Les coniques et les trajectoires orbitales des planètes

P. Rocher
IMCCE - Observatoire de Paris

Petites histoires des coniques

Les coniques sont connues depuis près de vingt quatre siècles. Leur découverte est attribuée au grec Ménechme au quatrième siècle avant J.-C. Elles furent étudiées entre autres par Aristote, Euclide et Archimède. Au début du deuxième siècle avant J.-C. un traité complet intitulé les sections coniques fut écrit par Apollonius de Perge (v. 240 av. J.-C. - v. 170 av. J.-C.). Ce traité se compose de huit livres dont sept nous sont connus. Les quatre premiers nous sont parvenus en langue grecque et les trois derniers dans leurs traductions arabes. On doit à l'astronome britannique Edmund Halley (1656 - 1742) une édition complète de ce traité en latin. Ces sept livres comportent jusqu'à 387 propositions, on y trouve les définitions géométriques de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole.

Il y a de très nombreuses manières de définir les coniques. La plus géométrique est celle des courbes obtenues par l'intersection d'un plan (P) et d'un cône de révolution (Γ) de sommet O et d'angle au sommet θ . Si l'on nomme α l'angle aigu que fait le plan avec l'axe du cône on a les intersections suivantes :

On retrouve ainsi les trois familles de coniques, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Ces trois courbes génèrent lorsqu'on les fait tourner autour de leur axe de symétrie des surfaces remarquables : l'ellipsoïde, le paraboloïde et l'hyperboloïde.

	si $O \notin (P)$	si $O \in (P)$
$\alpha < \theta$	Hyperbole (1)	Deux génératrices du cone (4)
$\alpha = \theta$	Parabole (2)	Une génératrice du cône (P) est tangent au cône (5)
$\alpha > \theta$	Ellipse (3)	Le sommet O du cône (6)

On peut également définir les coniques comme des ensembles de points vérifiant certaines propriétés, par exemple, à partir d'un foyer et d'une droite directrice. Si l'on se donne dans un plan une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel e strictement positif, alors l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation $\frac{MF}{MH} = e$ est l'ensemble des coniques, H étant la projection orthogonale de M sur la droite D. Si *e* est inférieur à un, c'est une ellipse. Si *e* est égal à un, c'est une parabole et si *e* est plus grand que un, c'est une hyperbole. On donne à *e* le nom d'excentricité, D est la directrice de la conique et F est son foyer. La perpendiculaire *d* à D passant par F est un axe de symétrie de la conique, c'est son axe focal.

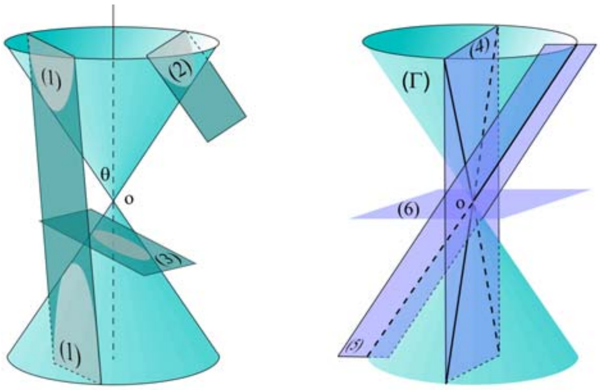

Figure 1 : Définitions géométriques des coniques

Le mouvement des planètes

En grec le mot planète signifie astre errant, il n'est donc pas surprenant de trouver, dans l'Antiquité, la Lune et le Soleil parmi les sept planètes connues (la Lune, le Soleil, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne) la Terre étant supposée fixe au centre de l'univers. Très tôt les astronomes comprirent que la voûte étoilée du ciel se déplaçait dans un mouvement circulaire autour d'un axe fixe, mais ils attribuèrent à tort ce mouvement aux astres, alors qu'il s'agissait de la révolution diurne de la Terre sur elle-même. Cela permit de définir un monde sphérique, avec un axe de rotation (l'axe des pôles) et un équateur céleste (le grand cercle perpendiculaire à l'axe de rotation). Ils remarquèrent également que le Soleil parcourait au cours d'une année un autre grand cercle incliné par rapport à l'équateur. Ils appelèrent ce grand cercle l'écliptique, car c'est lorsque la

