

La phyllotaxie

Driss Boularas et Daniel Petit

Lorsqu'on observe une plante, on est frappé par la disposition régulière de ses pièces (feuilles, graines, écailles, capitules,...) en hélices ou en lignes droites le long de son axe.

L'Ortie ou la Menthe présentent deux feuilles face à face (disposition opposée), certains Lis, trois ou plus (disposition verticillée); chez certains Cactus et Euphorbes, les pièces sont alignées verticalement (disposition orthostique). La plupart des plantes herbacées à tige grêle portent des feuilles disposées sur une ou deux hélices. Dans le cas d'organes à axe contracté (entre-noeud nul ou presque), comme les capitules de la famille des Compositae (Tournesol, Artichaut,...), ou des cônes (fruits des Conifères), on trouve 3, 5, 8, 13 hélices et même 55 pour les fruits portés par le capitule du tournesol. Presque tous ces nombres se retrouvent dans la suite de Fibonacci (voir l'encadré). Est-ce un hasard ?

La suite de Fibonacci et le nombre d'or

La suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par les valeurs initiales $u_0=u_1=1$ et la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ est appelée suite de Fibonacci et ses termes, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 21, ... sont les nombres de Fibonacci. Si la suite (u_n) tend vers l'infini, celle des rapports $v_n=u_{n+1}/u_n$ (où $v_{n+1}=1+1/v_n$) tend vers un nombre positif, solution de l'équation algébrique $P-l-l=0$. Ce nombre, noté ϕ , en hommage au sculpteur grec Phidias (V^e s. av JC), est égal à

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et est appelé nombre d'or.}$$

Plusieurs explications mathématiques relatives à la disposition des feuilles (phyllotaxie) sont possibles [1].

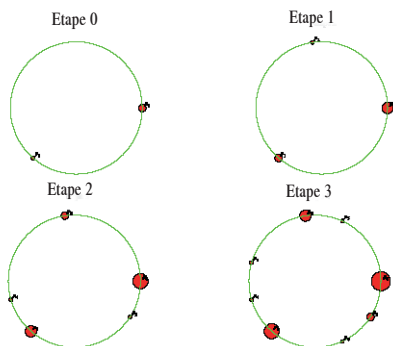
Ici, nous optons pour une modélisation mathématique fortement inspirée de l'article de F. Stoltz [2], basée sur le critère de W. Hofmeister et qui dit que *les primordia (embryons de bourgeons) apparaissent à intervalle régulier dans le ou les plus grands espaces disponibles laissés par les primordia précédents.*

On représente les projections de tous les primordia d'une tige sur un même cercle dans l'ordre temporel d'apparition.

On note α la fraction de tour, appelée divergence, qui sépare deux primordia successifs dans le temps. Ce critère peut être simulé de la façon suivante :

A l'étape 0, nous avons deux primordia p_0 et p_1 qui forment deux arcs, un petit et un grand de valeurs respectives

$$2 \propto \pi \text{ et } 2\pi - 2 \propto \pi .$$



À l'étape **1**, apparaît un seul primordium p_3 sur l'unique grand arc. La valeur du petit arc est $2\pi - 4\alpha$ et celle du grand arc, 2α .

À l'étape **2**, nous aurons deux primordia p_4 et p_5 sur les deux grands arcs. Les valeurs respectives des petits et grands arcs sont $6\alpha - 2\pi$ et $2\pi - 4\alpha$.

On voit ainsi se profiler les nombres de Fibonacci. De façon générale, ne tenant compte que du fait qu'à l'étape n , il naît autant de primordia qu'il y a de grands arcs à l'étape $n-1$, le nombre de petits arcs, à l'étape n , noté u_n , vérifie la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Les valeurs des petits et grands arcs sont égales respectivement à :

$$a_n = (-1)^n(u_{n+1}\alpha - u_{n-1})$$

et

$$b_n = (-1)^n(u_{n-2} - u_n\alpha).$$

De l'inégalité $a_n \leq b_n$ on déduit la suite d'encadrements de α :

$$\frac{u_1}{u_3} \leq \frac{u_3}{u_5} \leq \frac{u_5}{u_7} \leq \dots \leq \alpha \leq \dots \leq \frac{u_4}{u_6} \leq \frac{u_2}{u_4} \leq \frac{u_0}{u_2}$$

