Gravitation, problème des trois corps, chaos

Jérôme Perez
ENSTA - Laboratoire de Mathématiques Appliquées

En 1666 Newton eut une intuition géniale : comme les pommes qui tombent des arbres, la Lune est soumise a une force dont la Terre est la source. Cette force oblige la Lune à se départir de son mouvement naturel rectiligne et uniforme pour suivre une orbite quasi-circulaire autour de la Terre. Newton détailla la forme de cette force de gravitation universelle : elle est radiale (la direction de la force passe par le centre des corps qui interagissent) et son intensité est proportionnelle au produit des masses des deux corps et à l'inverse du carré de leur distance. Lorsque seulement deux corps interagissent la situation est relativement simple. Newton démontra que les trajectoires de ceux-ci s'effectuait dans un plan et ne pouvait être qu'une conique (courbe que l'on obtient en faisant l'intersection d'un plan et d'un cône, voir l'article de Patrick Rocher). Le type de conique effectivement emprunté par les corps dépend de leur énergie totale, somme de l'énergie de mouvement (cinétique) et de l'énergie de liaison (gravitationnelle) : trop d'énergie de liaison gravitationnelle et la trajectoire sera fermée (cercle ou ellipse), trop d'énergie cinétique et la trajectoire sera ouverte (parabole ou hyperbole)

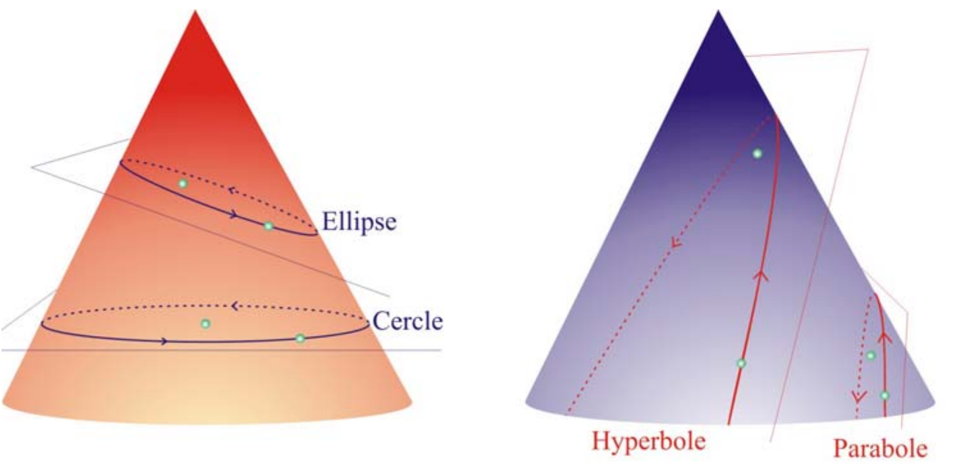


Figure 1 - Coniques et trajectoires du problème à deux corps

Dès qu'un troisième larron entre en scène la situation se complique très fortement. Le cas de la Lune est d'ailleurs emblématique à ce sujet. Si pendant quelques jours on peut rendre compte du mouvement lunaire en invoquant la Terre seule, on constate bien vite que l'ellipse initiale se déforme constamment sous l'influence de perturbations : l'axe de l'ellipse tourne dans un sens, le plan contenant la trajectoire tourne dans l'autre, etc.

L'origine de ces perturbations est claire : même s'il se trouve en moyenne 400 fois plus loin que la Terre, le Soleil est environ 330 mille fois plus massif que notre planète. Un calcul grossier montre donc que si la force de gravitation exercée par la Terre sur la Lune est prise pour unité, celle exercée par le Soleil sur la Lune vaut 330 000/(400)2 soit environ 2 ! La Lune ne devrait donc pas être un satellite de la Terre mais plutôt du Soleil, sa trajectoire n'est donc pas une solution du problème à deux mais bel et bien à trois corps !

Le mouvement de la Lune apparaît si finement complexe aux observateurs que d'éminents astronomes, comme Clairaut et d'Alembert, proposent au XVIIIè siècle de modifier la forme de la force de gravitation de Newton. Mais rien n'y fit et la prévision du mouvement s'avéra toujours imprécise. Comprenant l'inadéquation de ces termes superflus, le génial Lagrange introduisit la notion de perturbation : puisque les paramètres définissant les orbites sont constants dans le cadre du problème à deux corps, l'introduction d'un troisième pourrait être prise en compte en supposant que ces constantes deviendraient des fonctions du temps ! Il suffit pour cela d'être capable d'écrire les équations régissant la dynamique de ces paramètres. Le succès est au rendez-vous, outre la prédiction effective de la valeur de la période du mouvement de la ligne des nœuds (intersection entre le plan orbital de la Lune et celui de la Terre), il pose les bases de la physique moderne en déduisant la mécanique de concepts géométriques.

