Les grandes matrices aléatoires

Alice GUIONNET

Même si le concept d'aléa est palpable dans la vie de tous les jours et sert de base à des activités lucratives depuis fort longtemps, la théorie des probabilités ne s'est réellement développée qu'au cours du vingtième siècle.

Dans les années vingt, Kolmogorov mit au centre de cette théorie la notion de variable aléatoire. Une variable aléatoire est une fonction qui prend ses valeurs avec une probabilité donnée.

Par exemple, dans un jeu de pile ou face où une pièce est lancée, nous pouvons considérer une fonction qui représente l'événement *la pièce tombe côté pile*. La variable aléatoire vaut un dans ce cas et zéro sinon. Cette fonction prend donc les valeurs zéro et un, chacune avec probabilité un demi... si la pièce n'est pas truquée ! Une autre variable pourrait compter le nombre de fois où pile est apparu pendant n tirages, indépendants les uns des autres (l'indépendance ici signifie que le résultat d'un tirage n'influence pas les autres). On voit ici que les probabilités peuvent être reliées à des problèmes combinatoires. Mais elles sont loin de se restreindre à ce cadre et elles apparaissent aujourd'hui dans de nombreux domaines des mathématiques.

Je m'intéresse au cas où les variables aléatoires prennent des valeurs dans les matrices et non comme plus haut dans un espace à deux états zéro et un.

Une matrice aléatoire est donc un tableau avec M colonnes de longueur N dont les éléments sont des variables aléatoires.

J'étudie particulièrement le cas où M et N sont grands. Ces objets mathématiques apparaissent, comme nous allons le voir, dans des domaines très différents, ouvrant la porte à des connections à explorer.

Les matrices aléatoires sont apparues pour la première fois à la fin des années vingt en statistique dans les travaux de Wishart. La matrice représente alors un tableau de données à analyser. Pour comprendre si ce tableau révèle une corrélation importante des données, Wishart propose de le comparer à ce qui serait observé si les éléments de la matrice étaient choisis de façon aléatoire et indépendante. Les matrices de Wishart servent aujourd'hui à calculer la capacité de réseaux de téléphones portables ! Dans les années cinquante, Wigner proposa d'utiliser les matrices aléatoires en mécanique quantique afin d'interpréter les observations de la dynamique de noyaux soumis à une forte excitation (par exemple le noyau d'hydrogène). La dynamique d'un système quantique est décrite par un opérateur, le Hamiltonien. Wigner modélise ce Hamiltonien par une matrice, choisie la plus aléatoirement possible dans la limite des contraintes connues du modèle. L'expérience confirme ce modèle.

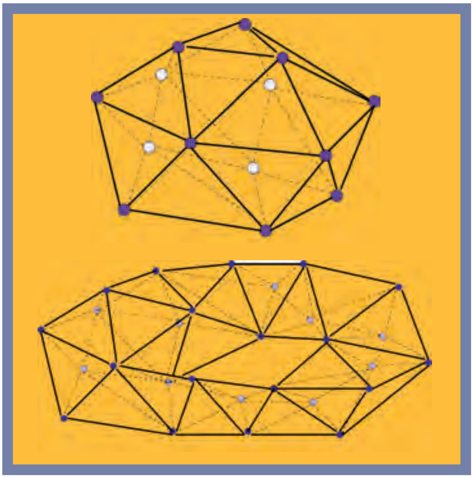
Les grandes matrices aléatoires

Les matrices aléatoires ont également été liées numériquement, sans explication théorique, aux dynamiques chaotiques et à la fonction Zeta de Riemann.

Dans un tout autre contexte, Tutte étudia dans les années soixante la question combinatoire suivante : *de combien de façons peut-on paver un ballon avec 100 triangles ? Que se passe-t-il si on veut paver une bouée ?*

En 1978, Brézin, Itzykson, Parisi et Zuber montrèrent, en spécialisant une idée de Gérard 't Hooft, que cette question était reliée à des matrices aléatoires. Les matrices aléatoires permettent de résoudre des problèmes d'énumération de pavages ou de graphes qui n'ont pas encore trouvé de solution combinatoire.

Dans les années quatre-vingts, Voiculescu introduisit les probabilités libres ; c'est une théorie de probabilité pour des variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace encore plus général que celui des matrices. Les matrices aléatoires, dans la limite où leur taille tend vers l'infini, se placent naturellement dans ce cadre. Voiculescu montra que des matrices aléatoires indépendantes, quand leur taille tend vers l'infini, convergent vers des variables dites libres. Le concept de liberté est fondamental en théories des groupes et d'algèbres d'opérateurs. Dès lors, les matrices aléatoires devinrent une source d'exemples et d'inspiration dans la théorie des algèbres d'opérateurs.



Un domaine merveilleux où se côtoient et se nourissent physique, algèbres d'opérateurs, combinatoire et probabilités !

Issue des classes préparatoires, je suis rentrée à l'Ecole Normale Supérieure où je me suis prise au jeu de la recherche. Je travaille au CNRS depuis ma sortie de l'Ecole, d'abord chargée de recherche (à l'université d'Orsay, à l'Ecole Normale supérieure de Paris puis de Lyon) et, depuis 2005, directrice de recherche.
Les probabilités se sont imposées à moi comme une des branches des mathématiques la plus proche des applications, aussi bien en physique, statistique ou finance.
Mais l'aventure de la recherche est bien de nous mener où elle veut, d'idées en questions, et aujourd'hui mes intérêts sont bien loin de mes premières préoccupations.

Alice GUIONNET

Pour en savoir (un peu) plus :

M.L. Mehta; Random Matrices (Elseiver)

P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn Justin; Article de revue 2D gravity and random matrices, Phys. Rev. 254 (1995)

Site personnel http://www.umpa.ens-lyon.fr/aguionne/(deux articles de revue)