

# La percolation à la température critique

Wendelin WERNER

Nous allons décrire un modèle de configurations aléatoires obtenues en coloriant au hasard les couleurs de chaque site dans un réseau plan, pour lequel de nouveaux résultats ont été démontrés récemment. Nous présenterons quelques idées et outils utilisés pour les démontrer et nous les placerons dans un contexte un peu plus général. Cet article étant de nature introductive, il décrit surtout des idées générales, dues à des physiciens et des mathématiciens. La dernière partie abordera des aspects plus récents.

## Aléa microscopique et déterminisme macroscopique.

De nombreux événements se prêtent à une interprétation probabiliste. Avant qu'ils ne se produisent, leur issue est incertaine, mais on peut tout de même la décrire à travers sa loi. Si l'on tire à *pile* ou *face*, on aura une chance sur deux d'observer *pile*. Les phénomènes aléatoires peuvent ensuite se combiner pour former de nouveaux événements, aléatoires eux aussi. Par exemple, on peut tirer 10 000 fois à *pile* ou *face* et regarder le nombre total de résultats *pile*.

L'un des buts de la théorie des probabilités est de décrire mathématiquement le comportement de très grands systèmes dans lesquels se combinent un très grand nombre de phénomènes aléatoires. Traditionnellement, le premier résultat probabiliste enseigné aux étudiants de niveau licence est **la loi des grands nombres**, que l'on

peut décrire à l'aide du modèle de pile ou face précédent. Cette loi affirme que l'incertitude du résultat devient de plus en plus petite lorsque la taille du système augmente. A la limite quand celui-ci devient infini, le résultat de l'expérience a perdu son caractère aléatoire et devient déterministe (on a alors 50% de *pile*). Parmi les systèmes bien modélisés de manière probabiliste, on peut mentionner les systèmes de particules physiques. Au niveau microscopique, le comportement désordonné des particules peut être supposé aléatoire. Comme on s'intéresse au comportement d'un système qui comporte un très très grand nombre de composantes microscopiques, le problème est de même nature : on observe le résultat au niveau macroscopique d'une *expérience* aléatoire au niveau microscopique. C'est le principe de la Physique Statistique. Là encore, les principaux résultats montrent un comportement macroscopique déterministe malgré l'aléa microscopique.

## Aléa microscopique, aléa macroscopique : la percolation critique.

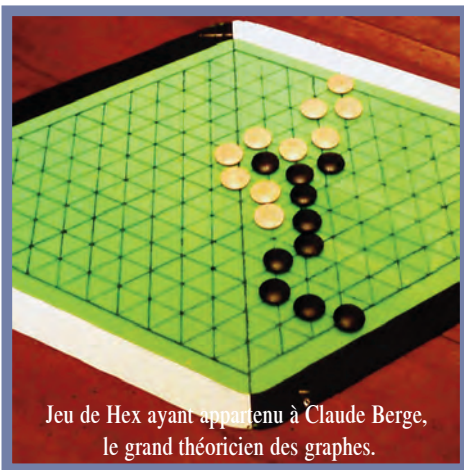
Le second résultat probabiliste enseigné en Licence est le théorème de **la limite centrale** qui décrit (dans le cas d'un grand nombre de tirages à *pile* ou *face* décrit précédemment) la loi de la (très petite) déviation entre le résultat effectif et le résultat déterministe prévu. Si l'on chausse des lunettes très sensibles, on voit malgré tout que le

résultat est aléatoire, et on peut décrire sa loi. Ce résultat est à la base de nombreuses applications en statistiques (par exemple les sondages d'opinion).

Nous allons considérer un autre modèle pour lequel on obtient des résultats aléatoires au niveau macroscopique. Nous allons encore effectuer un très grand nombre de tirages à *pile* ou *face*, et nous intéresser à d'autres phénomènes observables que la proportion de tirages *pile*. Découpons un grand losange sur un réseau en forme de nid d'abeille. Pour chaque cellule microscopique en forme d'hexagone, on tire à *pile* ou *face* sa couleur (qui est noire si on tire *pile*, ce qui se produit donc avec une chance sur deux, et blanche si on tire *face*). Ainsi, on obtient un coloriage aléatoire du losange. On recherche alors un chemin blanc (ou un chemin noir) sans coupure qui va d'un bord au bord opposé du losange.

Il existe un jeu sur plateau appelé *Hex* où deux joueurs déposent tour à tour un pion de leur couleur sur un tel losange de taille 10x10. Le gagnant est celui qui arrive à placer un chemin joignant les côtés opposés du losange avant que son adversaire ait réussi à le bloquer en plaçant un chemin joignant les deux autres côtés opposés. On peut montrer qu'il n'existe pas de partie nulle à ce jeu : lorsque le losange est entièrement rempli, l'un, et uniquement l'un des deux types de chemin, est présent.

