Itération de polynômes

dans le plan complexe

Jean-Christophe YOCCOZ

Les nombres complexes ont été initialement découverts comme racines manquantes d'équations polynomiales : c'est ainsi que le nombre *imaginaire* i est la racine carrée du nombre - 1. Au XIX^{e} siècle, Cauchy, Riemann et Weierstrass développent le calcul différentiel de Leibnitz et Newton dans le champ complexe et en exposent la richesse très spécifique. Au début du XX^{e} siècle, Pierre Fatou et Gaston Julia étudient l'itération de polynômes et fractions rationnelles dans le plan complexe, s'appuyant sur les idées développées quelques années plus tôt par Henri Poincaré. Après quelques décennies de stagnation relative, leur théorie prend un essor nouveau au début des années 1980, en raison notamment des possibilités de simulation numérique et production d'images offertes par les ordinateurs.

Les nombres complexes s'identifient aux points du plan, appelé dans ce cas plan complexe. Chaque nombre complexe a un module, sa distance à l'origine, et un argument, l'angle que forme le rayon qui le relie à l'origine avec le rayon horizontal positif. L'addition des nombres complexes est celle des vecteurs. Pour multiplier deux nombres complexes, on multiplie leurs modules et on ajoute leurs arguments.

Etant donné un polynôme P à coefficients complexes, on définit une suite à partir de sa valeur initiale z_0 par la relation de récurrence $z_{n+1} = P(z_n)$. On veut comprendre le comportement de cette suite pour tous les choix possibles de z_0. Le cas le plus simple est celui d'un point fixe vérifiant $z_0 = P(z_0) = z_1$ ou plus généralement d'un point périodique vérifiant $z_0 = z_N$ pour un entier $N \geq 1$

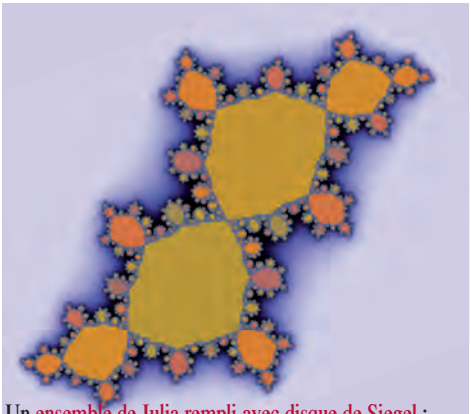
Le cas où P est de degré 1 étant élémentaire, on supposera que le degré de P est au moins égal à 2. On appelle alors ensemble de Julia rempli l'ensemble K des valeurs initiales z_0 pour lesquelles la suite z_n ne s'échappe pas à l'infini. Lorsque la valeur initiale se trouve à l'intérieur de K, le comportement de la suite z_n est simple : soit elle converge vers une orbite périodique, soit elle tourne autour d'une orbite périodique suivant un mouvement de rotation (déformée) d'angle incommensurable avec 2π. Lorsque la valeur initiale z_0 se trouve au contraire sur le bord de K (ce bord constitue l' ensemble de Julia proprement dit), le comportement de la suite z_n est typiquement chaotique, s'apparentant à une suite de tirages au sort d'un dé ou d'une pièce de monnaie.

L'existence de domaines où la dynamique s'apparente à une rotation (de tels domaines sont appelés disques de Siegel) n'était pas connue de Fatou et Julia. Elle dépend de problèmes dits de petits dénominateurs, bien connus des astronomes depuis le XVIII^{e} siècle, mais seulement résolus à partir de 1942 par C.L. Siegel puis un peu plus tard par A. Kolmogorov, V. Arnold et J. Moser (la "théorie KAM"). A la suite des travaux de A. Brjuno et moi-même,

on connaît exactement quels angles donnent lieu à des disques de Siegel pour les polynômes quadratiques.

L'ensemble de Julia est en général un objet fractal : par exemple, pour le polynôme $P(z) = z^2 + c$ avec c petit mais non nul, l'ensemble de Julia est une courbe entourant l'origine dont la dimension fractale est strictement comprise entre 1 et 2.

L'ensemble de Julia n'a pas d'intérieur ; a-t-il pour autant une aire nulle ? La question, évoquée par Julia, a pris de l'importance avec les travaux de D. Sullivan dans les années 1980. Poursuivant une stratégie proposée par A. Douady au début des années 1990, X. Buff et A. Chéritat viennent de montrer que la réponse est négative, en construisant des polynômes quadratiques pour lesquels l'aire de l'ensemble de Julia est strictement positive. Par une suite de perturbations très soigneusement contrôlées, ils font disparaître l'intérieur d'un disque de Siegel sans affecter sensiblement son aire.



Un ensemble de Julia rempli avec disque de Siegel ; l'angle de rotation est égale au nombre d'or.

Crédit photo : Arnaud Chéritat

Après la première étape de la construction de Duff et Chéritat : l'ensemble de Julia rempli, proche du précédent, a un intérieur beaucoup plus mince.

Crédit photo : Arnaud Chéritat

C'est Michel Herman qui m'a initié à la recherche à partir de 1977 alors que j'étais élève à l'Ecole Normale Supérieure. Un long séjour à l'IMPA de Rio de Janeiro a été le prélude à des relations privilégiées avec le Brésil depuis plus de 25 ans. Après avoir été chargé de recherches au CNRS au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, j'ai été professeur à l'Université Paris-Sud (Orsay) avant d'occuper au Collège de France depuis 1996 la chaire d'Equations Différentielles et Systèmes Dynamiques. Je suis membre des Académies des Sciences française et brésilienne, ainsi que de la TWAS (académie des sciences des pays en développement). J'ai reçu la Médaille Fields en 1994 pour mes travaux sur la théorie des Systèmes Dynamiques.

Jean-Christophe YOCCOZ

Pour en savoir (un peu) plus :

A.F. BEARDON, Iteration of Rational Functions, Springer (1991).

L. CARLESON, T.W. GAMELIN, Complex Dynamics, Springer (1993).

J. MILNOR, Dynamics in one complex variable : introductory lectures, Arxiv preprint math.DS/9201272 (1990).

J-C. YOCCOZ, Ensembles de Julia de mesure positive et disques de Siegel des polynômes quadratiques [d'après X. Buff et A. Chéritat], Séminaire Bourbaki n° 966, 2005-2006, p. 385-401.