

Le théorème des quatre couleurs

Benjamin WERNER - INRIA

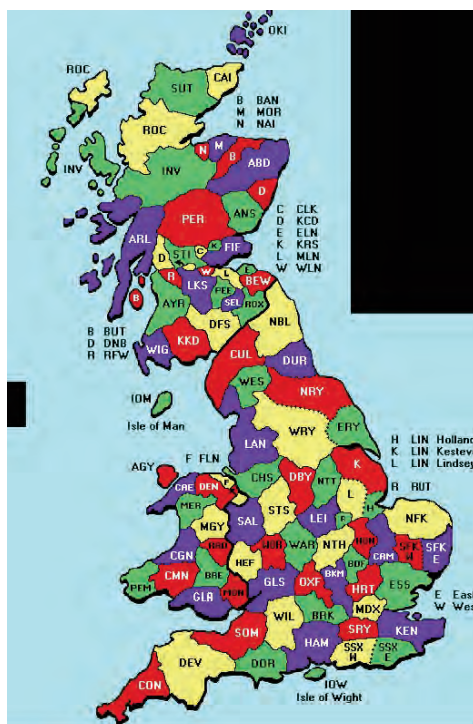
Le théorème des quatre couleurs doit sans doute sa renommée à la simplicité et au caractère concret de son énoncé : il peut être expliqué facilement à un non-mathématicien.

Etant donnée une carte, il est toujours possible de la colorier en assignant une couleur à chaque pays, sans que deux pays ayant une frontière commune n'aient la même couleur et ce avec quatre couleurs seulement !

Remarquons que "frontière commune" ne veut pas juste dire "se toucher en un point". Si ce n'était pas le cas, toute tarte coupée en plus de quatre parts constituerait un contre-exemple au théorème des quatre couleurs.

C'est en 1852 que remonte la première observation du phénomène. Francis Guthrie, cartographe britannique se rend compte qu'il arrive à colorier toutes les cartes qui lui sont présentées en quatre couleurs ; par exemple la carte des comtés britanniques. Ce qu'il n'arrive pas à déterminer, c'est si cette propriété est vraie pour toutes les cartes possibles et imaginables, ou si, au contraire, on sera capable de construire un jour une carte suffisamment compliquée pour que quatre couleurs ne suffisent pas.

S'assurer d'une propriété pour une famille *infinie* d'objets, comme la famille de toutes les cartes, est une question pour les mathématiciens. Par chance, Guthrie étudie alors les mathématiques et suit le cours du grand



logicien Augustus de Morgan. Il pose alors la question : *quatre couleurs suffisent-elles ?*

De Morgan ne trouve pas la réponse, mais prend rapidement conscience de l'intérêt de la question et la transmet à d'autres éminents mathématiciens. La renommée du problème va alors grandissante. La simplicité du problème contraste avec la difficulté pour y répondre. Cela a suffi, et suffit encore, à attiser la curiosité d'innombrables amateurs, qui ont tenté, et tentent encore, de proposer des *preuves* élémentaires.

Le théorème des quatre couleurs

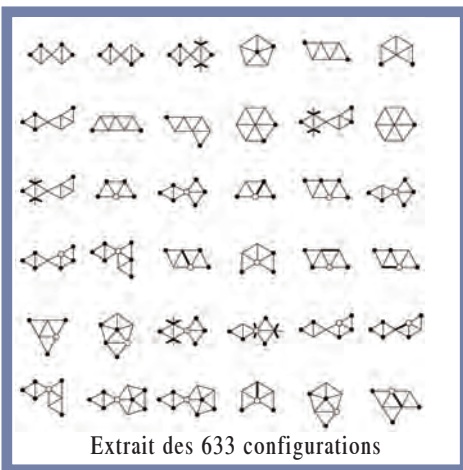
En 1879, Alfred Kempe propose une preuve qui convainc tout le monde, ou plutôt qui convainc tout le monde pendant un certain temps car, en 1890, Percy Heawood découvre une erreur dans l'argument de Kempe : ce dernier n'a en fait démontré que le théorème des cinq couleurs !

Pendant près d'un siècle, rares sont alors les mathématiciens qui n'ont pas passé au moins un peu de temps à essayer de résoudre ce mythique casse-tête. De fait la première preuve correcte est présentée en 1976. Mais paradoxalement, elle ne fait que renforcer le halo de mystère qui entoure le théorème des quatre couleurs. En effet, elle fait appel à des calculs si compliqués que ceux-ci ne peuvent être faits qu'à l'aide d'ordinateurs.

