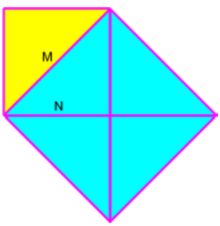
L'infini, entre logique et paradoxes

Hervé LEHNING

Notre monde, comment est -il ?
Discret ou continu ?
Logique ou indécidable ?
Mesurable ou incommensurable ?

Dans le monde imaginé par Pythagore au VI^e siècle avant Jésus-Christ, *tout est nombre*, c'est-à-dire nombre entier ou rapport de nombres entiers, ce que nous nommons *nombre rationnel*. Pythagore pense à un monde composé de particules insécables, toutes identiques. Les droites y sont constituées de points contigus, de même épaisseur. Dans ce modèle, si deux segments contiennent N et M points, le rapport de leurs longueurs est égal à N / M. Plus généralement, deux grandeurs de même nature : surfaces, volumes, temps, etc. sont toujours commensurables.

Pourtant l'école pythagoricienne a détruit ce mythe. Pour preuve la version simplifiée du théorème :



En construisant le carré bleu sur la diagonale du carré jaune on montre l'existence de deux entiers N et M tels que : $M^2 = 2N^2$. En factorisant M et N, on obtient un nombre pair de facteurs 2 dans M^2 et un nombre impair dans $2N^2$, ce qui interdit l'égalité de ces deux nombres.

Le modèle discret

Le rêve de Pythagore s'écroule, et avec lui l'idée d'un monde discret, c'est-à-dire formé de particules identiques insécables. Zénon (V^e siècle avant Jésus-Christ) a réfuté ce modèle d'une manière plus radicale. Supposons, après lui, le temps discret, il est ainsi composé d'instants insécables. Nous pouvons les dénombrer : instant 1, instant 2, instant 3, etc. Imaginons alors deux trains de trois wagons roulant en sens opposés, à la vitesse d'un wagon par instant. Si les deux premiers wagons se croisent à l'instant 1, les deux trains sont côte à côte à l'instant 2.

À quel instant le wagon de tête du premier train croise-t-il le deuxième du second ? Jamais ?

Le modèle continu

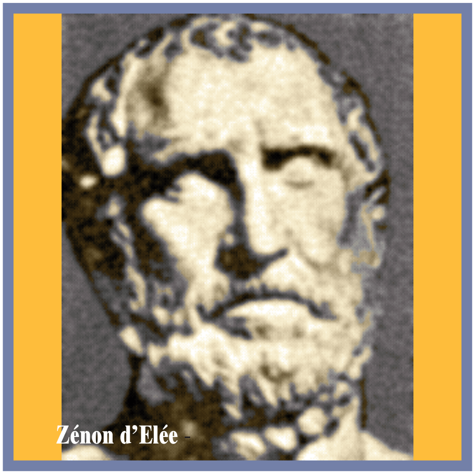
Le monde n'étant pas discret, il est logique de le supposer continu : toute quantité est divisible à l'infini. Pourtant, après avoir récusé le premier modèle, Zénon récuse également celui-ci. Supposons l'espace continu. Alors pour franchir une distance de 1 024 mètres, par exemple, nous devons d'abord franchir les 512 premiers mètres ce qui nous amène à un instant 1. Nous franchissons alors les 256 mètres suivants d'où un instant 2. Les 128 mètres suivants donnent un instant 3 et ainsi de suite en divisant chaque fois l'espace restant par deux. Comme l'espace est divisible à l'infini, nous sommes amenés à vivre une infinité d'instants, ce qui est impossible. Selon Zénon, le modèle continu interdit le mouvement. De nos jours, ce paradoxe est vu comme une erreur de calcul car une somme d'un nombre infini de termes peut être finie. Plus précisément aujourd'hui on montre que :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+etc,=1$$

En fait, l'idée de Zénon est ailleurs. Il récuse seulement la divisibilité du temps à l'infini. L'instant n'existe pas, il n'existe que des intervalles de temps, éventuellement très courts.

