Des lunettes pour un télescope spatial

sans aller dans l'espace ?

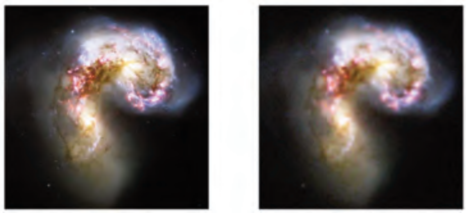
Erwann Le PENNEC et Dominique PICARD

Le télescope spatial Hubble a été lancé en avril 1990, il devait fournir des images d'une qualité inaccessible pour des télescopes terrestres. Les premières images reçues par les astronomes s'avérèrent extrêmement floues du fait d'un défaut physique sur le miroir principal du télescope. Pour corriger ce problème, il suffit d'ajouter quelques optiques supplémentaires, de véritables lunettes... Mais le satellite est en orbite et une telle opération de maintenance est très complexe. Elle ne put être effectuée qu'en décembre 1993, car il fallait trouver une solution à ce problème sans aller dans l'espace.

Les mathématiciens interviennent...

Ce sont les mathématiciens qui ont fourni des outils permettant de créer des lunettes virtuelles corrigeant en grande partie les défauts de l'optique de Hubble. Ils y reconnaissent un exemple d'une classe de problèmes classiques en mathématiques, la classe des problèmes inverses. Il s'agit de retrouver une image de l'espace qui a été dégradée par un opérateur (l'optique du télescope est défectueuse) et l'addition d'une perturbation, (on parle de *bruit* : les capteurs ne sont pas parfaits), à partir de l'observation dégradée et bruitée. En statistique, on dit qu'on cherche à *estimer* l'image initiale. Il n'existe bien sûr pas de méthode universelle pour résoudre ces problèmes. Un principe simple, héritier de la pensée d'Occam, un moine franciscain du XIV^{e} siècle, résume cependant le principe de la plupart des méthodes modernes. Le principe du rasoir d'Occam stipule que *parmi toutes les explications plausibles, il faut choisir la plus simple*. Que signifie ce principe général ici ?

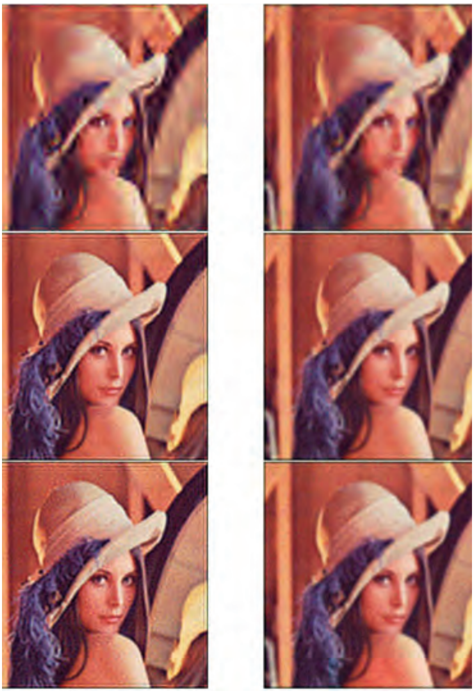
Une *explication* est une image que l'on suppose être l'image initiale. Cette explication est *plausible* si, quand on lui fait subir la dégradation due à l'optique dégradée du télescope et l'addition d'un bruit, elle *ressemble* à l'image observée. La simplicité de l'explication correspond alors à la simplicité de l'image...



Une image idéale à gauche et l'image floue et bruitée observée par Hubble, à droite

Mais qu'est-ce qu'une image simple ?