Lagrange propose aussi l'une des seules solutions simples pour l'équilibre du problème des trois corps dans le cas où l'on suppose que deux de ces masses, notées m1 et m2, sont en orbite circulaire et la troisième est négligeable devant les deux autres. Les fameux points de Lagrange issus de cette analyse sont aujourd'hui bien connus.

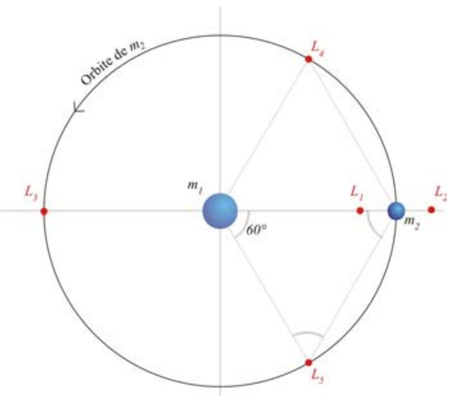
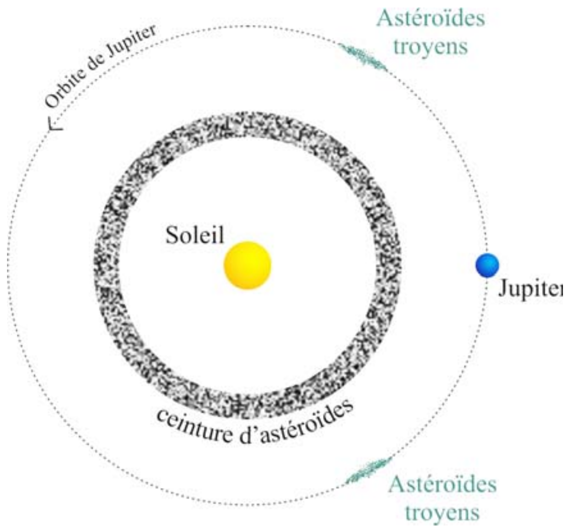


Fig. 2 - Points de Lagrange

L1 et L2 situés sur l'axe m1m2 sont souvent utilisés comme camp de base pour des missions spatiales (même s'ils sont généralement instables dans une direction de l'espace et nécessitent donc un repositionnement périodique). On a longtemps qu'il pouvait y avoir une planète inconnue en L3, qui est aussi un point instable. Les points L4 et L5, que la force d'inertie - en les écartant de l'axe de rotation - parvient dans certains cas à stabiliser, se voient le refuge de nombreux corps dans les différentes configurations offertes par les objets cosmiques (satellites troyens situés aux points de Lagrange du système Soleil-Jupiter ; Calypso et Télesto situés aux points de Lagrange du système Saturne-Thétys ; etc.).

Contrairement à ce que l'on croit ou lit un peu partout, le problème des trois corps est maintenant résolu dans un cas très général, même si l'on ne fait pas d'hypothèses simplificatrices !
Cependant Poincaré montra à la toute fin du XIXe siècle que la structure géométrique de l'ensemble des points accessibles en position et en vitesse par les trois corps est d'une complexité redoutable. Techniquement, l'illustre mathématicien montra que ce système n'est pas algébriquement intégrable, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver suffisamment de grandeurs constantes intervenant dans le problème pour ramener son étude à un cas simple. Il n'en demeure pas moins qu'au tout début du XXè siècle le mathématicien finlandais Karl Sundman exhiba une solution générale (analytique) sous la forme d'un développement en série en fonction d'un paramètre qui se substitue au temps. La restriction du nombre trois a même été levée récemment par le mathématicien chinois Q.-D.Wang qui donne en 1991 une solution globale pour le problème à N corps. Tout le problème réside dans la nature de la fonction venant remplacer le temps qui confère au développement, et donc à la solution, des propriétés de convergence effective mais d'une lenteur irrémédiable ! C'est ce dernier élément qui rend la solution de Wang très complexe voire chaotique ...



Position des astéroïdes troyens

Le problème académique de deux corps en interaction gravitationnelle se réduit (dans le cas d'une trajectoire elliptique) à la donnée d'un couple formé d'une amplitude et d'une période. Pour la trajectoire circulaire cette amplitude est simplement le rayon du cercle et cette période est simplement le temps mis par le corps pour effectuer un tour. Dès l'Antiquité, on comprit que l'on pouvait raffiner la description de ce mouvement dans le cas des planètes en rajoutant des épicycles, c'est-à-dire des cercles tournant autour d'un centre se déplaçant sur le cercle principal. Techniquement cela revient à rajouter des couples amplitude-période secondaires au couple principal. Si les perturbations se rajoutant au problème académique se révèlent de faible ampleur, les amplitudes secondaires décroissent très rapidement et l'approximation est de bonne qualité pendant un temps raisonnable. Si par contre, comme c'est le cas dans le problème général des trois corps et comme le montre la solution de Sundman, l'amplitude associée à chaque mode secondaire ne décroit que très lentement au fur et à mesure du développement, la trajectoire se complique fortement. Dans le cas limite d'une trajectoire décomposable en la somme d'une infinité de périodes d'égales amplitudes on obtient une solution complètement erratique que l'on ne peut décrire que de façon probabiliste : c'est le chaos !

