMR CNRS 6233

Pour en savoir (un peu) plus

- 1 Longo, G. et al. (2004) *Géométrie et Cognition*. Numéro spécial de la Revue de Synthèse. Editions de la rue d'Ulm Ecole Normale Supérieure. Tome 124.
- 2 Maoz, U., Berthoz, A., Flash, T. (2009): *Complex unconstrained three-dimensional hand movement and constant equi-affine speed*. J Neurophysiol. 101(2):1002-15.
- 3 Pham, Q.-C., Hicheur, H., Arechavaleta, G., Laumond, J.-P., Berthoz, A.: *The Formation of Trajectories during Goal-Oriented Locomotion in Humans. II. A Maximum Smoothness Model*. Eur. J. Neurosc. 26(8):2391-2403.
- 4 Bennequin, D., Fuchs, R., Berthoz, A., Flash, T. (2009): *Movement timing and invariance arise from several geometries*. PLoS Comput Biol. 5(7):e1000426.
- 5 Girard, B., Tabareau, N., Pham, Q.C., Berthoz, A. & Slotine, J.-J.: *Where Neuroscience and dynamic system theory meet autonomous robotics: a contracting basal ganglia model for action selection*. Neural Netw. 21(4): 628-641.
- 6 Tabareau, N., Bennequin, D., Berthoz, A., Slotine, J.J., Girard, B. (2007): *Geometry of the superior colliculus mapping and efficient oculomotor computation*. Biol. Cybern. 97(4): 279-292.
- 7 Berthoz, A. (1997) : *Le Sens du Mouvement*, Odile Jacob, Paris, pp.345.
Berthoz, A. (2009) : *La simplicité*, Odile Jacob, Paris.