Géométrie, une longue histoire

Elisabeth BUSSER

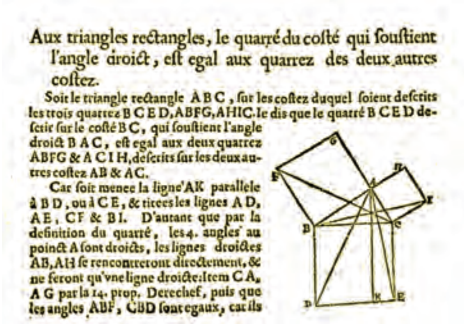
Dés l'époque secondaire, les mollusques construisaient leur coquille en suivant les leçons de géométrie transcendante disait Gaston Bachelard. C'est dire l'emprise de la géométrie sur nos vies et cela pourrait expliquer pourquoi l'approche du monde des premiers mathématiciens a été géométrique. La géométrie, science des figures au départ, a permis le développement de la pensée mathématique pendant deux millénaires. Ce sont des problèmes connexes à la géométrie qui ont permis parallèlement le développement d'autres branches des mathématiques. La géométrie a beaucoup évolué au cours des siècles et aujourd'hui ses *images* permettent de comprendre les concepts mathématiques qu'elle a fait émerger et qui ont maintenant un développement autonome.

L'héritage grec

Au départ, la géométrie est la science des figures. Ainsi, en Egypte ancienne, où la géométrie d'arpentage est de mise, naît, à côté de la pratique, un début de science géométrique, mettant en particulier en évidence certaines propriétés du triangle et du cercle.

En Grèce, il reste du VI^{e} siècle avant J-C. un grand nombre de résultats géométriques et les noms de grands géomètres : Thalès, le premier savant philosophe, le premier à faire de l'angle une grandeur fondamentale, comme la longueur, l'aire ou le volume, puis Pythagore, Hippocrate de Chios, Eudoxe de Cnide, … Avec eux, on traite de l' inscription d'une sphère dans un cône, la similitude des triangles, les propriétés du cercle, des polygones et des polyèdres, des coniques. Les Eléments d'Euclide (-330, -270) constituent la première synthèse, avec le souci de *fonder* la géométrie et d'en faire une science démonstrative au sens d'Aristote. *Ce que nous appelons savoir c'est connaître par la démonstration* disait ce dernier.

Le théorème de Pythagore vu par Euclide


Aux triangles rectangles, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egal aux quarrez des deux autres coſtez.

Soit le triangle rectangle A B C, ſur les coſtez duquel ſoient deſcrits les trois quarrez B C E D, ABFG, AHIC. Ie dis que le quarré B C E D deſcrit ſur le coſté B C, qui ſouſtient l'angle droict B A C, eſt egal aux deux quarrez ABFG & A C I H, deſcrits ſur les deux autres coſtez AB & AC.

Car ſoit menee la ligne AK parallele à B D, ou à C E, & tirees les lignes A D, A E, CF & B I. D'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au poinct A ſont droicts, les lignes droictes AB, AH ſe rencontreront directement, & ne feront qu'vne ligne droicte: Item C A, A G par la 14. prop. Derechef, puis que les angles ABF, CBD ſont egaux, car ils

On retient surtout d'Euclide la rigueur de la méthode et la tentative de classification des résultats. On doit à Archimède (-287, -212), plus physicien que mathématicien, la première valeur précise du nombre π, entre 3 + 10/71 et 3 + 10/70. L'un des ouvrages les plus complets de la mathématique grecque est les *Coniques d'Apollonius de Perge* (fin du III^{e} siècles avant J-C.). Il y rassemble des résultats déjà connus auxquels il mêle les siens propres, traitant toutes les sections coniques à partir du même cône. Après Apollonius, les mathématiciens comme

Géométrie, une longue histoire

Hipparque de Metaponte (environ vers 150 avant J-C.) établissent des tables donnant les mesures des cordes d'un cercle équivalentes à nos tables de sinus, dont la précision va augmenter avec les travaux de Ptolémée (IIe siècle après J-C.) Après Ptolémée va s'instaurer une tradition d'étude des connaissances mathématiques des siècles antérieurs, dont les développements vont apparaître dans le monde arabo-islamique.

Si les mathématiciens arabes sont allés bien au-delà des Grecs dans le domaine algébrique et numérique, on trouve peu de géométrie si ce n'est celle des Grecs dans les ouvrages de mathématiques arabes du Moyen-Age, qui la présentent plutôt sous un jour calculatoire (aires, longueurs…). Dans les ouvrages d'Al-Khwarizmi et d'Abul-Wafa les formules sont nombreuses. Par exemple Le *Livre nécessaire aux scribes* est en fait un mémoire de calcul : calcul de l'aire d'un triangle semblable à celle de Héron, calcul de l'aire d'une sphère en fonction de celle d'un de ses grands cercles, calcul du volume en fonction de la surface.

De l'algèbre dans la géométrie

Allant au-delà de la géométrie de figures, les Grecs ont préparé le terrain à l'étude la géométrie analytique. Ils ont eu l'idée de lier géométrie et relation entre certaines quantités variables en faisant intervenir deux paramètres préfigurant nos actuelles coordonnées. Apollonius les utilise par exemple pour écrire des *équations* des coniques.
Nicolas Oresme, lui, va au XIVe siècle imaginer une représentation graphique

Portulan extrait de l'atlas dressé en 1467 par le navigateur Grazioso Benincasa. Ce sont les cartes marines les plus précises et renseignées de l'époque.

utilisant une *latitudo* et une *longitudo*, comme abscisse et ordonnée. Descartes reprendra dans sa *Géométrie* les calculs d'Apollonius et les généralisera au lieu de les limiter à une figure donnée. Ses notations symboliques, où constantes et variables sont représentées par des lettres, vont considérablement alléger ses calculs, contrairement à Fermat qui, pour arriver aux mêmes résultats, continue d'utiliser l'algèbre géométrique des Grecs. Sa technique permet à Descartes d'aborder des problèmes de lieux géométriques restés jusqu'alors sans solution évidente. La géométrie analytique s'étend à l'espace avec Clairaut vers 1731 et Euler, qui donne en 1748 une formule claire de changement d'axes.

Lagrange (vers 1770) va rompre avec ce mélange de considérations géométriques et analytiques en faisant de la géométrie sans figure, par une approche purement analytique. Monge (1746-1818), dont l'œuvre géométrique est immense, utilise à fond la géométrie analytique : il étudie par exemple les surfaces uniquement à l'aide d'équations aux dérivées partielles. Il imagine aussi des représentations de solides de l'espace en les projetant sur deux plans : c'est le début de la géométrie dite *descriptive*.

Géométrie projective : une autre approche

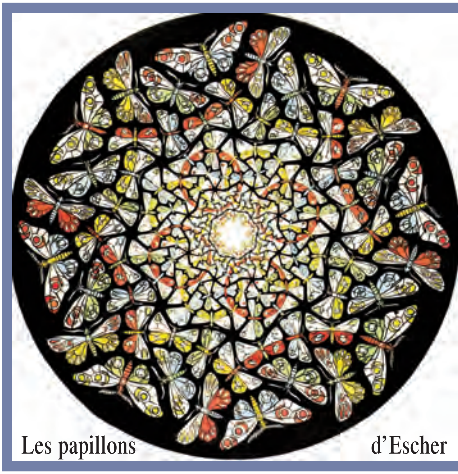
La géométrie projective est née de l'étude de la représentation en perspective. Ce qui était difficile pour les Anciens, même s'ils percevaient déjà la notion de *point de fuite*, est devenu naturel pour les peintres italiens du Quattrocento, sous l'impulsion d'architectes comme Brunellesci et Alberti vers 1435. Piero Della Francesca (1416-1492) est le premier théoricien de la perspective et Léonard de Vinci, à la fin du XV^{e} siècle donne des règles du dessin perspectif, suivi par Dürer qui les établit rigoureusement dans son traité *Unterweysung der Messung* (entre 1525 et 1538). La perspective de ces peintres est la projection centrale, associant à tout point de l'objet à représenter sa projection sur le plan du tableau, c'est-à-dire l'intersection entre le plan du tableau et la droite joignant l'œil de l'observateur au point à représenter. Dans ce mode de représentation, les parallèles non parallèles au plan du dessin sont représentées comme sécantes au point de fuite. Les parallélogrammes ne sont donc pas représentés par des parallélogrammes, les cercles pas par des cercles, les milieux ne sont pas conservés, mais les alignements subsistent. Quelles sont alors les propriétés qui restent vraies ? L'alignement, certes, mais aussi le birapport de quatre points alignés A, B, C, D, défini en son temps par Apollonius et Pappus (II^{e} siècle après J-C.).

