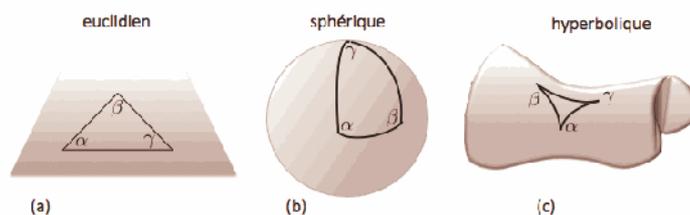


# Quelle géométrie pour l'espace-temps ?

Jean-Philippe Uzan  
Institut d'Astrophysique de Paris

La géométrie que nous utilisons habituellement est fondée sur un traité rédigé au III<sup>e</sup> siècle avant notre ère par le mathématicien grec Euclide. La grande originalité du traité d'Euclide fut de proposer un ensemble de cinq propositions, considérées comme vérités simples et évidentes, à partir desquelles il déduisit par le raisonnement toute la géométrie alors connue depuis Thalès. Le cinquième postulat, dit postulat des parallèles, est le plus intéressant pour notre propos. Euclide explique d'abord que deux droites situées dans le même plan sont parallèles si elles ne se rencontrent pas. Il postule ensuite que par un point il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à une droite donnée. Pendant plus de deux mille ans, ce postulat fut considéré comme intuitivement évident même si certains géomètres, dont Euclide lui-même, étaient gênés par l'impossibilité de le vérifier par l'expérience. Ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècle que les mathématiciens furent assez hardis pour transgresser le postulat des parallèles et construire de nouvelles géométries (figure 1). Afin de disposer de notions de distance et de durée, le physicien, guidé par des principes et des expériences, doit choisir la géométrie la mieux adaptée à notre espace-temps. En choisissant la géométrie euclidienne pour décrire notre espace physique, il fait une hypothèse qui n'est en aucun cas une nécessité logique. Examinons quels furent les raisons qui motivèrent les choix des physiciens.



**Figure 1 :** (a) Pour un espace euclidien à deux dimensions, les angles d'un triangle satisfont  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = 0$ . Les géométries sphérique (b) et hyperbolique (c) ne satisfont pas le cinquième postulat d'Euclide. Pour le cas sphérique (b) la somme des angles d'un triangle est reliée à sa surface par  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \text{aire}/R^2$ , où  $R$  est le rayon de la sphère, alors que dans le cas hyperbolique (c), elle satisfait  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = -\text{aire}/R^2$ . Tous ces espaces sont homogènes et isotropes et leurs équivalents tridimensionnels jouent un rôle central en cosmologie.

## L'espace-temps de Galilée-Newton

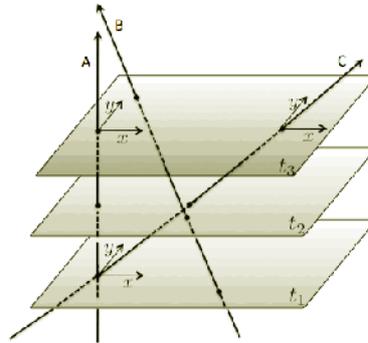
La physique newtonienne repose sur la notion de simultanéité temporelle absolue : tous les observateurs, quelque soit leur position et leur état de mouvement, peuvent affirmer sans ambiguïté que deux événements ont lieu en même temps. Le passé, le présent et le futur sont donc des notions absolues. L'espace physique est représenté par un espace absolu. Chaque point est caractérisé par ses coordonnées, c'est à dire un triplet de nombres réels puisque l'espace a trois dimensions. On postule qu'il existe des systèmes de coordonnées cartésiennes, tels que la distance entre deux points est calculable grâce au théorème de Pythagore. L'espace est donc représenté par un espace euclidien de dimension 3,  $E_3$ . Un repère de l'espace absolu est matérialisé, dans l'espace physique, par un système de référence qui est un trièdre solide, c'est à dire un ensemble d'objets matériels dont les distances sont invariables dans le temps. Il est construit à partir d'instruments que l'expérience permet de considérer comme solides. Ce référentiel est " bon " si, à la précision des mesures, toutes les propriétés euclidiennes des figures sont vérifiées. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'a priori ces instruments ne sont pas vraiment rigides. Des écarts systématiques aux prédictions euclidiennes impliqueraient que cette représentation n'est pas adéquate.

