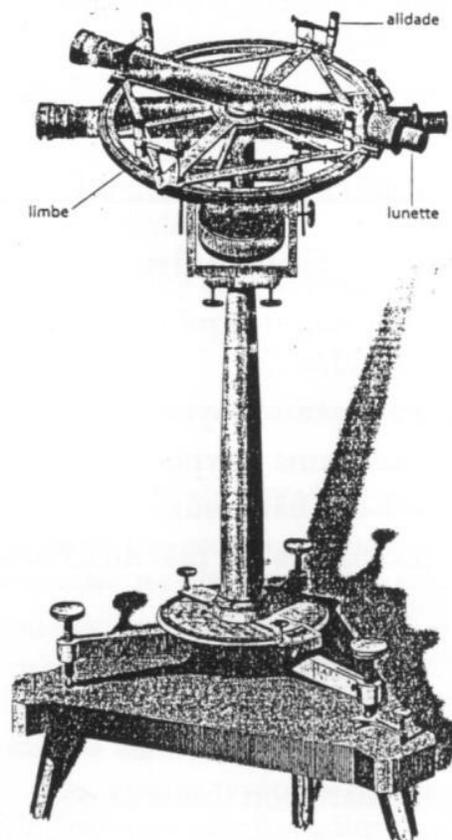


Brins d'Histoire des MATHS

2. Unités de mesure à travers les âges



Cercle répétiteur utilisé pour la mesure du méridien

© GALION - 2000
15, quai André Lassagne - 69001 LYON

ISBN : 2-912209-26-9

Vous trouverez dans ce fascicule quelques brins d'histoire sur les unités de longueurs, d'aires, de capacités, depuis Babylone. Mais aussi des indications sur l'histoire du mètre, sur les unités anglo-saxonnes et sur les systèmes encore utilisés et mal connus.

Nous avons fait des choix : on observe une grande diversité d'une époque à l'autre et d'une région à l'autre.

Tous les pays ou presque ont adopté le système métrique. Néanmoins, vous savez bien que les unités anglo-saxonnes sont encore présentes dans de nombreux domaines : marine, aviation, informatique ...

Il n'est pas question de tout dire, en 24 pages mais si vous voulez en savoir plus, vous pourrez consulter les ouvrages ci-dessous :

- *Larousse encyclopédique.*
- *Le système métrique, hier et aujourd'hui (ADCS - 1996).*
- *Textes et Documents pour la classe : Mesure du méridien (CNDP).*
- *L'Art des Bâtitseurs du Moyen-Âge (Abbaye de Boscodon - n° 4).*
- *Quid - Édition 2000.*
- *Internet.*

Sommaire

- 1- Quelle coudée ...!
De Babylone au Moyen Âge !
- 2- Dans l'ancienne Égypte
- 3- La canne des bâtisseurs
- 4- Pour les masses : la pile de Charlemagne
- 5- Des unités de capacités
- 6- Le mètre, de 1740 à nos jours
- 7- À grande vitesse !
- 8- Les unités anglo-saxonnes
- 9- Diogène dans son tonneau ...
- 10- Unités actuelles mais peu connues
- 11- Échelle Beaufort
- 12- Choisir sa propre unité ...
- 13- Au certif ... vers 1930
- 14- Soyons précis



1 | Quelle coudée ! de Babylone au Moyen Âge ...

Depuis la plus haute antiquité, les unités de mesure pour les longueurs étaient choisies en relation avec les dimensions du corps humain .

Ainsi, *la coudée* était une unité de longueur égale à la longueur du bras entre le coude et le bout des doigts tendus, avec toutes les imperfections que cette "définition" comportait ! Cette coudée fut utilisée très longtemps, par les babyloniens, les grecs, les égyptiens, les romains et même en Europe jusqu'au Moyen Âge en particulier par les bâtisseurs des cathédrales.

Sa longueur a varié au cours des âges et d'un pays à l'autre. Voici à titre d'exemples : Égypte : 52 cm ; Grèce : 48 cm ; Moyen Âge : 52,36 cm pour la "coudée du Roi".