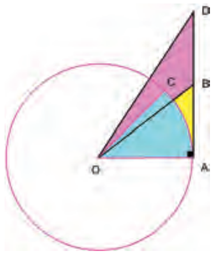
L'interdiction de l'infini

À la suite de ces paradoxes, les anciens Grecs s'interdisent le recours à l'infini. Plus précisément, celui-ci n'est plus conçu que comme potentiel : tout nombre peut être dépassé. Ainsi, Euclide (III^e siècle avant Jésus-Christ) évite de parler d'une infinité de nombres premiers. Il préfère énoncer :
" *l'ensemble des nombres premiers est plus grand que tout sous-ensemble de nombres premiers donné* " ce qui revient à dire : donnez-moi un nombre premier, j'en trouverai un plus grand. Ce refus de l'infini se situe essentiellement au niveau de la preuve. Le recours à l'infini actuel dans la recherche préliminaire reste clair. Par exemple, pour lier l'aire d'un cercle à sa circonférence, Archimède (III^e siècle avant Jésus-Christ) découpe le cercle en



Zénon d'Elée -

petits triangles curvilignes égaux. Au triangle curviligne OAC, il fait correspondre le triangle rectangle OAB tel que la longueur du côté AB soit égale à celle de l'arc AC. En construisant D tel que BD = AB, on obtient un triangle OBD de même aire que OAB car bases et hauteurs sont égales. Puis il assemble des triangles de même aire que OAB pour former un triangle rectangle (T) dont les côtés ont pour longueur respectivement le rayon et la circonférence du cercle.



Alors que l'idée sous-jacente est un découpage infini du cercle, Archimède ne prouve pas son théorème ainsi. Il considère l'aire S du cercle et celle S' = 1/2 x P x R du triangle (T) (où P est le périmètre et R le rayon du cercle) et montre en utilisant un découpage fini que les deux hypothèses S > S' et S < S' sont absurdes. Il exclut ainsi soigneusement l'infini de sa démonstration, même si le résultat ne peut être conçu sans y avoir recours.

Retour de l'infini, puis de la rigueur

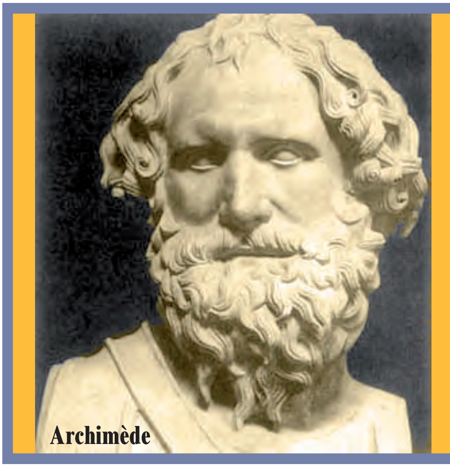
Le recours explicite à l'infini revient en grâce bien plus tard. Aux XVII[e] et XVIII[e] siècles, le pragmatisme supplante la ri-gueur logique pour le contrôle des résultats. Un analyste du XVIII[e] siècle n'hésite pas à considérer un découpage du cercle en parties infiniment petites. Il trace le même dessin que précédement, où chaque arc et chaque triangle sont considérés comme infiniment petit. Il calcule l'aire du secteur circulaire en fonction de la longueur t de l'arc AB et connaît donc l'aire du triangle OAB. Il ajoute le nombre de triangles du découpage et il trouve l'aire du cercle S comme somme d'aires de parties infiniment petites. Cependant pour achever le raisonnement, il faut remarquer que la différence entre l' aire du triangle AOC et celle du triangle OAB est un infiniment petit de l'ordre de t^2. Leur somme reste donc infiniment petite. Sans préciser ce dernier point, il est facile d'aboutir à des résultats fantaisistes.

