

Transport Optimal

Cédric VILLANI

Vous tenez le standard d'une entreprise de taxis et ce matin vous devez donner des instructions à dix voitures, éparpillées dans Paris, pour récupérer dix clients dans dix endroits différents. *Comment allez-vous apparier voitures et clients de manière à minimiser le temps d'attente total ?*

Comment transporter à moindre frais ?

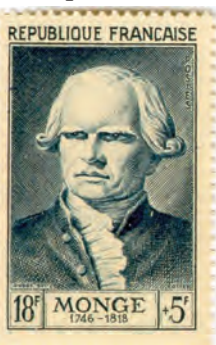
Le problème posé ci-dessus est un cas particulier du problème de **transport optimal**, défini pour la première fois vers 1780 par Gaspard Monge. Ingénieur et mathématicien, père de la géométrie descriptive, ardent révolutionnaire, fondateur de l'École Polytechnique et proche de Napoléon, Monge était l'un des savants français les plus influents de son époque. Son *problème des déblais et des remblais* est du même type que le problème des taxis : *comment transporter des matériaux de construction afin de minimiser le coût de transport total ?*

En 1942, le grand mathématicien russe Leonid Kantorovich (Prix Nobel d'économie) définissait une classe plus générale de problèmes d'optimisation et introduisait de puissants outils pour leur étude théorique et numérique. La *théorie du transport optimal* était née.

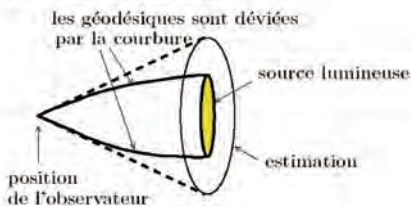
Du transport des déblais à la notion de courbure.

À partir de la fin des années 1980, des chercheurs d'horizons très divers constataient avec surprise que la théorie du transport optimal permettait d'établir des liens entre leurs domaines respectifs : équations des fluides incompressibles, systèmes dynamiques, météorologie, cosmologie, etc. C'est ainsi que vers 2000, une équipe mixte composée de physiciens et mathématiciens publiait une méthode de reconstitution des fluctuations de l'Univers primitif basée sur le transport optimal. Une direction de recherche, très active en ce moment, concerne les applications du transport optimal à la géométrie, et plus particulièrement à l'étude de la **courbure**, qui mesure quantitativement la vitesse de séparation des géodésiques, ou trajectoires des rayons lumineux.

Les géomètres utilisent différentes notions de courbure ; celle qui est le plus directement liée au transport optimal est la courbure dite de Ricci, bien connue pour son rôle majeur dans la théorie de la relativité générale d' Einstein. Dans cette théorie, les corps célestes déforment l'Univers en lui imposant une courbure non



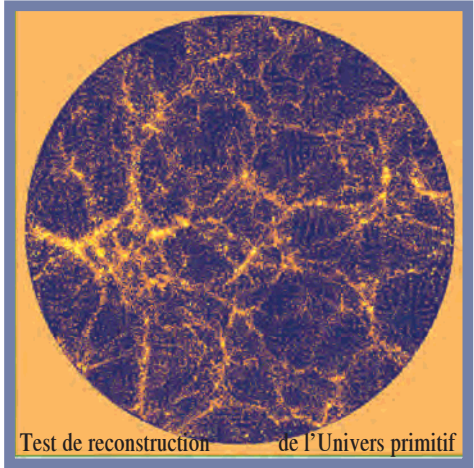
Effet de la courbure de Ricci



Transport optimal

nulle, ce qui dévie les rayons lumineux et modifie les observations : par exemple, si la courbure est positive, on a tendance à surestimer la surface de l'objet observé. Voici maintenant un autre effet de la courbure, que l'on peut exprimer en termes de mécanique des fluides plutôt que de rayons lumineux. Je l'appelle *l'expérience du gaz paresseux*, c'est une expérience de pensée, représentation informelle d'un énoncé mathématique précis (que je ne chercherai pas à infliger à des non-spécialistes !) basé sur le transport optimal.

L'expérience consiste à se donner une répartition de gaz dans l'espace, avec des fluctuations de densité d'une région à l'autre. On impose au gaz une nouvelle configuration, à atteindre en un temps limité, disons une minute. Le gaz obtempère, mais comme il est paresseux, il le fait en évoluant de manière à minimiser l'effort total (mesuré à chaque instant par l'énergie cinétique). Entre le temps initial et le temps final, on étudie les valeurs de l'**entropie**, qui mesure en un certain sens bien précis l'étalement du gaz (l'entropie est d'autant plus grande que la densité est faible). Si l'on vit dans un espace à courbure positive, alors la courbe d'entropie est **concave** ; en particulier elle est située au-dessus de la droite joignant les valeurs initiale et finale. La propriété de concavité est en fait caractéristique des espaces à courbure positive ; ce qui ouvre de nouveaux horizons pour étudier (voire pour redéfinir) les espaces à courbure positive.



En mélangeant des notions d'ingénierie, de mécanique des fluides et de physique statistique, on a ainsi obtenu de nouveaux outils géométriques !

Après ma sortie des classes préparatoires, j'ai fait toute ma carrière dans le merveilleux système des Écoles Normales Supérieures; d'abord à Paris en tant qu'élève et agrégé-préparateur; puis à l'ENS de Lyon en tant que professeur. J'ai découvert le transport optimal grâce aux travaux du Japonais Hiroshi Tanaka qui eut l'idée de l'appliquer à l'étude de l'équation de Boltzmann --le sujet de ma thèse. Des contacts avec les meilleurs spécialistes européens du sujet m'ont permis d'approfondir le sujet. Deux séjours de longue durée aux États-Unis ont joué un rôle crucial dans mes recherches ultérieures : le premier à Atlanta en 1999 où j'ai été invité à dispenser un cours avancé ; le second à Berkeley en 2004 où j'ai rencontré un proche collaborateur. Ce parcours illustre des phénomènes généraux : les voyages à l'étranger, la préparation de cours spécialisés et les collaborations sont des moteurs efficaces (et attrayants) de la recherche mathématique.

Cédric VILLANI

Pour en savoir (un peu) plus :

C. Villani, Transport optimal : coup de neuf pour un très vieux problème; Images des Mathématiques 2004, publication du CNRS : www.spm.cnrs-dir.fr/actions/publications/idm04.htm

Ma page Web contient des références plus spécialisées : www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani