Equations et racines, une traque universelle

Elisabeth BUSSER

Qu'elles soient agricoles (découpage de terrains), patrimoniales (partage d'héritages) ou consuméristes (achat et vente), les mathématiques s'invitent dans la vie quotidienne dès l'Antiquité. Leurs premières traces sont faites de calculs qui, sans le dire, ne sont autres que des équations. Les méthodes de résolution n'ont cessé, à travers le monde entier, de se codifier et de s'affiner jusqu'à aujourd'hui.

Une algèbre en devenir

Les Babyloniens de la première dynastie, vers 1700 avant J-C. étaient déjà allés assez loin dans les méthodes de résolution d'équations, y compris celles du second ou du troisième degré.

Connus pour être de grands constructeurs de tables, ils les utilisèrent pour résoudre des équations. La table des inverses leur permit par exemple de

Tablette babylonienne

résoudre des équations du type $ax = b$. Il leur suffisait de trouver $1/a$ dans la table et de le multiplier par b pour obtenir la solution. Evidemment, les calculs en base soixante (système hexadécimal) étaient un peu lourds, et ne se faisaient bien souvent que par approximation, certains nombres comme 13 ne possédant pas d'inverse exact. Pour les équations du second degré, les Babyloniens connaissaient pratiquement déjà l'algorithme de calcul actuel.

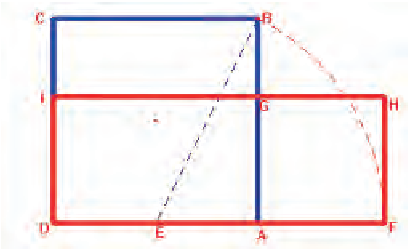
C'est une autre table, celle des valeurs de $n^2 + n^3$, qui leur permit de résoudre une équation plus compliquée, du type $ax^3 + bx^2 = c$. Nous dirions aujourd'hui que le changement de variable $x = by/a$ transforme cette équation en $y^3+y^2=ca^2/b^3$. La table donnait une valeur de y et, pour trouver x, on recalculait, à l'envers, by/a. Il suffisait d'y penser ! Ici, pas question de notation algébrique, mais quelle intelligence dans la technique de résolution !

Dans l'ancienne Egypte, quelques siècles plus tard, toujours pas de symbolique algébrique, mais des calculs d'inverses allégés par l'utilisation de fractions de numérateur égal à 1.

Les Grecs, eux, ont fait de la géométrie leur dogme et transforment les problèmes algébriques en constructions géométriques à la règle et au compas. Dans les treize livres des Eléments d'Euclide (environ 300 avant J-C.), pas de résolution explicite d'équation mais des constructions géométriques fournissant les solutions.

Equations et racines, une traque universelle

Dans le livre I, Proposition 44, pour résoudre l'équation $ax = b$, Euclide propose de représenter a et x comme des mesures de longueur et b comme l'aire d'un rectangle. La proposition 30 du Livre VI contient en proposant le *partage en moyenne et extrême raison* tout ce qu'il faut pour résoudre une équation de degré 2 du type $x^2 + ax = a^2$.



Il construit le carré ABCD de côté [AB] et le rectangle DFHI de même aire et tel que AFHG soit aussi un carré. Il a pris soin d'exposer auparavant cette construction (par exemple en utilisant l'arc BF de centre E, milieu de [AB]). Les deux carrés de la figure étant semblables, GB/GA = GH/GI, donc GB/GA = GA/AB.

Le point G est celui qui partage le segment [AB] en moyenne et extrême raison.

Euclide ne le dit pas explicitement, mais la résolution graphique de l'équation $x^2 + ax = a^2$ est immédiate. Le côté du carré ABCD représente a et la construction précédente fournit aussitôt le côté du carré AFHG c'est à dire x.

C'est plus tard, vers 250 après J-C., qu'on voit apparaître, chez Diophante, un début d'écriture algébrique où l'inconnue s'appelle *le nombre* et se nomme par une lettre de l'alphabet.

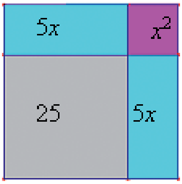
carré
et
rectangle
sont
de même aire

Les " pros " de l'algèbre

La voie est ouverte pour créer l'algèbre et son cortège de notations, ce que vont faire les mathématiciens arabes du Moyen-Age, héritiers directs de la culture mathématique grecque, qu'ils ont beaucoup étudiée. Ils vont l'enrichir de leurs propres techniques algorithmiques. Al-Khwarizmi (780-850), premier savant de l'école de Bagdad, celui-là même dont le nom a donné le mot "algorithme", pratique par exemple couramment la résolution des équations du second degré. Il commence par donner les racines avec des radicaux, puis confirme ses résultats par une démonstration géométrique et donne enfin une application numérique. Ses calculs se fondent sur deux opérations fondamentales : *al-jabr* (d'où le mot "algèbre"), transposition des termes, et *al-muqabala*, réduction des termes semblables. Sa géométrie est celle d'Euclide et utilise abondamment la "complétion du carré".

A propos d'un problème d'argent :
" Un carré et dix racines sont égaux à 39 dirhams ",
il doit donc résoudre $x^2 + 10x = 39$.

Equations et racines, une traque universelle



Le premier carré construit a pour côté l'inconnue, les deux rectangles représentent les dix racines, le tout ayant une aire de 39. On complète la figure pour en faire un carré. Il a pour côté 8 puisque 39 + 25 = 64 = 8². Il ne reste plus qu'à faire la différence 8 - 5 pour obtenir x = 3.

Si Al Khwarizmi n'a pas dépassé le degré 2, un autre mathématicien arabe célèbre, Omar Al-Kayyam traita, lui, vers 1074, des équations de degré 3, reprenant le problème d'Archimède : *découper une sphère par un plan de manière que les volumes des deux calottes soient dans un rapport donné.* Al-Kayyam reconnaît que la solution tient dans l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole, mais ne va pas jusqu'au bout de sa résolution.

Il faudra attendre la Renaissance et la grande époque des mathématiciens italiens Del Ferro (vers 1515), Cardan et Tartaglia (vers 1545) pour arriver à une étude complète de la résolution algébrique des équations de degré 3. Les formules de Cardan qui permettent de trouver à ces équations une solution réelle, ont fait faire à la génération suivante de mathématiciens, comme Bombelli (vers 1572) un pas vers la création des nombres complexes. En effet, que répondre à la question :

Que se passe-t-il quand cette formule ne s'applique plus et où pourtant l'équation a une solution réelle ?

Page du plus vieux livre d'algèbre du monde, le *Kitab al-Jabr wal-Muqabala* du mathématicien Al Khwarizmi

La révolution cartésienne

Les mathématiciens français vont prendre le relais des Italiens. Viète, vers 1593, simplifie les notations algébriques et donne une méthode de résolution des équations de degré 3 et plus. On raconte même que, pour relever le défi lancé par Adrien Romain, il trouva les 23 racines positives d'une équation de degré 45 !

On doit à Descartes (1596-1650) l'utilisation systématique des lettres en mathématiques : celles du début de l'alphabet pour les quantités déterminées, celles de la fin pour les indéterminées. Il propose également une résolution générale des équations au moins jusqu'au degré 6 grâce à la géométrie analytique. Parallèlement, Newton (1671) et Raphson (1690), préfigurant les travaux d'aujourd'hui, imaginent des méthodes de résolution par approximations. Lorsqu'il s'agit par exemple de *réduire en suite infinie* l'équation $y^3 - 2y = 5$. On part de 2 comme première approximation de la solution. En remplaçant y par 2+*p*, et en éliminant certains termes *à cause de leur petitesse*, on arrive à affiner : *p* = 0,1.

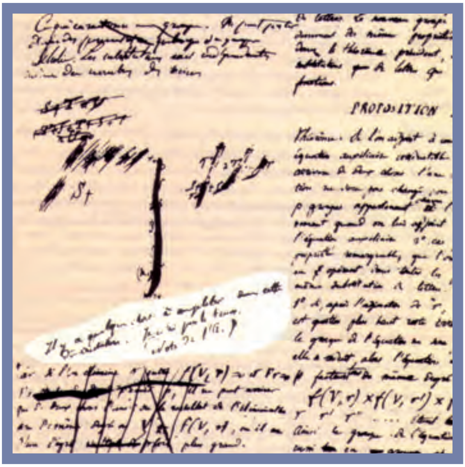
Equations et racines, une traque universelle

Et on recommence à poser $p = 0{,}1 + q$, à éliminer les termes non significatifs pour obtenir $q = -\,0{,}0054$, etc…

Quelle belle anticipation sur les algorithmes informatiques actuels !

L'effet Galois

Avec Lagrange puis avec Abel, on passe à la vitesse supérieure. Lagrange lie, en 1770, la résolubilité par radicaux des équations de degré trois et certaines propriétés d'invariance par permutations des racines. Il étudie donc les propriétés de ces ensembles de permutations qui prendront avec Galois le nom de *groupes*. Utilisant les résultats de Lagrange, Abel travaille sur les équations de degré 5, prouvant qu'elles ne sont pas résolubles par radicaux. Il généralise en 1829 aux classes d'équations ainsi résolubles. Reprenant leurs idées, Galois (1811-1832) définit le concept de groupe : il englobe dans cette notion les permutations des racines d'une équation telles qu'une relation algébrique satisfaite par ces racines le reste après permutation des dites racines. Le *groupe de Galois* d'une équation polynômiale est né ! Le génie de Galois ne s'arrête pas là : il va lier les propriétés de ce groupe au fait que l'équation associée soit ou non résoluble par radicaux. Il introduira pour les besoins de son étude des notions qui constitueront la théorie des groupes, pilier de l'algèbre moderne. On est passé du *terrain*, celui de la résolution d'équations algébriques à la théorie, celle qui fonde les mathématiques d'aujourd'hui.



Extrait du mémoire d'Evariste Galois.
La veille du duel qui lui coûta la vie à 21 ans, Galois écrit en marge de ses notes :
Il y a quelque chose à compléter dans cette démonstration. Je n'ai pas le temps.