La figure suivante propose ainsi une *preuve* de l'égalité $\pi = 2$.

La longueur du demi-cercle bleu ainsi que celle des courbes rouges, jaunes, etc est égale à πR. Ces courbes tendent vers le diamètre du cercle donc : $\pi R = 2R$

réel numéro 1 : 0,A__________
réel numéro 2 : 0,_B__________
réel numéro 3 : 0,__C__________
réel numéro 4 : 0,___D__________
réel numéro 5 : 0,____E__________
etc.
diagonale : 0,ABCDE__________
réel construit : 0,A'B'C'D'E'__________

Pour éviter ce type de paradoxes les mathématiciens du XIX[e] siècle reviendront à l'exigence de rigueur des


Archimède

anciens Grecs. Ils précisent dans quels cas on peut donner un sens à la somme d'un nombre infini de termes. Pour revenir à l'exemple associé à Zénon, il s'agit d'étudier les sommes finies :

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + 1/2^n$$

et montrer qu'elles s'approchent aussi près de 1 que l'on veut . En effet :

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + 1/2^n = 1 - 1/2^n$$

et $1/2^n$ peut être rendu aussi petit qu'on le désire.

Par exemple, cette quantité est inférieure à 0,001 si $n > 10$ et
à 0,000 001 si $n > 20$, etc.

Les infiniment petits ont ainsi été exclus des raisonnements pour être cantonnés au domaine de l'intuition jusqu'à la seconde moitié du XX[e] siècle, quand Abraham Robinson a créé l'Analyse non standard qui permet de leur donner un nouveau droit de cité. De façon assez naturelle, ce retour inattendu est dû à des progrès en logique qui permettent d'affirmer l'existence d'un corps comprenant les nombres réels usuels ainsi que des infiniment petits.

Preuve par l'infini

Avant ce retour en grâce, la notion d'infini est utilisée par les mathématiciens du début du XX^{e} siècle pour aboutir à des démonstrations étranges et à de nouveaux paradoxes.

Cantor distingue plusieurs infinis. Il nomme *dénombrables* les ensembles dont on peut numéroter les éléments comme ceux des entiers ou des rationnels. Il en existe de plus compliqués, comme celui des nombres algébriques, les racines d'équations polynômiales à coefficients entiers telles par exemple que :

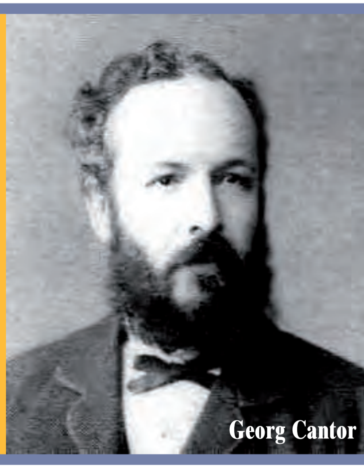
$$x^2 - 2 = 0 \text{ ou } x^5 - 5\,x^2 + 3 = 0.$$

Par la méthode de construction connue sous le nom de diagonale de Cantor, on montre qu'il n'est pas possible de construire une numérotation de tous les nombres entre 0 et 1.

Supposons que, à tout nombre réel entre 0 et 1, on puisse faire correspondre un entier naturel. Par exemple :

à l'entier 1 correspond 0,2359...
à l'entier 2 correspond 0,3598...
à l'entier 3 correspond 0,8248...
...
à l'entier n_k correspond $0{,}c_{k1}c_{k2}...c_{kk}c_{kk+1}...$
...
alors le réel $r = 0{,}e_{11}e_{22}e_{33}...e_{ii}...$
avec $e_{11} \neq c_{11}$, ... $e_{ii} \neq c_{ii}$,..., ainsi construit, est différent de tous les réels répertoriés et donc ne peut être numéroté.

