La dynamique qualitative

Étienne GHYS

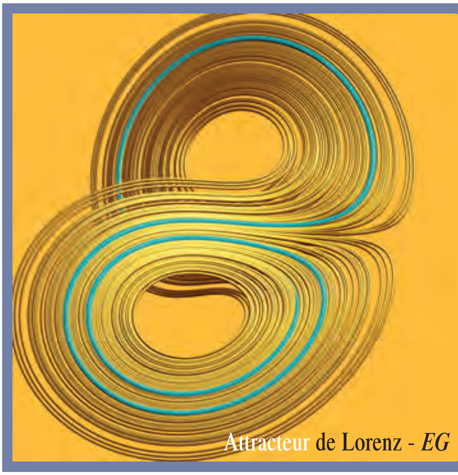
Depuis Newton, on sait que les forces modifient le mouvement. Si la terre était seule dans l'espace, elle se déplacerait à vitesse constante le long d'une trajectoire rectiligne. Mais la force de gravitation exercée par le Soleil modifie cette trajectoire et la Terre tourne autour du Soleil. Il est souvent facile de comprendre les forces qui agissent, mais il est par contre beaucoup plus difficile d'en déduire les trajectoires du mouvement qui en résulte. C'est le but de la *théorie des équations différentielles*.

Pendant deux siècles, il s'agissait de résoudre les équations différentielles, c'est-à-dire de trouver une formule décrivant la trajectoire cherchée. Vers la fin du dix-neuvième siècle, Henri Poincaré prit conscience du fait qu'il est bien souvent impossible de trouver une telle formule. Il décida alors de créer une théorie qualitative, à la fois plus modeste et plus ambitieuse. Lorsqu'un élève essaye de tracer le graphe d'une fonction (sans utiliser sa calculette !), il commence par déterminer ses points remarquables, ses maxima, ses points d'inflexion, ses asymptotes, et ensuite, à main levée, il en déduit l'allure générale de la courbe, ce qui est une information très riche, souvent suffisante pour les applications. Dans la théorie qualitative des systèmes dynamiques, on détermine de même quelques trajectoires remarquables, les positions d'équilibre, les asymptotes, et on essaye ensuite d'en déduire l'allure générale des trajectoires. Pour développer sa théorie, Poincaré a besoin de construire de toutes pièces une autre théorie, préliminaire à toute description qualitative des formes en mathématiques : la topologie.

Un exemple important vient de la mécanique céleste. Si trois masses dans l'espace s'attirent selon les lois de Newton, quelles sont les trajectoires ? Existe-t-il des configurations pour lesquelles le mouvement est périodique ? C'est sur cet exemple que Poincaré met en évidence *le concept de mouvement chaotique*. Depuis un siècle, les théories des systèmes dynamiques et de la topologie se sont largement développées et un tissu serré de liens a été établi avec toutes les autres parties des mathématiques. Par exemple, en 1964, le météorologiste E. Lorenz étudiait le problème extrêmement complexe de la convection dans l'atmosphère. Il n'hésita pas à simplifier l'équation de manière presque caricaturale, passant d'une équation différentielle en dimension infinie à une équation en dimension 3. Lorsqu'il traça les trajectoires de son système avec un ordinateur, il observa un objet remarquable, qu'on appelle aujourd'hui l'attracteur de Lorenz. Appliquée à la météorologie, l'idée de trajectoire chaotique devient le fameux effet papillon : un battement des ailes d'un papillon au Brésil pourrait provoquer un ouragan au Texas ! Les conséquences scientifiques et philosophiques de ce genre d'idées sont importantes, pas seulement en mathématiques. L'attracteur de Lorenz est devenu un objet emblématique de la théorie, d'abord parce qu'il est joli, mais aussi parce qu'il résiste aux perturbations. Dans les années 1980, Birman et Williams ont analysé la nature topologique des trajectoires périodiques : ce sont des courbes fermées dans l'espace qui peuvent donc être nouées. Quels sont les nœuds que l'on rencontre dans l'attracteur ? Il s'agit en quelque sorte de mesurer la complexité topologique de l'objet. Des liens inattendus entre les systèmes dynamiques et la théorie des nombres se sont avérés extrêmement féconds.

Un nombre irrationnel comme π par exemple a un développement décimal infini 3,141592653589... On cherche à l'approcher par des fractions comme 22/7 ou 355/113. On peut toujours le faire, avec n'importe quelle précision, mais le mathématicien aimerait estimer la taille des numérateurs et des dénominateurs en fonction de la précision. C'est le problème de *l'approximation diophantienne* qui peut se traduire dans la dynamique de ce qu'on appelle les *géodésiques sur la surface modulaire*. C'est aussi un système dynamique dans l'espace, dont les trajectoires périodiques ont été étudiées depuis longtemps : elles correspondent aux *entiers quadratiques* comme le nombre d'or !

L'étude topologique de ces entiers quadratiques et des nœuds qu'ils définissent dans l'espace vient d'être réalisée. La surprise est que les nœuds modulaires ainsi obtenus sont *les mêmes* que les trajectoires périodiques



Attracteur de Lorenz - *EG*

dans l'attracteur de Lorenz. Un lien est donc établi entre deux objets d'origines bien différentes :

un plaisir pour le mathématicien !

Après une thèse à Lille en 1979, j'ai eu la chance de faire deux stages post-doctoraux passionnants à l'IMPA de Rio de Janeiro et à l'université de New York. Je travaille sur les systèmes dynamiques et la géométrie, en essayant de mettre l'accent aussi souvent que possible sur les interactions entre les diverses parties des mathématiques. « Provincial convaincu », j'ai participé depuis 1988 à la création et au développement du laboratoire de mathématiques de l'ENS de Lyon. J'ai l'honneur de travailler au CNRS et d'être membre de l'Académie des Sciences.

Étienne GHYS

Pour en savoir (un peu) plus :

A. Chenciner, article dans l'Encyclopédie Universalis.
Systèmes dynamiques différentiables,

E. Ghys et J. Leys, Lorenz and modular flow, a visual introduction,
http://www.ams.org/featurecolumn/archive/lorenz.html

J. Gleick, chez Flammarion
La théorie du chaos : vers une nouvelle science,

I. Stewart, chez Flammarion
Dieu joue-t-il aux dés ? Les mathématiques du chaos,

Théorie du chaos :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Theorie_du_chaos