Le temps est représenté par un espace euclidien à une dimension,  $E_1$ . Il est absolu et matérialisé par des horloges. Une " bonne " horloge mesure, quelque soit son état de mouvement, des durées en conformité avec les lois de la dynamique écrites en fonction du temps absolu.

Le référentiel matérialisant le repère absolu doit être au repos afin que les points de  $E_3$  puissent être identifiés à des points matériels qui y sont immobiles. Selon le principe de relativité formulé par Galilée, les lois de la dynamique sont les mêmes dans tout référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au référentiel absolu (ces référentiels sont dits inertiels). Les lois de la physique ne permettent donc pas de distinguer l'état de repos absolu des mouvements rectilignes uniformes et donc d'associer de façon privilégiée un point de l'espace à un instant donné à un autre point de l'espace à un instant suivant. Nous devons donc considérer une structure à quatre dimensions dans lequel les espaces euclidiens à chaque instant sont indépendants les uns des autres, mais s'assemblent pour former un tout cohérent, l'espace-temps (figure 2).

On appelle événement un point de cet espace-temps. Le mouvement de tout corps est représenté par une ligne d'univers, qui se réduit à une ligne droite pour les mouvements inertiels. Un événement se trouve dans le futur d'un autre s'il est possible de l'atteindre avec une vitesse finie.

**Figure 2 :** L'espace-temps de Galilée-Newton représente l'espace par un espace euclidien à trois dimensions et le temps par un espace euclidien à une dimension. Le principe de relativité galiléenne implique qu'il n'existe pas d'identification privilégiée entre les points de l'espace à deux instants consécutifs. Deux observateurs inertiels qui coïncident à l'instant  $t_1$  (A et C) peuvent se considérer également au repos et " transporter " avec eux leur référentiel.



Soulignons une propriété importante de cette structure. Si deux voyageurs se retrouvent après des périples différents, la durée de leurs voyages sera la même. Leurs montres, synchronisées au départ, doivent indiquer la même heure à l'arrivée. Si ce n'était pas le cas, cela signifierait que les montres ne sont pas " bonnes " mais si un grand nombre d'expériences donnaient systématiquement un écart à cette prédiction, il faudrait conclure que l'espace-temps de Newton n'est pas une représentation correcte de l'univers physique réel.

## La Relativité Restreinte

Cette description a changé au début du XX<sup>e</sup> siècle. La raison se trouve au cœur des lois de l'électromagnétisme qui impliquent que dans le vide la lumière se propage à une vitesse finie. Selon la cinématique galiléenne, si cette vitesse est mesurée avec une valeur  $c$  dans un référentiel, un observateur animé d'une vitesse constante  $v$  par rapport à ce référentiel devrait vérifier que la lumière se propage à une vitesse  $c+v$ . Cependant le principe de relativité galiléenne implique que les lois de l'électromagnétisme sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. On devrait donc y mesurer la même vitesse de la lumière. D'où contradiction !

Ceci mit Albert Einstein sur la voie de sa théorie de la relativité restreinte. Einstein réaffirme le principe de relativité puis postule que la lumière se propage à la même vitesse  $c$  dans tous les repères inertiels, ce qui est expérimentalement vérifié. Les lois de la cinématique galiléenne, testées pour des vitesses petites devant celle la lumière, ne peuvent donc être qu'une approximation d'une loi plus générale qui doit avoir la propriété que "  $c+v=c$  " quelque soit la vitesse  $v$  !

Ceci a une implication illustrée par le paradoxe du train. Deux éclairs tombent à l'avant et à l'arrière d'un train en mouvement. Pour un observateur au bord de la voie, au milieu des deux points d'impact, les éclairs apparaissent simultanés. Cependant, une observatrice se trouvant au milieu du train perçoit l'éclair tombé à l'avant du train avant celui tombé à l'arrière puisqu'elle se déplace vers le point

d'impact qui a coïncidé avec l'avant du train. La lumière se propageant à la même vitesse dans tout référentiel inertiel, l'éclair a d'abord dû tomber sur l'avant du train. Pour elle, les deux éclairs ne sont pas simultanés !