Dans le cas des problèmes gravitationnels tels que l'on peut les rencontrer dans le système solaire, le chaos est donc la règle si l'on cherche à décrire la trajectoire des corps sur de longues échelles de temps (pour la trajectoire des planètes, le temps caractéristique d'apparition du chaos est de l'ordre de la centaine de millions d'années). Il n'en demeure pas moins vrai qu'un certain nombre de mécanismes physiques peuvent toutefois faire apparaître un peu d'ordre dans ce qui semble inextricablement mêlé ! Le principal de ces mécanismes consiste en un couplage entre certains modes basé sur la " commensurabilité " des périodes associées : la résonance. L'exemple de la balançoire est ici très instructif. Il est bien connu des enfants que l'on peut déclencher puis entretenir ou même ralentir le mouvement d'une balançoire sur laquelle on a pris place. Il suffit pour cela d'entreprendre des mouvements de jambes avec une période particulière, adaptée à la balançoire. L'amplitude et la période du mouvement de la balançoire se trouve alors couplée à celles des jambes.

L'expérience (et le calcul) montre que l'on peut stabiliser certaines périodes, celles correspondant au mouvement apprécié, ou à l'inverse s'éloigner de certains mouvement peu intéressants comme l'immobilité... Dans le contexte de la mécanique céleste il en va de même ! Le couplage inéluctable qui se produit entre les divers couples amplitude-période existant dans le développement des trajectoires des divers objets célestes, conduit tantôt à favoriser certaines configurations (la planète Mercure fait trois tours sur elle-même en faisant deux tours autour du Soleil, les satellites de Jupiter ont des périodes astucieusement reliées, etc.) tantôt à l'éviction de certaines trajectoires (la ceinture d'astéroïdes possède certaines lacunes - dites de Kirkwood, les bords de l'anneau de la planète Saturne sont nets, etc.).

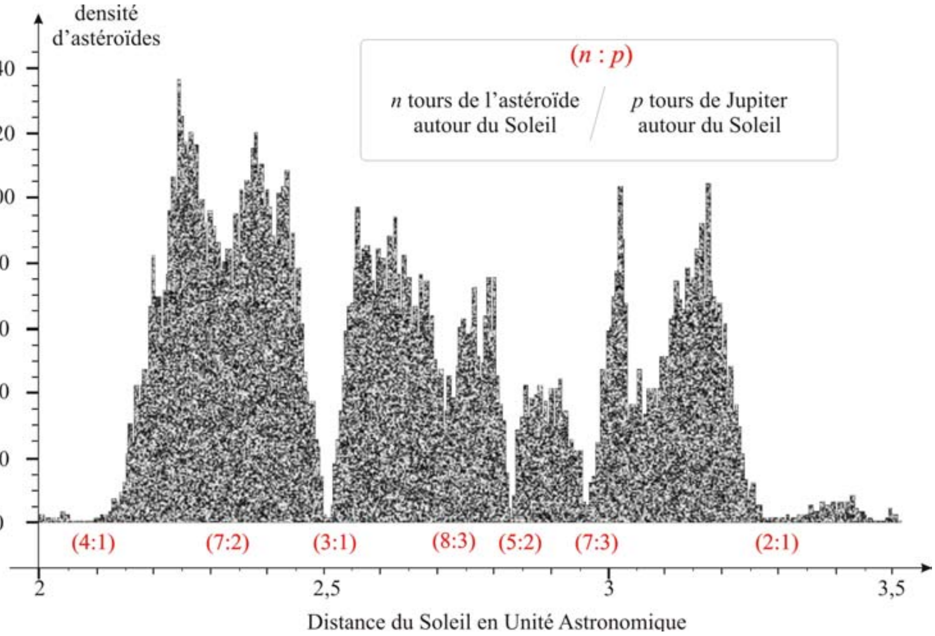


Figure 4 : Les lacunes de Kirkwood.
Répartition des astéroïdes en fonction de leur distance au Soleil.

Enfin, certaines configurations stabilisent certaines propriétés de l'orbite des corps : l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre est stabilisée par la rotation synchrone de la Lune. Sans cette dernière, et donc sans cette stabilisation, comme l'a montré Jacques Laskar, le climat terrestre varierait plus fortement et plus rapidement avec des conséquences notables pour le développement de la vie à sa surface. Vous ne seriez peut-être pas là pour lire ce texte !

J.P.

Pour en savoir (un peu) plus

Jérôme Perez - Gravitation classique : le problème à N corps de 2 à l'infini, Les presses de l'ENSTA, 2009

Ivars Peterson - Le chaos dans le système solaire, Collection sciences d'avenir - Pour La Science , Belin, 1998

Malte Henkel - Sur la solution de Sundman du problème des trois corps, , Philosophia Scientiae, Vol. 5, p. 161-184, 2001 - arxiv:physics/0203001
.