L'ensemble des nombres réels n'étant pas dénombrable, Cantor en déduit l'existence de nombres transcendants, c'est-à-dire non algébriques. Cette preuve par différence de nature des infinis est déroutante car elle ne permet pas de nommer un seul nombre transcendant. Pour certains, cette utilisation de l'infini est même choquante car elle s'accompagne de nombreux paradoxes, souvent



Georg Cantor

associés à l'auto-référence. Ils sont tous de même nature que le paradoxe du barbier de Russel : *Dans un village, un barbier déclare raser tous les hommes ne se rasant pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ?* Ce type de paradoxes montre que l'on ne peut pas nommer n'importe quoi *ensemble* sinon, nous pouvons considérer deux sortes d'ensemble : ceux qui appartiennent à eux-mêmes et les autres.

Que dire alors de l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes ?

Le rêve de Hilbert

Avec la théorie des ensembles, Cantor a créé un outil puissant. Il a aussi montré la fragilité des fondements des mathématiques. Au début du XX^{e} siècle, David Hilbert pense assurer leur solidité en systématisant la méthode axiomatique des anciens Grecs. Dans son rêve, toutes les vérités mathématiques découlent d'axiomes et de règles de déduction logique. Par exemple, toutes les vérités arithmétiques doivent se déduire des axiomes que Peano, un contemporain de Hilbert, a énoncés. Malheureusement, Gödel prouve trente ans plus tard que l'arithmétique de Peano contient des assertions vraies et improuvables. Pour démontrer ce résultat, on pourrait dénombrer les assertions prouvables et les autres. Plus précisément, on peut imaginer de numéroter les assertions prouvables en tenant compte de leurs longueurs par exemple. Ainsi, on obtient une assertion numéro 1, une assertion numéro 2, etc. Autrement dit, l'ensemble des assertions prouvables est infini mais dénombrable. En revanche, il est facile d'imaginer que l'ensemble des assertions vraies n'est pas dénombrable. Ainsi, il ne peut se réduire à l'ensemble des assertions prouvables. Gödel ne procède pas ainsi. Il est plus explicite : il exhibe des assertions vraies improuvables !

Les mathématiques ne sont pas mécanisables

Dans le projet de Hilbert, il reste l'espoir qu'une machine puisse démontrer toutes les assertions prouvables d'une théorie. Imaginons donc un logiciel qui, à partir d'un système d'axiomes et de règles de déduction, produise les assertions prouvables les unes après les autres. Donnons nous une assertion particulière, soit A, dont on veut savoir si elle est prouvable ou non. Nous pouvons modifier notre logiciel de sorte qu'il s'arrête si A est prouvable et boucle indéfiniment sinon. Nous sommes ainsi amenés à nous poser le problème de l'arrêt des logiciels informatiques. Qu'est-ce qu'un logiciel ? Il s'agit d'un texte écrit dans un certain langage de programmation. Dans le jargon de l'informatique, on parle de son *code*. La nature de celui-ci et le langage dans

lequel il est écrit importent peu pour l'argument qui suit. Dans ce même jargon, le texte entré au clavier est appelé l'*argument du logiciel*. Ceci précisé, nous pouvons nous poser la question suivante :

Existe-t-il un logiciel L qui, prenant en entrée un logiciel X, c'est-à-dire son " code " puis un argument x, sait dire si X s'arrête ou non pour l'entrée de l'argument x ?

Supposons L écrit et notons L (X, x) le résultat de son exécution pour les données X et x. Nous pouvons alors construire un logiciel P s'arrêtant si : L (X, x) = "non" et bouclant indéfiniment si L (X, x) = "oui".

Que se passe-t-il si on applique P à lui-même ? S'il s'arrête, il boucle et s'il boucle, il s'arrête !

Un tel logiciel ne peut exister ce qui ruine définitivement le projet d'Hilbert de mécanisation de la preuve.

Tant mieux, sinon quel serait l'intérêt des mathématiques ?