La constance de la vitesse de la lumière oblige ainsi à abandonner les notions de simultanéité et de temps absolu, qui ne sont ancrées dans notre intuition que parce que la vitesse de la lumière est extraordinairement grande devant celles rencontrées dans la vie ordinaire. Le principe de relativité galiléenne nous avait déjà forcé à abandonner la notion d'espace absolu, le temps perd à son tour ce statut. La seule façon de rendre compte de toutes ces propriétés est de changer la représentation de l'espace-temps.

En relativité restreinte, les événements sont représentés par un ensemble de points à quatre dimensions, l'espace-temps absolu. Les propriétés, et en particulier la structure du cône de lumière, décrites figure 3, nous amène à postuler que la distance généralisée entre deux événements de coordonnées respectives :  $(T, X, Y, Z)$  et  $(T+\delta T, X+\delta X, Y+\delta Y, Z+\delta Z)$  est

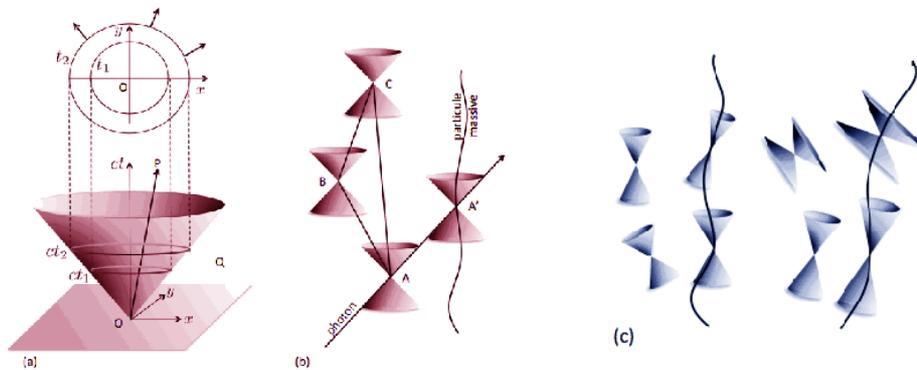
$$\delta s^2 = -c^2 \delta T^2 + \delta X^2 + \delta Y^2 + \delta Z^2.$$

Cette expression est similaire à la distance euclidienne à l'exception du signe - devant le premier terme. Le temps coordonnée  $T$  n'est le temps mesuré par un observateur que si il est au repos dans notre référentiel. Le temps mesuré dans son référentiel est donnée par  $s$ , qui est toujours plus petit que  $T$  ; il s'agit du phénomène de dilatation du temps. La distance, ainsi définie, est identique pour tout observateur inertiel : des observateurs peuvent mesurer une distance spatiale et une durée différentes entre deux événements mais doivent obtenir la même valeur de la distance généralisée. Cette situation est analogue à celle que l'on rencontre en géométrie euclidienne lors de la rotation du système de coordonnées : les coordonnées des points ont été modifiées mais les distances qui les séparent sont restées inchangées.

### L'espace-temps de la relativité générale

Galilée comprit que si l'on supprimait la résistance de l'air, tous les corps tomberaient de la même façon quelque soit leur masse et leur composition chimique. Ce principe d'universalité de la chute libre, vérifié expérimentalement avec une précision de  $10^{-13}$ , est le fondement de notre compréhension de la gravitation.

Imaginez deux observateurs en chute libre (c'est à dire qu'ils suivent leur trajectoire sous l'effet de la gravitation seule) et n'ayant aucun repère extérieur. Ils concluront qu'ils sont immobiles l'un par rapport à l'autre, comme s'ils n'étaient pas affectés par la gravitation, simplement parce qu'ils tombent avec la même



**Figure 3** : L'existence d'une vitesse universelle a de nombreuses implications pour la structure de l'espace-temps de Minkowski.

(a) En retirant une dimension spatiale pour les besoins de la représentation, un flash de lumière émit en  $O$  décrit un demi cône de sommet  $O$ . Toute particule massive ayant une vitesse inférieure à  $c$ , la tangente à sa ligne d'univers doit se trouver à l'intérieur de ce cône de lumière. L'évènement  $P$ , à l'intérieur du cône de lumière de sommet  $O$ , peut être relié par une ligne d'univers :  $P$  est dans le futur de  $O$ . L'intervalle  $OP$  est de genre temps,  $OP^2 < 0$ . Ce n'est pas le cas de l'évènement  $Q$ . L'intervalle  $OQ$  est de genre espace ( $OQ^2 > 0$ ) et il existe alors un référentiel inertiel dans lequel  $O$  et  $Q$  sont des évènements simultanés.

