Gnomon, cadrans solaires et astrolabes

Denis Savoie
Palais de la découverte

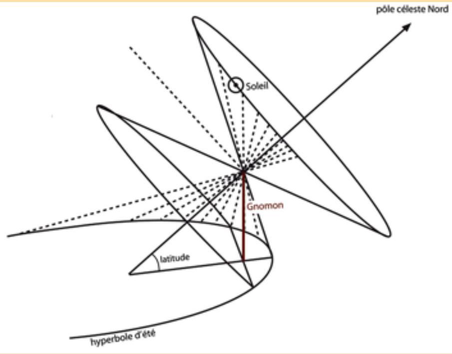
Le gnomon

L'astronome et mathématicien Apollonius de Perge (III^e siècle av. J.-C.) a écrit plusieurs traités dont un seul nous est parvenu, en partie en grec et en arabe, sous le nom de Sections coniques. Avant même que cet ouvrage soit édité partiellement au XVI^e siècle, il eut une influence considérable puisque les mathématiciens arabes y puisèrent les informations relatives à la propriété des foyers en optique. Quant à Kepler, il y trouva la courbe qui approximait le mieux l'orbite ovale de la planète Mars qu'il cherchait à déterminer, à savoir l'ellipse.

Le traité des Sections coniques, dans lequel Apollonius de Perge établit les noms et les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, eût certainement pour point de départ la théorie des cadrans solaires. En effet, le premier instrument astronomique fut le gnomon, simple bâton planté en terre, dont l'étude de l'ombre permettait de déterminer des paramètres fondamentaux comme la latitude du lieu ou l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre (voir photo). Grâce à l'étude de la trajectoire de l'ombre (voir encadré page suivante), on pût également déterminer les dates des équinoxes et des solstices et mettre ainsi en évidence l'inégalité de la durée des saisons.

L'obélisque de la place de la Concorde à Paris peut être considéré comme un gigantesque gnomon. Transformé en cadran solaire en l'an 2000, l'heure et la date sont indiquées par l'extrémité de l'ombre.

Etude de la trajectoire de l'ombre



Au cours de la journée, les rayons solaires passant par le sommet du gnomon engendrent un cône dont l'axe est parallèle à l'axe de rotation de la Terre et dont l'angle au sommet est égal à l'angle qui le sépare du pôle céleste nord. Ce cône intersecte le plan horizontal du gnomon et, sous nos latitudes, la section conique ainsi obtenue est une branche d'hyperbole. Aux équinoxes le cône est dégénéré en un plan (son angle au sommet est égal à 90°) dont l'intersection avec le plan horizontal engendre une droite. Ainsi, la trajectoire de l'ombre de l'extrémité d'un gnomon résulte de l'intersection d'un cône et d'un plan, lequel peut être aussi vertical ou incliné. En faisant varier l'inclinaison du plan et la date, on peut obtenir sous nos latitudes toute une famille de coniques.

Les cadrans solaires

Dans l'Antiquité gréco-romaine se développe la technique de construction des cadrans solaires, principalement dans des volumes : cadrans coniques, sphériques, etc. Tous les cadrans antiques ont en commun le fait qu'ils indiquent une heure variable et que c'est l'extrémité seule de l'ombre qui indiquait l'heure. L'heure antique, également appelée inégale ou temporaire, était définie comme la douzième partie de l'intervalle de temps séparant le lever du coucher du Soleil. Sous nos latitudes, l'heure durait 40 minutes en hiver et 80 minutes en été ; il n'y a qu'aux équinoxes où l'heure durait 60 minutes, constituant l'heure équinoxiale.

Au Moyen Age apparaissent sur des édifices le plus souvent religieux des cadrans un peu particuliers, les cadrans canoniaux. Il ne s'agit pas véritablement de cadrans solaires, mais plutôt d'indicateurs de prières ou d'offices religieux. Ils ne comportent aucune indication chiffrée et se composent le plus souvent d'un demi-cercle divisé en 6, 8 ou 12 secteurs égaux. Par convention, lorsque l'ombre d'une tige recouvrait un segment de droite, on devait célébrer un office.