Des sous-multiples de la coudée :

la palme :	la coudée valait 6 palmes
le doigt :	la palme valait 4 doigts

Des multiples :

la ninda :	12 coudées ;	la corde :	10 nindas ;
la lieue :	180 cordes		

Pour les aires : L'unité d'aire courante était le verger égal à un ninda-carré, soit l'aire d'un carré de 12 coudées de côté. L'arpent valait 100 vergers ; l'ubu était un demi-arpent. Le bur valait 18 arpents.

Toutes ces valeurs données à titre indicatif pouvaient varier d'une époque à une autre ...

Exercez-vous : Prendre 52 cm comme valeur moyenne de la coudée

- Fabriquer une règle de une coudée, graduée en palmes, en doigts. Mesurer la taille de vos camarades, les dimensions de la salle avec cette règle.
- Quelle est la longueur approximative d'une lieue en mètres ?
- Que vaut approximativement un verger en mètres-carrés ? Et combien y a-t-il d'hectares dans un verger ?
- Trouver en coudées le côté d'un carré d'aire un bur.
- Merlin nous dit : « *Un cercle de 1 mètre de diamètre mesure 6 coudées de long !* » VRAI ou FAUX ? Que valent donc 6 coudées en mètres ? Curieux !...
- Choisir parmi les données suivantes la distance approximative en coudées entre Paris et Lyon : 9 000 ; 920 000 ; 9 millions ; 920 .
- La "corde" est une unité encore utilisée pour mesurer un volume de bois. Combien vaut une corde en unités actuelles ?

**2**

Dans l'ancienne Égypte ...

Des informations précises sur les unités de longueur et d'aires ont été retrouvées dans le papyrus Rhind, datant du "Moyen Empire" (2060- 1780 av J.-C.).

Pour les longueurs : La coudée était aussi utilisée à cette époque en Égypte pour les mesures de longueurs : elle valait environ 525 mm. Les sous-multiples étaient le doigt, la palme (ou main) et les multiples : le khet (ou verge) et l'iterou avec approximativement les correspondances suivantes :



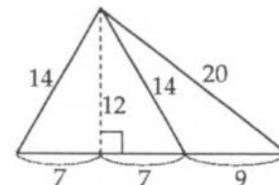
Pour les aires : L'unité principale est l'aroure ; c'était l'aire d'un carré de 1 khet de côté. C'est donc 1 khet-carré.

Cette aire était subdivisée en fractions égyptiennes : $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ d'aroure .

La coupée-de-terre était l'aire d'un rectangle de 100 coudées de long et 1 coudée de large.

Exercez-vous : Prendre 52 cm comme valeur moyenne de la coudée

- Calculer un aroure en m^2 , puis 1 coupée en m^2 .
- Le jardin du père Galion est un rectangle de côtés 250 m et 74 m . Donner sa surface en aroures et en coupées-de-terre
- Une longueur mesure 2 573 doigts ; l'exprimer en coudées, palmes et doigts.
- Écrire en doigts, puis en mètres la longueur : 1 khet, 5 palmes, 3 coudées.
- Exprimer en cm^2 l'aire d'un rectangle de côtés 15 palmes et 2 coudées.
- Le dessin ci-contre représente en coupe le détail d'une construction égyptienne. Ce dessin comporte des triangles rectangles. Les dimensions sont indiquées en coudées. Il y a certainement une erreur ; où et pourquoi ?



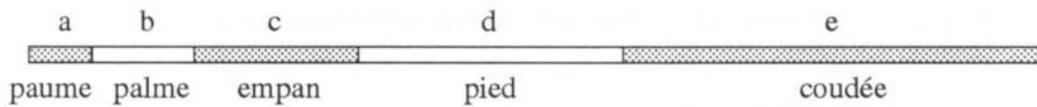


3

La canne des bâtisseurs ou canne des maîtres d'œuvre

Au Moyen âge, les "maîtres d'œuvre" (bâtisseurs) utilisaient une canne chiffrée (pige) pour la mesure des longueurs. Elle se compose de cinq éléments et mesure 555 lignes (une ligne correspond à 0,22457 cm environ). Cette canne se réfère aux mesures humaines, c'est un instrument de mesure ou de tracé.