Dans le cas où le coloriage est aléatoire, il est clair, par symétrie, que les deux événements : *il existe un chemin blanc de bas en haut* et *il existe un chemin noir de gauche à droite* ont



autant de chances l'un que l'autre d'être réalisés. Ceci est vrai indépendamment de la taille du losange. Ainsi, pour ce modèle, certains événements restent aléatoires au niveau macroscopique. La manière dont les aléas microscopiques se combinent pour décider *s'il existe un croisement blanc de gauche à droite* est de nature différente de l'exemple précédent. On peut penser que le fait d'avoir tiré plus de *pires* que de *faces* aide à construire un croisement. C'est bien le cas, mais dans la limite où la maille du réseau est très petite, les deux événements *il existe un croisement noir de gauche à droite* et *on a tiré plus d'hexagones noirs que d'hexagones blancs* deviennent asymptotiquement indépendants (ce résultat dû à Benjamini, Kalai et Schramm n'est pas du tout simple). On peut aussi montrer - c'est un résultat des mathématiciens Russo, Seymour et Welsh vers la fin des années 1970 - que si l'on remplace les losanges par d'autres formes, les probabilités de croisement ne tendent ni vers un ni vers zéro lorsque la maille du réseau considéré devient infiniment

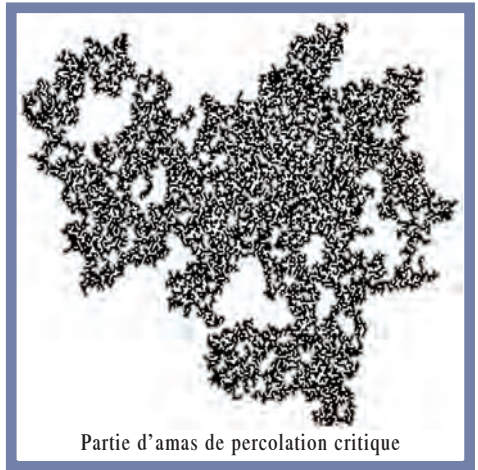
## La percolation à la température critique

petite ; l'évènement reste aléatoire. Une autre approche consiste à étudier la forme des îles noires (on dit mathématiquement des «composantes connexes» noires).

Voici ci-contre, une partie d'une (grande) île. Le précédent résultat suggère l'existence d'une loi limite pour la forme de ces grandes îles. Elles ont un bord extérieur, que l'on peut diviser en deux parties : la plage extérieure (tournée vers l'océan) et les fjords (desquels on ne peut s'échapper directement sans repasser près de la plage extérieure).

Présentons quelques résultats prédits par les physiciens théoriciens, et prouvés récemment par les mathématiciens :

- La probabilité pour qu'il existe un croisement de gauche à droite d'un rectangle donné tend vers une limite lorsque le réseau devient très petit.
- On peut donner un sens rigoureux au fait que les grandes composantes connexes ont une forme aléatoire limite.
- Une grande composante connexe de diamètre  $N$  contiendra (en moyenne) environ  $N^{91/48}$  points. Son bord extérieur contiendra (en moyenne) environ  $N^{7/4}$  points, et la plage extérieure contiendra (en moyenne) environ  $N^{4/3}$  points.
- Il peut y avoir en même temps de l'ordre de  $N^{3/4}$  points blancs tels que si un seul d'entre eux changeait de couleur, il n'y aurait plus de croisement d'un losange donné de taille  $N$  alors qu'il y en avait un avant. Ces résultats sont en fait liés à la notion de dimension fractale. Ils ne sont pas démontrés par une méthode énumérative consistant à donner des



formules exactes pour les modèles sur réseau. Il faut utiliser plusieurs idées et concepts mathématiques sophistiqués, et c'est ce qui fait leur intérêt mathématique.

### Quelques outils utilisés.

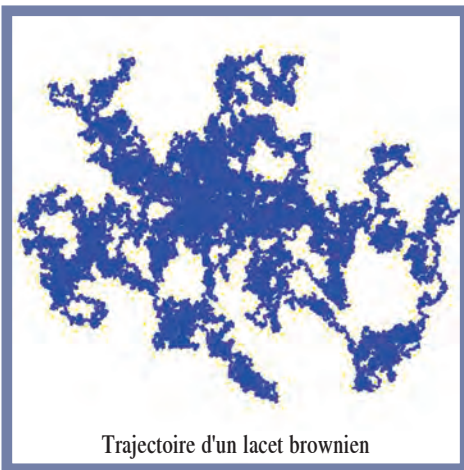
Ce modèle de percolation est l'archétype du modèle *critique* en physique. On peut le généraliser en décidant de tirer à pile ou face avec une pièce biaisée qui a une probabilité  $p$  de tomber sur *pile* et  $1-p$  de tomber sur *face*. Si  $p > 50\%$ , les probabilités de croisement tendent vers un (à grande échelle, on a un seul grand continent), et si  $p < 50\%$ , elles tendent vers 0 (on a alors à grande échelle un seul grand océan et de petites îles). Ainsi, lorsque l'on fait varier le paramètre  $p$ , on a un changement qualitatif abrupt, une *transition de phase* lorsque  $p$  passe par 50%. Comprendre un modèle *critique* permet aussi de comprendre son comportement lorsque le paramètre est proche du point critique. Par exemple, en utilisant les résultats obtenus pour la percolation critique, on peut montrer que, lorsque  $p$  est supérieur (mais très