La civilisation arabe, qui hérita en partie des connaissances astronomiques des Grecs, développa la trigonométrie sphérique, et apporta une amélioration majeure dans les cadrans solaires : au lieu d'utiliser des gnomons horizontaux ou verticaux, les Arabes eurent l'idée de placer l'indicateur d'ombre parallèle à l'axe de rotation de la Terre, c'est-à-dire en le pointant vers le pôle céleste. On réserve l'appellation de style polaire à la tige ainsi orientée. Avec ce système, on peut utiliser des heures constantes, égales à 60 minutes toute l'année ; de plus, c'est la totalité de l'ombre qui indique l'heure, et plus seulement l'extrémité de l'ombre. En d'autres termes, si la longueur de l'ombre change avec les saisons, la direction de l'ombre est la même pour une même heure toute l'année.

En Occident, malgré le développement de l'horlogerie à partir du XIIIe siècle, les cadrans solaires se répandirent de plus en plus ; la plupart étaient verticaux, tracés sur les églises, sur des châteaux, ou sur de riches demeures. On leur faisait indiquer les dates des saisons, les heures de lever et de coucher du Soleil, etc. Certains de ces cadrans étaient portatifs, utilisant la variation de la hauteur du Soleil au cours de la journée pour déterminer l'heure. D'autres n'indiquaient que midi solaire, et servaient en quelque sorte de repère absolu pour régler les horloges. Ce type de cadran, appelé méridienne, était même parfois cons-truit à l'intérieur des bâtiments, comme la méridienne de l'église Saint Sulpice à Paris, ou celle de l'Observatoire de Paris. Aux XVIe et XVIIe siècles, on rivalisa d'ingéniosité pour construire des cadrans solaires originaux, comme les cadrans analemmatiques où le gnomon est mobile, les cadrans à réflexion utilisant la tache de lumière projetée par un miroir. A partir du XVIIIe siècle, on fit indiquer à certains cadrans solaires le temps moyen en incorporant l'équation du temps dans le tracé, ce qui donne des courbes en forme de huit. On pouvait ainsi régler les horloges sur un temps uniforme (le temps solaire moyen), le temps solaire vrai indiqué par les cadrans ne l'étant pas.


Denis Savoie observe l'image projetée du Soleil au moment où celle-ci va franchir la méridienne de l'église Saint-Sulpice

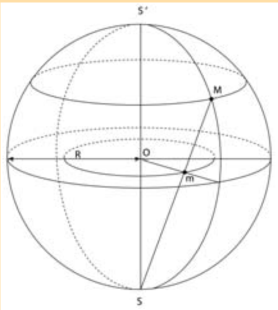
Pour construire tous ces cadrans solaires, du moins les plus classiques, il existait des cadraniers, c'est-à-dire des artisans qui étaient chargés de calculer le cadran et de le tracer soit en le peignant soit en en le sculptant. Pour le calcul, les cadraniers disposaient de tables toutes prêtes où était indiqué l'angle entre chaque ligne horaire en fonction de l'orientation du mur et de la latitude.

Les plus grands géomètres ont traité de gnomonique (Descartes, Kepler, Lalande, Monge…) et même si aujourd'hui cette branche de l'astronomie n'est plus qu'une curiosité, de nouveaux types de cadrans ont été inventés comme les cadrans bifilaires au début du XXe siècle. L'informatique a également permis plus récemment de s'attaquer au tracé des cadrans sur les surfaces non planes complexes.

L'astrolabe

C'est également à Apollonius de Perge que l'on doit d'avoir démontré que tout cône oblique admet deux familles de sections circulaires. A partir de là, on comprit que la projection stéréographique (voir encadré) transformait un cercle de la sphère en un cercle du plan. Cette propriété fondamentale de la projection stéréographique fut mise en application dans un instrument qui connut un succès considérable, l'astrolabe planisphérique (voir photo). C'est un instrument plan qui représente le mouvement diurne de la voûte céleste et le mouvement annuel du Soleil. Si on se perd en conjectures sur son inventeur (Eudoxe, Hipparque, Ptolémée), le plus ancien texte conservé relatif à cet instrument est le Traité de l'astrolabe de Jean Philoppon (vers 490 - vers 570). Mais ce sont les astronomes arabes qui vont donner à cet instrument grec une très vive impulsion puisque entre 800 et 1100, de très nombreux traités verront le jour avec d'importantes innovations et applications.

Astrolabe persan. On distingue nettement l'araignée ajourée, avec ses crochets qui correspondent à la position des étoiles. Sous l'araignée mobile se trouve le tympan avec ses cercles d'azimut, de hauteur, d'heure, etc.



