La conjecture de Riemann

Un problème pour un millénaire

Benoît RITTAUD

Quels seront les problèmes qui occuperont le plus les mathématiciens des mille prochaines années ? Difficile de prétendre répondre à cette question si l'on pense aux incroyables bouleversements qui ont accompagné les mathématiques depuis l'an mil.

Des mathématiciens ont pourtant relevé le défi.

Offerte par l'Institut Clay de Mathématiques, fondé par Landon Clay et sa femme à la fin des années 1990, la somme est à la hauteur de l'importance des questions posées par ces problèmes.

CLAY MATHEMATICS INSTITUTE

Sept problèmes,
un million de dollars
pour chacun d'eux.

P vs NP
Conjecture de Hodge
Conjecture de Poincaré
L'hypothèse de Riemann
Yang-Mills et hiérarchie de masse
Navier-Stokes et comportement continu
Conjecture de Birsch et Swinnerton-Dyer

Difficile de résumer en quelques mots la teneur des questions mises à prix par l' Institut Clay : certaines d'entre elles sont extrêmement difficiles, comme la *conjecture de Hodge*, pour laquelle les mathématiciens même spécialistes doivent consacrer plusieurs heures rien que pour en comprendre l'énoncé !

Parmi les sept problèmes, la conjecture de Riemann, communément appelée hypothèse de Riemann, occupe une place à part. Cette conjecture postule que, en-dehors de cas triviaux sans grand intérêt, les solutions *s* de l'équation :

$$1+1/1^s+1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s+\cdots=0$$

sont toutes des nombres complexes de partie réelle égale à 1/2 .

Il existe différents énoncés équivalents de la conjecture posée au XIX^e siècle par Georg Riemann, celui que nous donnons fait appel, outre à la notion de *série* (l'idée selon laquelle on peut ajouter des nombres les uns aux autres de façon répétée et infinie), à celle de *nombre complexe*.

Un nombre complexe est un nombre, que l'on peut toujours écrire sous la forme a+b*i*, et dans lequel a et b sont deux nombres *réel*s ordinaires et où *i* est une abstraction mathématique définie pour l'occasion et qui vérifie que $i^2 = -1$ (alors que, comme chacun sait, il n'existe aucun nombre réel qui, multiplié par lui-même, donne une valeur négative). Les opérations sur les nombres complexes généralisent de façon assez naturelle celles sur les nombres réels auxquels nous sommes plus habitués, même s'ils recèlent aussi des pièges parfois inattendus.

La conjecture de Riemann

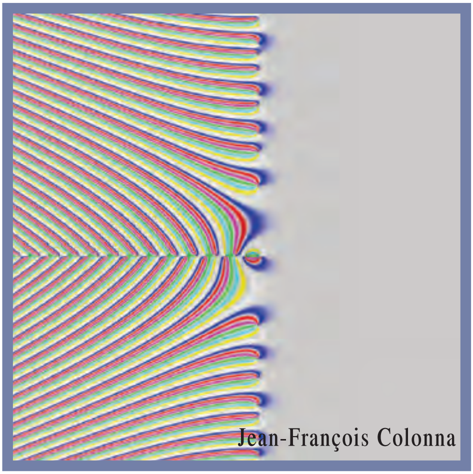
La somme z(s), définie par
$1+1/1^s+1/2^s+1/3^s+1/4^s+1/5^s+\cdots$
avec le nombre complexe $s = a+bi$, ne tend vers un nombre fini que pour $a > 1$. Mais on arrive à donner un sens à cette somme par une technique devinée par Euler et expliquée complétement par Riemann.

Ce qu'affirme la conjecture de Riemann, c'est que, sauf dans des cas particuliers simples à traiter, la somme z(s) ne vaut 0 que lorsque le nombre complexe s = a+bi vérifie a = 1/2 (il s'agit d'une condition nécessaire mais non suffisante, c'est-à-dire qu'il faut que a = 1/2 pour espérer que z(s) soit nul, mais que le fait que a = 1/2 ne le garantit pas à lui tout seul - loin de là).

Cette conjecture peut paraître bien éloignée de ce que pourraient être des préoccupations légitimes d'ingénieurs, d'informaticiens et plus généralement d'utilisateurs de mathématiques, tournées vers la fabrication d'ailes d'avion toujours mieux profilées, d'algorithmes toujours plus rapides ou encore de ponts toujours plus grands et solides.

On sait pourtant aujourd'hui que la conjecture de Riemann est probablement le *Graal des mathématiques*, c'est-à-dire que sa démonstration changerait à jamais la face de la discipline.

L'impact des démonstrations de la conjecture de Riemann (ou sa réfutation) sur notre vie de tous les jours, serait réel et concernerait notamment certains protocoles sécurisés sur internet qu'il conviendrait de modifier pour éviter que les immenses connaissances sur les nombres que donnerait



Visualisation tri-dimensionnelle de la fonction Zeta, les zéros sont alignés sur la droite critique à l'extrémité des zones bleues.

cette conjecture ne facilite par trop le travail des pirateurs de tout poil.

Mais l'essentiel serait bien ailleurs. L'essentiel est qu'une nouvelle page de la science mathématique serait tournée et que le mathématicien, ou probablement l'équipe de mathématiciens, qui tranchera définitivement la question posée par Riemann permettra aux mathématiques de son siècle (qui n'a aucune raison d'être le nôtre, tant la question paraît difficile) d'être définitivement transfigurées.

Une ambition bien plus vaste que de celle de gagner quelques sous sur internet.

Pour en savoir (un peu) plus

Keith DEVLIN aux éditions Le Pommier, en 2005
Les énigmes mathématiques du 3ème millénaire, .

http://www.math.univ-paris13.fr/~rittaud