## La percolation à la température critique

proche) de 50%, alors la densité du continent infini (c'est-à-dire la proportion de sites qui sont dans le continent infini) est de l'ordre de  $(p-0,5)^{5/36}$ .

Une clé pour comprendre la percolation critique consiste à montrer que **ce modèle est asymptotiquement invariant conforme**. Ceci peut être formulé de la manière suivante. Considérons la percolation critique dans un carré (pour un réseau hexagonal de maille très fine). On observe alors des composantes connexes blanches et noires. Puis, regardons l'image obtenue en envoyant le carré dans le disque par une application conforme, c'est à dire une déformation qui conserve les angles droits. On observe alors une image de composantes connexes distordues. L'invariance conforme dit que cette image a cependant la même loi que celle que l'on aurait obtenue en considérant directement une percolation (de maille très très fine) dans le disque. Cette propriété, conjecturée par les physiciens théoriciens, a été démontrée en 2001 par le mathématicien russe Stanislav Smirnov.

Une seconde clé consiste à comprendre comment exploiter cette propriété. Vers 1999, le mathématicien israélien Oded Schramm a décrit le comportement (lorsque la maille du réseau est très très fine) des frontières extérieures de percolation par l'intermédiaire d'**itérations d'applications conformes aléatoires**. Ceci permet d'identifier les seules limites



Trajectoire d'un lacet brownien

invariantes conformes possibles pour les formes des amas de percolation critique. Il faut alors comprendre les propriétés des itérations d'applications conformes, et les relier au modèle de percolation discrète, ce que nous avons fait en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, et avec Stanislav Smirnov.

Une troisième idée, développée avec Greg Lawler et Oded Schramm, consiste à montrer que **les formes aléatoires ainsi définies ne sont pas propres au modèle de percolation critique**. Par exemple, le dessin ci-dessus représente l'ensemble des points visités par une marche aléatoire dans le plan. Plus précisément, on imagine qu'un promeneur choisisse au hasard parmi toutes les balades possibles qu'il peut faire (en un très long temps donné) en partant et en retournant à sa maison.

Ainsi, il fera beaucoup de va-et-vient et passera de nombreuses fois par certains points (et n'ira pas très loin). Mathématiquement, on dit que cette trajectoire est un **lacet brownien**.

## La percolation à la température critique

Un résultat récent de 2005 montre que la forme aléatoire de la *plage* ainsi définie a exactement la même loi que celle définie par les très grands amas de percolation critique. Ceci est à rapprocher de la conjecture de Benoît Mandelbrot (démontrée avec Lawler et Schramm en 2001) qui dit que la dimension fractale de cette plage est  $4/3$  (ce qui correspond au nombre  $N^{4/3}$  de points sur la plage des amas de percolation).

### Médaille Fields



Côté Pile



Côté Face

## En conclusion

La percolation que nous venons de décrire n'est qu'un modèle parmi d'autres pour lequel les idées mathématiques tournant autour de l'invariance conforme et de l'itération d'applications conformes aléatoires s'appliquent.

Cependant, il reste de nombreuses questions fondamentales ouvertes pour des modèles naturels. Par exemple, on ne sait pas montrer l'invariance conforme de la percolation critique sur d'autres réseaux plans.

Mentionnons l'importance des contributions des physiciens théoriciens (par exemple via le développement de la théorie conforme des champs dans les années 1980) comme Cardy, Nienhuis, Duplantier ou Saleur (ces deux derniers sont au Commissariat à l'Energie Atomique sur le plateau de Saclay).

J'ai effectué mes études secondaires et supérieures en France. A l'issue de ma scolarité à l'Ecole Normale Supérieure en 1991, j'ai été chargé de recherches au CNRS, et, depuis 1997, je suis professeur à l'université Paris-Sud (Orsay). Pour mes travaux sur les phénomènes aléatoires plans, dont beaucoup ont été effectués en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, j'ai obtenu la médaille Fields en été 2006.

Wendelin Werner

### Pour en savoir (un peu) plus :

WendelinWerner : liens vers des articles et interviews à partir de la page web  
<http://www.math.u-psud.fr/~werner/vulga.html>

WendelinWerner : La Recherche Mai 2007 :  
Les frontières aléatoires  
entre physique et mathématiques