Il faut se rendre compte qu'en 1976 les ordinateurs sont encore incomparablement moins répandus qu'aujourd'hui. Ils coûtent également très chers ; la preuve construite par Kenneth Appel et Wolfgang Haken nécessite 1 200 heures de calculs des ordinateurs les plus puissants de l'époque. C'était un investissement important de la part de leur université.

Pourquoi le calcul ?

Pourquoi de si importants calculs ? En fait, la preuve reprend les idées développées par Kempe en 1879, mais à une plus grande échelle. D'abord, il faut considérer plus de cas : Appel et Haken identifient 1 476 petites cartes particulières appelées *configurations*. Ils vérifient que pour toute carte qui nécessiterait potentiellement plus de



quatre couleurs, apparaît une de ces petites cartes. Il est bien sûr difficile de vérifier cela à la main, mais reste encore possible si suffisamment de personnes s'y mettent. C'est ensuite que les choses se corsent vraiment ; pour chacune de ces 1476 configurations, il faut vérifier qu'il est possible d'étendre un coloriage du reste de la carte à un coloriage de la configuration. Or cela est en général seulement possible après un certain nombre de *réarrangements* du coloriage du reste de la carte. C'est alors qu'il faut considérer les manières dont peuvent s'agencer les coloriages possibles sur la frontière de la configuration, c'est-à-dire pour une seule configuration jusqu'à 50 millions de cas !

En 1995, on a proposé une variante de la preuve de Appel et Haken où l'on ne distingue *que* 633 configurations. Les calculs restent, bien sûr, hors de portée si l'on ne dispose pas d'ordinateurs. Il faut d'ailleurs remarquer que c'est parce que les mathématiciens de 1995 disposaient de machines plus performantes qu'en 1976 qu'ils ont pu trouver une preuve (un peu) simplifiée : on ne prête qu'aux riches !

Le théorème des quatre couleurs

Un cas particulier ?

Aujourd'hui, les calculs nécessaires pour établir le théorème des quatre couleurs peuvent être achevés en une dizaine de minutes par un ordinateur personnel moderne. Il n'empêche que le théorème des quatre couleurs reste fascinant. D'une certaine façon, c'est le premier exemple d'une vérité mathématique qui ne nous est accessible qu'à travers l'utilisation d'une machine : l'ordinateur devient alors *l'instrument du mathématicien*.

Cette situation est-elle appelée à se reproduire ? On connaît maintenant d'autres théorèmes dont la preuve fait appel au calcul informatique. L'un des plus important est appelé la **conjecture de Kepler**. Là encore, l'énoncé est simple et explicable sans utiliser le jargon mathématique :

Lorsque je veux ranger des boules de même taille (par exemple des oranges ou des boules de pétanque), y a-t-il une meilleure manière de faire que celle que l'on voit sur les étals des marchés ?

Même si l'on était, en général, convaincu qu'il n'y avait pas de meilleure manière d'agencer les boules, on n'arrivait pas à *démontrer* le résultat. Or si l'énoncé avait été *conjecturé* dès 1612 par Johannes Kepler, il a fallu attendre 1998 pour que Thomas Hales, de l'université de Pittsburgh présente une *preuve*. Or cette preuve, fait appel à la fois à des concepts mathématiques plus évolués que ceux sous-jacents à la preuve du théorème des quatre couleurs, mais aussi à des calculs informatiques encore plus complexes.

Dans tous ces nouveaux résultats, le



rapport à la vérité mathématique a fondamentalement changé. En effet, le mathématicien ne peut plus *comprendre pourquoi* un résultat comme le théorème des quatre couleurs est vrai. Il ne peut qu'utiliser un maximum de rigueur lors de l'écriture du programme et éventuellement reproduire l'expérience en faisant tourner des variantes du programme sur d'autres ordinateurs.

De fait, Hales a eu un certain mal pour convaincre la communauté mathématique de la correction de sa preuve. En particulier, il est difficile de s'assurer qu'un programme complexe est entièrement libre de *bug* ; le mieux étant finalement de laisser ce travail à l'ordinateur et à un autre programme !

Pour en savoir (un peu) plus :

<http://www.inria.fr/actualites/2005/theoreme4couleurs.fr.html>

<http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Benjamin.Werner/publications.html>