Deux cas peuvent alors se produire. Dans le premier, on revient à la position initiale au bout d'un nombre fini d'étapes $u_n a_n = 1$. Grâce à la relation

$$u_{n+1}u_{n-2} - u_n u_{n-1} = (-1)^n, \text{ on peut déduire la valeur de } \alpha : \frac{u_{n-2}}{u_n}$$

Dans le deuxième cas, la valeur de α

$$\text{est limite d'une suite : } \alpha = \frac{1}{\varphi^2}$$

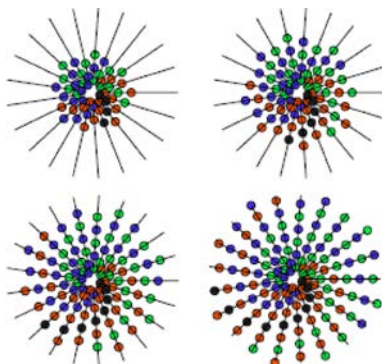
où **phi** est le **nombre d'or**.

Reprenons le calcul des hélices. Sur une pomme de sapin Douglas, on trouve parfois 3 hélices dextres et 5 sénestres, parfois 5 dextres et 3 sénestres. Pour savoir si ce végétal fonctionne avec 3 ou 5 hélices, il faut comparer la régularité des deux types d'enroulement, selon Loiseau et Deschatres [3]. Le système de physiologie régulée permettant l'apparition des primordia des différentes pièces fonctionne en produisant 5 hélices dextres ou sénestres selon les individus ou les branches d'un même individu. L'apparente coexistence de 3 hélices en sens inverse vient de la régularité globale du fonctionnement. Lors de la première brisure, le primordium peut se développer à deux endroits, mais une fois apparu, il détermine le sens d'enroulement des primordia suivants.

Passons à l'explication mathématique.

Mettons nous dans la situation où la divergence d'une plante est égale à

$$d = \frac{u_n}{u_{n+2}} \text{ et partageons le cercle en } u_{n+2} \text{ secteurs égaux. La divergence représente alors } u_n \text{ fois la valeur d'un secteur. On note } p \text{ et } q \text{ le nombre de spirales}$$



La phyllotaxie

dextres et senestres qu'on suppose, pour les premières et les secondes, également espacées. Il s'ensuit pour deux primordia quelconques mais consécutifs sur une même spirale, l'existence de deux entiers k et l tels que

$$pd = k - \frac{1}{u_{n+2}}$$

$$\text{et } qd = l + \frac{1}{u_{n+2}}.$$

Des deux égalités précédentes, on déduit deux équations aux inconnues p et q :

$$pu_n - ku_{n+2} = -1$$

et

$$qu_n - lu_{n+2} = +1.$$

Tenant compte de certaines relations vérifiées par la suite (u_n) et du fait que les nombres u_n et u_{n+2} sont premiers entre eux, les *plus petites* solutions de ces équations sont

$$p = u_k \quad \text{et} \quad q = u_{k+1},$$

ou

$$p = u_{k+1} \quad \text{et} \quad q = u_k$$

Nous remarquons donc que les nombres p et q , des spirales dextres et senestres, sont bien des termes consécutifs de la suite de Fibonacci et donc leur rapport est une valeur approchée du nombre d'or.



Bien que cette explication mathématique de la croissance des plantes s'applique à de nombreux cas et permet une modélisation rationnelle, force est de reconnaître que Dame Nature a bien d'autres façons de s'épanouir.

Par exemple, dans les plantes qui ne suivent pas directement les termes de la suite de Fibonacci, on trouve certains cactus qui admettent $10 = 2 \times 5$ spirales dextres et $16 = 2 \times 8$ senestres.

Driss Boularas et Daniel Petit

Pour en savoir un (un peu) plus

Bibliographie

- [1] R. V. Jean, {\it Croissance végétale et morphogénèse}, éditions Masson, 1983.
- [2] F. Stoltz, {\it Quelques problèmes posés par la phyllotaxie}, Irem de Strasbourg, mai 1979.
- [3] J.E. Loiseau, R. Deschatres, {\it Les phyllotaxies bijuguées}, Mémoire Société Botanique de France, 105-116, 1961.