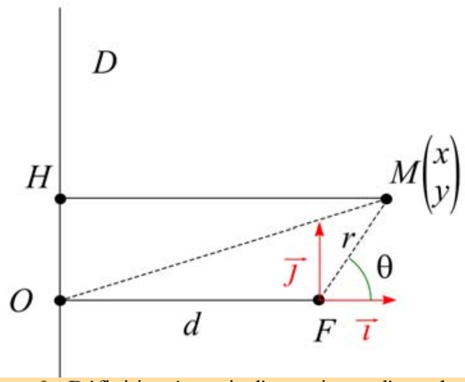

Figure 2 : Définition à partir d'un point et d'une droite directrice.

Lune est proche de ce cercle qu'il y a des éclipses de Lune et de Soleil. Les directions des intersections de l'écliptique et de l'équateur définissent les directions des équinoxes et les deux directions perpendiculaires définissent les directions des solstices. Le passage du Soleil dans ces directions marque le début de chaque saison astronomique.

Les grecs pensèrent, dans un premier temps, représenter le mouvement du Soleil par un mouvement circulaire uniforme, ce qui devait entraîner des durées de saisons égales. Or ils s'aperçurent dès l'époque de Méton (Ve siècle av. J.-C.) que ce n'était pas le cas. Si les durées des saisons ne sont pas égales entre elles, alors la vitesse angulaire du Soleil vue depuis la Terre n'est pas constante. Voulant garder à tout prix des mouvements circulaires uniformes, ils imaginèrent deux solutions équivalentes pour " sauver les apparences " : le cercle excentrique et le système des épicycles. Dans le système excentrique, les astres se meuvent toujours d'une vitesse uniforme sur un cercle, mais la Terre n'est plus au centre de ce cercle, elle est excentrée. Dans le système des épicycles, l'astre décrit à vitesse constante un petit cercle (l'épicycle), dont le centre décrit à la même vitesse, mais de sens inverse, un plus grand cercle (le déférent) centré sur la Terre. La seconde solution a l'avantage de laisser la Terre au centre de l'univers.

L'équivalence de ces deux solutions est de nouveau rattachée au nom d'Apollonius de Perge. Avec ces deux solutions, la distance Terre-Soleil n'est plus

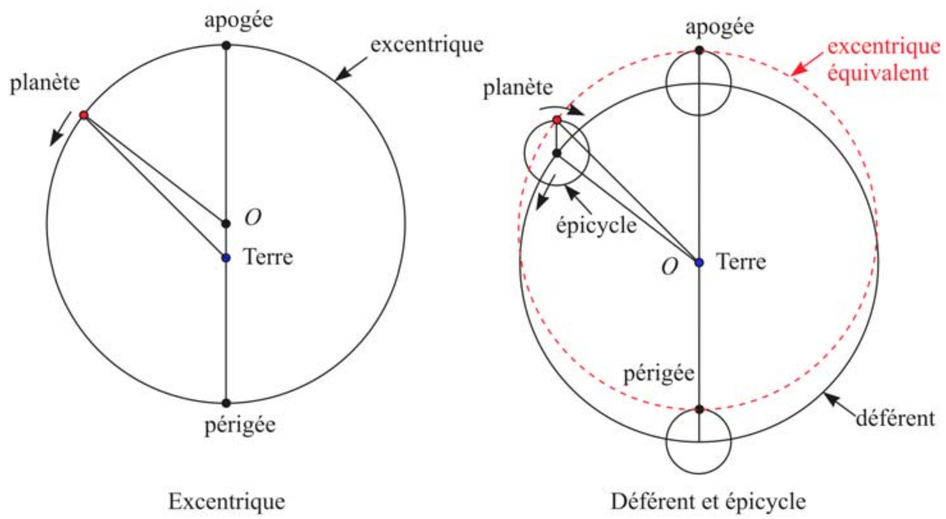

Figure 3 : Le système des excentriques et le système des épicycles.

constante, il y a deux valeurs extrêmes que l'on nomma périgée pour la plus proche et apogée pour la plus lointaine.