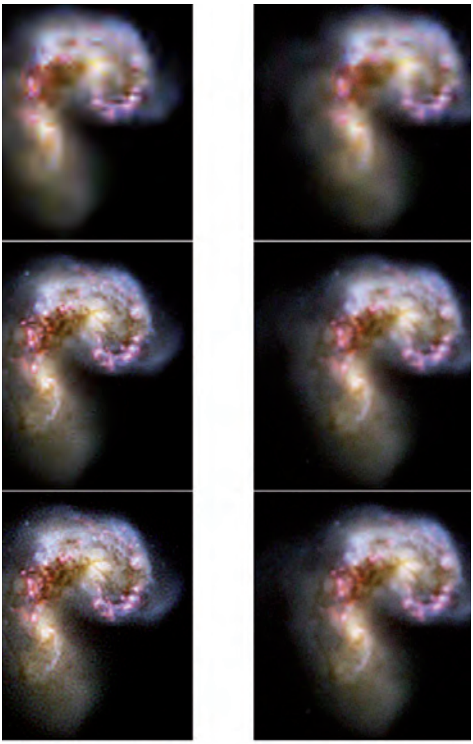
Il n'y a malheureusement pas de définition universelle de la simplicité d'une image et encore moins de définition universelle mathématique. Les mathématiciens s'accordent cependant sur la notion de concision : une image simple est une image qui se décrit avec peu de paramètres. Encore faut-il savoir décrire mathématiquement une image... La décomposition dans une base orthonormée fournit souvent un outil efficace pour cela. Comme une position sur le globe terrestre est donnée par sa latitude et sa longitude, une image peut être spécifiée par ses coordonnées dans une base. La simplicité d'une image se traduit alors par la simplicité de ses coordonnées, par exemple le fait que beaucoup d'entre elles soient nulles. Cette simplicité dépend alors de la base utilisée et le choix d'une base adaptée aux images est donc crucial. Une image numérique est une mosaïque (une matrice) de pixels. La couleur de chacun de ces pixels est spécifiée par une valeur de rouge, une valeur de vert et une valeur de bleu. Si toutes les coordonnées sont nulles le pixel est noir. Une image peut ainsi être décrite par la liste de ces valeurs et cela correspond à la décomposition dans une base dite canonique. Malheureusement, les images simples dans cette base ne correspondent pas aux images naturelles simples. Il existe cependant des bases dans lesquelles les images simples correspondent bien aux images naturelles simples : les bases multi-échelles d'ondelettes qui décrivent les images comme des superpositions d'imagettes élémentaires simples et identiques mais dont on fait varier les tailles et les positions.



Des explications de plus en plus complexes de haut en bas et à droite leurs versions floutées et bruitées. L'image du milieu est le meilleur compromis entre simplicité (l'image de gauche n'est pas trop complexe) et une bonne explication (l'image de droite ressemble à l'image perçue)

Vers un bon compromis ...

Pour estimer une image à partir de son observation dégradée et bruitée, il faut donc faire un compromis entre la simplicité de l'image et l'adéquation entre cette image et l'observation. Il existe de nombreuses manières de définir mathématiquement ce compromis et de rechercher une image réalisant le meilleur compromis. Les statisticiens parlent de méthode de seuillage, de sélection de modèles, de modélisation bayésienne et de bien d'autres choses... Pour comparer ces estimateurs, on peut regarder leurs performances sur des données réelles (traitement du signal) ou leurs propriétés mathématiques (statistique). Ce problème est en fait délicat et les deux types de comparaison sont nécessaires. En effet, il est indispensable qu'une méthode soit satisfaisante en pratique, néanmoins il n'est pas possible de la tester sur 'toutes' les images et le fait qu'elle donne de bons résultats sur quelques cas ne préjuge pas de sa qualité sur les autres. Une étude mathématique est donc nécessaire.



Des explications de plus en plus complexes de haut en bas et à droite leurs versions floutées et bruitées. L'image du milieu est le meilleur compromis entre simplicité (l'image de gauche n'est pas trop complexe) et une bonne explication (l'image de droite ressemble à l'image perçue par Hubble)

Le télescope spatial Hubble - crédit NASA

Cependant on retrouve là le problème de la description mathématique d'une image qui n'est pas définitivement résolue. Les modèles que nous possédons actuellement sont encore partiels. Heureusement, la plupart du temps ce sont les mêmes estimateurs qui sont les meilleurs selon les deux critères.

La théorie et la pratique se rejoignent..

Les mathématiques ont constitué pour moi une aventure rencontrée par hasard (au lycée) et qui a pris petit à petit une grande place dans ma vie. L'étude mathématique des phénomènes probabilistes m'a montré, que si on ne maîtrisait pas le hasard, on pouvait toutefois apprendre à le comprendre et parfois à le déjouer.

Dominique Picard

Pour en savoir (un peu) plus :

Le rasoir d'Occam :
http://en.wikipedia.org/wiki/Occam

E. Le Pennec La compression d'images dans "Images des mathématiques,
http://www.math.cnrs.fr/imagesdesmaths/

Nos pages web qui contiennent des références plus spécialisées :
www.math.jussieu.fr/~lepennec
www.proba.jussieu.fr/pageperso/picard/picard.html