Histoire d'ondelettes

Marie José Pestel
CIJM

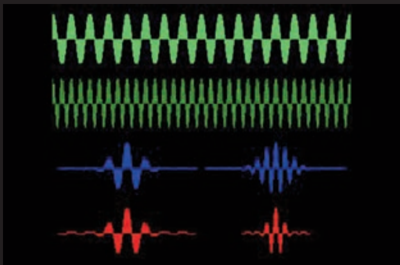
Les ondelettes au secours des images

La compression des données est un des défis majeurs lancés aux mathématiciens d'aujourd'hui. Les images numériques font partie de ce problème. Qu'elles doivent être stockées ou véhiculées sur internet, les images sont traitées pour être comprimées afin de réduire la place occupée et cela en les dégradant le moins possible…

Une image numérique est, par exemple, définie par les 512x512 nombres qui représentent l'intensité lumineuse en chaque point. En chaque point, le niveau de gris peut varier de 0 (noir) à 255 (blanc). Chacun de ces 256 niveaux de gris possibles peut être représenté par un octet (une suite de huit chiffres 0 ou 1) Il faut donc 512x512x8 = 2 097 152 bits pour coder une seule image de ce genre… Cela fait beaucoup ! Une première idée pour réduire le nombre de bits est de réduire le nombre de niveaux de gris. Mais, plutôt que de réduire la précision, on peut penser à changer le mode de représentation des données.

Le problème est donc d'interpréter cette image comme un point dans un espace à 512x512 dimensions (de la même façon qu'un point sur une surface, espace à deux dimensions, peut-être repéré par deux coordonnées) et de chercher des axes de coordonnées appropriés pour représenter un tel point. Ce système d'axes définit ce qu'on appelle une base. En 1822, le mathématicien-physicien Joseph Fourier, publie son mémoire sur la propagation de la chaleur et s'attache à montrer qu'une fonction à une variable peut être écrite comme une somme d'une infinité de fonctions sinus et cosinus de la forme sin(ax) et cos (ax), chacune affectée d'un certain coefficient. Du point de vue mathématique, une fonction peut être définie comme un élément d'un espace vectoriel de dimension infinie. Ces *bases de Fourier* sont devenues un outil essentiel car elles servent à représenter de nombreuses grandeurs physiques dans le domaine du son ou de l'image. Cependant cette analyse de Fourier a ses limites et en particulier elle est incapable de localiser les portions du signal où les variations sont trop rapides ou trop lentes (problème des contours en imagerie..)

Dans les années 1980, un ingénieur géophysicien français, Jean Morlet, a cherché de meilleurs outils mathématiques pour explorer le sous sol et en utilisant ce que les mathématiciens avaient proposé pour analyser des structures singulières localisées, a jeté les bases de l'analyse par ondelettes sous sa forme actuelle. En 1985, un mathématicien français, Yves Meyer, a découvert les premières bases d'ondelettes orthogonales.
L'analyse par ondelettes se propose de rendre locale l'analyse de Fourier. Un signal s'écrit sous la forme d'une superposition de fonctions oscillantes décalées et dilatées. Cette méthode utilise donc des fonctions



Exemples d'ondes élémentaires, en vert deux sinusoïdes de fréquences différentes mesurant la vitesse des oscillations : en bleu, deux fonctions élémentaires dont l'on fait varier la localisation (translation) et la fréquence (modulation) ; en rouge, deux ondelettes dont on fait varier la localisation (translation) et la taille (dilatation ou contraction).

à une ou plusieurs variables. Elle dispose d'une méthode de décomposition des signaux en fonctions élémentaires engendrées des transformations simples (translation et dilatation) d'une fonction de base. La fonction de base est, soit déplacée, soit dilatée, et ainsi les ondelettes s'adaptent d'elles mêmes à la taille des caractéristiques à représenter. Elles sont, soit très étendues pour étudier les basses fréquences, soit très fines pour représenter des phénomènes plus transitoires.

Cette procédure, dite de multirésolution, est basée sur des idées de lissage et d'approximation de fonctions. Une image (en noir et blanc pour simplifier) consiste en une série de points (pixels) plus ou moins sombres (on parle de niveaux de gris), que l'on peut idéaliser comme une fonction dans l'espace à deux dimensions (le plan de l'image), qui associe à chaque point un nombre représentant son niveau de gris (l'intensité lumineuse en ce point). Lisser notre image revient à la rendre floue, c'est à dire à en diminuer la résolution. Si nous considérons maintenant deux versions floues de l'image, à des résolutions différentes, nous pouvons nous intéresser aux détails qui sont toujours présents dans l'image la moins floue, mais ont disparu dans l'image la plus floue. Mathématiquement, ceci revient à calculer une différence entre les deux fonctions lissées, et l'on peut montrer que cette opération est identique au calcul d'une transformée en ondelettes (bidimensionnelle) de notre image. A ce moment là, la reconstruction de l'image à partir de ses coefficients en ondelettes prend une signification intuitive évidente : l'image, à sa résolution la plus grande, est égale à la somme d'une version floue et des détails apparaissant à des échelles différentes, c'est à dire à des résolutions différentes. Cette théorie a donné une technique standard de calcul scientifique, la transformée en ondelettes rapides et à travers le standard international JPEG-2000 pour la compression des images ; ces ondelettes envahissent actuellement tous les domaines de l'image (internet, appareils photos numériques…).

Les mathématiques des ondelettes ont joué un rôle de pivot dans de nombreux domaines et ont permis de dégager des concepts fondamentaux pour trouver des applications spécifiques dans des domaines très variés (physique, informatique, traitement du signal…).

Ce n'est pas la fin de l'histoire, le traitement des contours est toujours l'objet de recherches actives ; il arrive même que les mathématiciens trouvent leur inspiration dans des découvertes neurologiques.

MJP