Les grecs inventèrent un système encore plus complexe, l'équant, dans lequel la Terre est excentrée et où le Soleil décrit un cercle à vitesse angulaire constante non par rapport au centre du cercle mais par rapport à l'équant, point symétrique de la Terre par rapport au centre du cercle ! Ces systèmes furent utilisés pour modéliser le mouvement des planètes. Au milieu du deuxième siècle, l'astronome grec Claude Ptolémée (v. 100 - v. 170) écrivit un traité d'astronomie La grande syntaxe mathématique - également connue sous le nom de sa traduction arabe, l'Almageste - dans lequel les mouvements des sept planètes étaient décrits à l'aide de ces artifices. Ce traité, largement commenté par les astronomes arabes, restera la source des calculs des positions des planètes jusqu'à l'époque de Kepler.

L'abandon du cercle au profit de l'ellipse

Une première révolution dans le monde de l'astronomie eut lieu au XVIe siècle avec la publication en 1543 du De revolutionibus orbium coelestium de l'astronome polonais Nicolas Copernic (1473 - 1543) dans laquelle on passa du système géocentrique au système héliocentrique. Cela permettait de simplifier grandement la cinématique du mouvement des planètes élaborée pour tenir compte des rétrogradations observées depuis la Terre. La deuxième révolution fut l'amélioration des observations, notamment celles de la planète Mars, par l'astronome danois Tycho Brahe (1546 - 1601). En science une théorie reste valide tant qu'elle est conforme avec les observations. Or les positions tirées des tables des mouvements ne permettaient pas de retrouver les observations de Mars faites par Tycho Brahe, les écarts étaient de l'ordre de huit minutes d'arc, ce qui était supérieur aux erreurs de mesure des observations. Il fallait donc renoncer aux combinaisons de mouvements circulaires et à l'équant. Ce fut l'œuvre de l'astronome allemand Johannes Kepler (1571 - 1630) qui élabora trois lois pour définir le mouvement des planètes autour du Soleil.

Les lois de Képler

La première loi stipule que les planètes décrivent des orbites planes et elliptiques autour du Soleil et que le Soleil occupe un des foyers de l'ellipse (1609) ; en fait cette deuxième affirmation n'est pas tout à fait exacte, c'est le centre de gravité des deux corps qui se trouve au foyer de l'ellipse.

La seconde loi, appelée loi des aires, stipule que les rayons vecteurs joignant le centre du Soleil à la planète décrivent des aires égales en des temps égaux (1609).

Enfin **la dernière loi** stipule que les carrés des périodes de révolutions des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des ellipses (1618).

Pour les établir Kepler a bénéficié de deux circonstances favorables. D'une part l'excentricité de l'orbite terrestre est très faible : la trajectoire de la Terre est bien représentée avec un cercle excentrique, ce qui a facilité la transformation des observations géocentriques de Mars en observations héliocentriques. D'autre part les observations de Tycho Brahe étaient suffisamment imprécises pour que l'on puisse les représenter par un mouvement elliptique. En effet l'orbite réelle de Mars n'est pas une ellipse parfaite à cause des perturbations dues aux autres planètes. Si les observations avaient été plus précises la solution purement elliptique n'aurait pas permis de les représenter. Les lois de Kepler résultent de l'observation. Il faudra attendre le savant anglais Sir Isaac Newton (1643 - 1727) pour en avoir une démonstration mathématique fondée sur ses lois de la mécanique et de la gravitation universelle.