(b) L'inégalité triangulaire ( $AB+BC \geq AC$  en géométrie euclidienne) prend la forme  $AB+BC \leq AC$ , l'égalité n'étant atteinte que si les trois évènements sont alignés, c'est à dire sur la ligne d'univers d'un observateur inertiel. Ainsi, de deux voyageurs joignant  $A$  à  $C$ , celui qui effectue le voyage de façon inertielle mesurera un temps de voyage plus long.

(c) L'espace-temps de la relativité générale est courbe. En chaque point on peut définir un cône de lumière mais ceux-ci diffèrent d'un point à l'autre de l'espace-temps.

accélération. Ainsi, l'universalité de la chute libre implique qu'en se plaçant dans un référentiel en accélération on peut effacer un champ de gravitation. Cet "effacement" de la gravitation, qu'Einstein appellera principe d'équivalence, n'est cependant possible que localement.

Le point de vue d'Einstein sera de considérer les mouvements de chute libre comme des mouvements " naturels ", au même titre que les mouvements inertiels. Il montrera que l'on peut rendre compte de ces mouvements en considérant que l'espace-temps est courbe. Einstein comprendra que l'origine de cette courbure est due à son contenu matériel si bien que la gravitation n'est que la manifestation de cette courbure.

Cette représentation de la gravitation est très différente de celle de Newton. Tant que les champs de gravitation sont faibles et que les vitesses sont petites devant celle de la lumière, les deux théories donnent les mêmes prédictions. Dans des champs de gravitation intenses ou pour décrire le

comportement de la lumière, ce sont celles de la relativité générale qui ont été vérifiées avec une grande précision.

On peut utiliser la théorie d'Einstein pour déterminer la géométrie de notre univers et construire un modèle cosmologique. Par l'observation, l'univers semble isotrope autour de nous. On postule généralement que nous n'occupons pas une place particulière dans l'univers (c'est le principe copernicien) si bien qu'au plus grandes échelles l'univers serait spatialement homogène et isotrope. Seules trois géométries satisfont ces critères (fig. 1). La relativité générale implique alors que l'espace doit se dilater au cours du temps, une nouvelle propriété qui peut nous sembler inattendue, mais qui elle aussi est confirmée par l'observation : l'univers est en expansion.

## Conclusion

L'électromagnétisme et la gravitation, avec en filigrane le principe de relativité, nous ont forcé à changer nos représentations géométriques de l'espace et du temps pour les décrire par un espace-temps courbe avec, aux échelles cosmologiques, un espace en expansion.

Les développements de la physique théorique remettent en cause d'autres propriétés de l'espace. Il aurait probablement des dimensions supplémentaires. D'autre part, les distances les plus petites testées en accélérateur sont de l'ordre de  $10^{-17}$  mètres et la cosmologie donne accès à des distances de l'ordre de  $10^{26}$  mètres. Il est probable qu'à plus petite échelle, de l'ordre de  $10^{-35}$  mètres, il soit nécessaire d'abandonner la continuité de l'espace et d'introduire une " distance minimale ". Les mathématiques et la géométrie offrent de nombreuses structures capables de rendre compte du monde physique. La précision des expériences et la compréhension de la nature augmentant, nous devons parfois changer de structure afin de rendre compte des phénomènes. La représentation de l'espace et du temps en est un bon exemple. Aucune structure n'est donnée a priori, le physicien doit toujours faire un choix, guidé par certains principes, et seule l'expérience permet de valider ces choix.

*J.P. U.*

### Pour en savoir (un peu) plus

*N. Deruelle* et *J.-P. Uzan*, Mécanique et gravitation newtoniennes, Vuibert 2007 (en particulier les sections 1 à 4).

*N. Deruelle* et *J.-P. Uzan*, Relativité restreinte et électromagnétisme, Vuibert 2010 (à paraître).

*R. Penrose*, A la découverte des lois de l'univers, O. Jacob 2007 (chapitres 17 et 18).