La projection stéréographique

Considérons une sphère de centre O et de rayon R, coupée par un plan Π passant par O. Ce plan, appelé plan de projection, coupe la sphère selon un grand cercle de rayon R. Le point S de la sphère est le centre de projection. On appelle projection stéréographique d'un point M de la sphère le point m obtenu en prenant l'intersection de SM avec le plan de projection Π.

La projection stéréographique est aujourd'hui utilisée notamment en cartographie, principalement pour représenter les régions polaires.

La projection stéréographique présente plusieurs particularités qui la rendent intéressante : d'une part on l'a vu, elle transforme un cercle de la sphère en cercle sur le plan, ce qui simplifie grandement le tracé. D'autre part, c'est une projection conforme, ce qui veut dire qu'elle conserve les angles que forment entre eux les cercles de la sphère origine. Ainsi, un angle mesuré entre deux courbes sur l'astrolabe a même valeur que celui que l'on pourrait mesurer dans le ciel. Précisons d'emblée qu'un astrolabe est un instrument de calcul et de pédagogie : en aucune façon il ne sert à faire des observations, sauf de façon anecdotique. L'instrument se compose d'une partie fixe, la mère, dans laquelle on insère des tympans qui constituent la projection stéréographique des cercles de la sphère (cercle d'azimut, de hauteur, de crépuscule..). La partie mobile est appelée araignée : elle figure de façon artistique la position des étoiles et du Soleil.

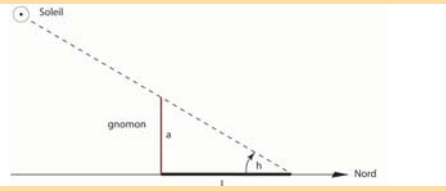
L'astrolabe permet de résoudre de très nombreux problèmes d'astronomie de position, comme par exemple déterminer l'heure (le jour comme la nuit), la visibilité d'une étoile au-dessus de l'horizon, l'heure de lever ou de coucher d'un astre, son azimut aussi bien que sa hauteur à un instant donné, la durée du jour et de la nuit, etc. L'instrument se révèle également très commode lorsqu'on l'utilise à des fins religieuses : les heures des cinq prières islamiques par exemple sont faciles à déterminer, d'autant plus que l'astrolabe permet de calculer à quel instant le Soleil atteint une certaine hauteur sous l'horizon (aube et crépuscule).
Ajoutons que l'utilisation astrologique de l'astrolabe pendant la période de l'apogée arabo-islamique ne doit pas être sousestimée ; grâce à lui, il était aisé de déterminer et de visualiser l'ascendant (constellation zodiacale qui se lève à un instant précis), le signe astrologique ainsi que tous les éléments de l'horoscope. *D.S.*

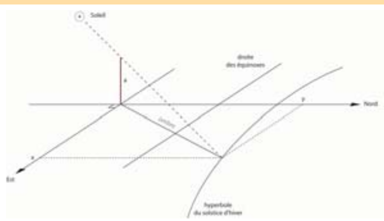
Calcul de la latitude avec un gnomon

La hauteur h du Soleil au-dessus de l'horizon lorsqu'il est au méridien, donc au plus haut, se calcule par :

$h = 90° - \phi + \delta$

ϕ étant la latitude du lieu, δ la déclinaison du Soleil (distance angulaire du Soleil à l'équateur : varie de - 23° 26' au solstice d'hiver à + 23° 26' au solstice d'été). En mesurant aussi précisément que possible la longueur de l'ombre d'un gnomon à midi vrai, donc lorsque l'ombre est la plus courte, si l est la longueur de l'ombre et a la hauteur du bâton, on a alors :
$a/l = \tan h$.
On en déduit la latitude du lieu en faisant :
$\phi = 90° + \delta - h$. Aux équinoxes (20 mars et 22 septembre), la déclinaison du Soleil est nulle, de sorte que $\phi = 90° - h$, ce qui permet d'obtenir directement la latitude du lieu : les astronomes de l'Antiquité procédaient de cette façon. L'extrémité de l'ombre d'un bâton planté verticalement sur un sol parfaitement horizontal décrit sous nos latitudes une courbe appelée hyperbole.





Pour en savoir (un peu) plus

R. D'Hollander, L'astrolabe, Histoire, théorie et pratique, éd. Institut Océanographique, Paris, 1999
D. Savoie, Les cadrans solaires, éd. Belin-Pour la Science, Paris, 2003
D. Savoie, La Gnomonique, éd. Les Belles Lettres, Paris, 2007