La géométrie de Dürer

C'est la conservation du birapport qui va fonder la géométrie projective, l'étude des propriétés des figures qui se conservent par une succession de perspectives centrales, des transformations projectives. Le point de fuite sera le point à l'infini de toutes droites d'une même direction perpendiculaire au plan du tableau. L'architecte-ingénieur Desargues (1593-1662) va tenter de simplifier cette nouvelle théorie, suivi par Pascal qui, vers 1658, théorise ses idées.

Un peu tombée dans l'oubli, la géométrie projective renaît à la fin du XVIII^{e} siècle avec Monge (1795), Poncelet (1822), Chasles (1837). A la fin du XIX^{e} siècle, Hilbert, Klein et Darboux vont en formuler rigoureusement les axiomes. Cette approche de la géométrie, non par les propriétés des seules figures mais par leurs transformations, ainsi que l'étude des invariants de ces transformations, va donner une autre tournure à cette branche des mathématiques, qu'on utilise abondamment aujourd'hui dans les systèmes de rendu graphique sur ordinateur.

Géométrie, une longue histoire



Les papillons d'Escher

Les nouvelles géométries

Si la géométrie projective a revisité les vues d'Apollonius sur les coniques, il est une des *demandes* d'Euclide qui agita fort les géomètres, c'est le fameux *cinquième postulat* . D'après l'énoncé d'Euclide, *Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits*. La géométrie euclidienne estime qu'il n'a pas besoin d'être démontré, d'autres, comme Saccheri en 1733, pensent pouvoir précisément en faire la preuve mais en vain. A la fin du XIXe siècle, avec Hilbert, puis au XXe, avec Choquet la géométrie euclidienne se modernise avec des axiomes indépendants et non contradictoires.

On peut donc désormais construire des géométries en abandonnant le postulat des parallèles : les géométries non euclidiennes sont nées.

Soit les angles intérieurs du cinquième postulat sont aigus, et c'est la *géométrie de Lobatchevski* (entre 1826 et 1856).

Soit ces angles sont obtus, et c'est la *géométrie de Riemann* (1854).

A la fin du XIXe siècle, Klein donna la preuve que ces deux géométries sont chacune non contradictoires et Poincaré définit un modèle pour la géométrie de Lobatchevski : le demi-plan (dit *de Poincaré*), où les droites sont les demi-cercles centrés sur le bord. Dans cette géométrie, on peut mener d'un point une infinité de parallèles à une droite et alors la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits. Pour la géométrie de Riemann, le modèle sera celui de la sphère, dont les droites sont les grands cercles. On ne peut alors, par un point hors d'une droite, mener aucune parallèle à cette droite et la somme des angles d'un triangle est supérieure à un angle plat. Les mathématiciens, en reconnaissant aux géométries non euclidiennes un droit de cité ont renoncé à considérer la géométrie comme une simple description du monde physique. C'est l'ouverture proposée par Klein, dans le programme d'Erlangen (1872), qui conduit à concevoir une géométrie comme l'action d'un groupe G de transformations sur un ensemble. L'étude des objets géométriques devient donc celle des invariants par l'action de certains sous-groupes de G.

On est alors en mesure d'utiliser cette géométrie ainsi axiomatisée pour décrire en retour le monde physique, comme par exemple en théorie de la relativité.