Dans un premier temps Newton répond à une question de son ami Edmund Halley qui lui avait demandé qu'elle serait la trajectoire d'une planète soumise à une force centrale dont l'intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance (ce qui est le cas de la gravitation). Il démontra que la trajectoire est une ellipse contenue dans un plan fixe. Dans cette démonstration (De motu corporum in gyrum, 1684) Newton n'utilise que des arguments géométriques. Newton est le père de la mécanique moderne dont il définit les principes dans ses Philosophiae Naturalis Principia Mathematica publiés en 1687. Le formalisme classique que l'on utilise de nos jours et qui exprime la vitesse comme la dérivée de la position par rapport au temps et l'accélération comme la dérivée de la vitesse, fut formulé en 1698 par le mathématicien français Pierre Varignon (1654 - 1722) lors de deux communications à l'Académie royale des sciences. On peut alors montrer de façon générale que la trajectoire d'un corps soumis à la gravitation est une conique dont la forme dépend de la vitesse initiale du corps.

En fait les lois de Kepler ne sont valables que si on ne considère que deux corps en mouvement, seul cas où le problème est totalement intégrable.

Le mouvement képlérien sur une orbite elliptique

Pour décrire le mouvement képlérien du corps A sur son orbite on utilise un système de coordonnées polaires ayant pour origine le foyer de l'ellipse occupé par le Soleil. Ce système est formé de deux variables : le rayon vecteur r et l'anomalie ν.

On peut également exprimer ces variables en fonction de deux autres angles centrés en O centre de l'ellipse. Soit A la position de l'astre sur son orbite, soit A' la projection normale à l'axe focal du point A sur le cercle de centre O et de rayon a. L'anomalie excentrique E est l'angle entre le point A' et la direction du périhélie ; le moyen mouvement M est l'angle entre le point A et la direction du périhélie. M peut être considéré comme l'angle polaire d'un mobile B qui suit ou qui précède l'astre A sur son orbite et qui est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire n = 2 π /T, T étant la période de révolution de l'astre.

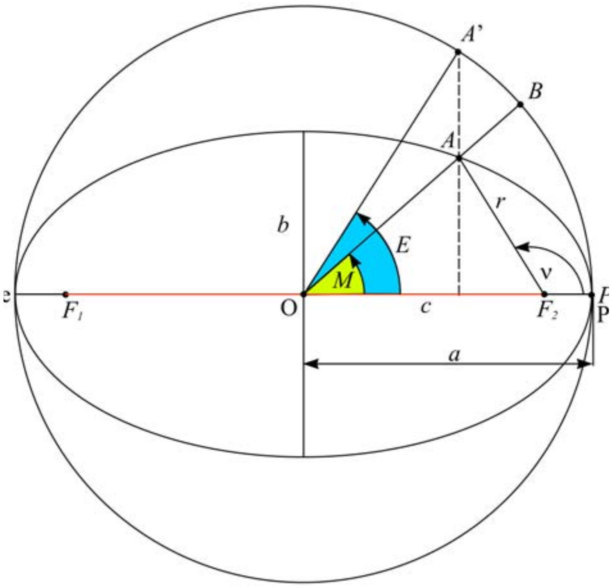

Figure 4 : Mouvement elliptique

Cas du problème des n corps

Lorsque le nombre de corps est supérieur à deux, le problème n'est plus intégrable, il n'a pas de solution exacte. Dans ce cas on utilise, soit des méthodes d'intégrations numériques des équations du mouvement, soit des méthodes analytiques de perturbations. Dans ce dernier cas on perturbe la solution principale, c'est-à-dire l'ellipse keplérienne du problème des deux corps Soleil-planète, par l'action des autres planètes. Alors l'orientation du plan de l'orbite ainsi que l'orientation et la forme de l'ellipse dans ce plan ne sont plus constants et dépendent du temps. Mais c'est une autre histoire…

P.R.

Pour en savoir (un peu) plus

E. Lindemann, Mécanique, une introduction par l'histoire de l'astronomie, 1999, De Boeck Université.

Sir I. Newton, de la gravitation, suivi de du mouvement des corps, 1995, Tel Gallimard.