Elle était articulée. La longueur totale correspond à 124,72 cm ce qui correspond à une "enjambée". L'anne de Vallouise mesurait 1,25 mètre.

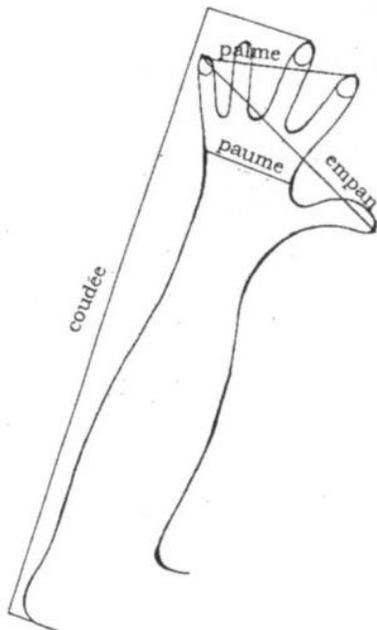
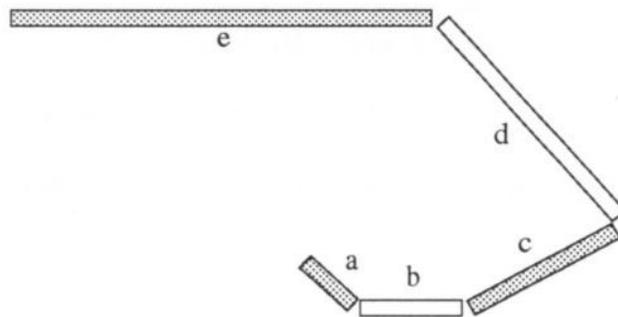


on a :

$$a + b = c$$

$$b + c = d$$

$$c + d = e$$



On passe d'un longueur à la suivante en multipliant par le *nombre d'or* ϕ (environ 1,618).

$$b = a\phi ; c = b\phi ; d = c\phi ; e = d\phi.$$

Exercez-vous :

- Évaluer chacune de ces unités dans le système métrique.
- Calculer la valeur en palmes d'une coudée. Comparer au système babylonien et égyptien. Qu'en pensez-vous ?



La Pile de Charlemagne pour les masses ...

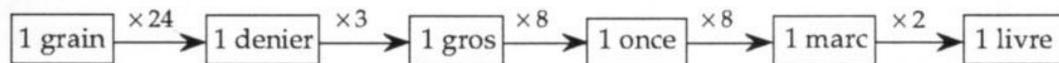
◆ Un peu d'histoire

L'unification des unités de mesure, comme nous le verrons tout au long de ce fascicule, a toujours posé des problèmes.

C'est par son "Capitulaire d'Aix-La-Chapelle" en 789, mille ans avant la Révolution Française, que Charlemagne tente d'imposer, un des premiers, des prototypes uniformes pour tous les sujets de son royaume. En 864, Charles le Chauve décrète que les mesures usuelles – en particulier longueurs, masses et capacités – doivent être conformes aux modèles déposés en son palais ...

Afin de percevoir un "droit d'étalonnage" payé par ses sujets pour copier les modèles, chaque seigneur prit l'habitude d'avoir ses propres unités, valables seulement sur son fief, ce qui explique toutes les différences. Philippe le Bel, François 1^{er} et Henri III tentent en vain de réagir contre cette confusion.

Sous le règne de Charlemagne, l'unité de base pour les masses était le marc royal. Voici d'autres unités avec les correspondances :



Ces unités sont restées en usage durant dix siècles et la livre a été utilisée pour définir le kilogramme en 1795 : la valeur du kilogramme fut fixée à 2 livres, 5 gros, 49 grains. Ainsi, une livre équivalait à 490 grammes environ.

◆ La Pile de Charlemagne

On a conservé au Musée National des Techniques, une boîte fabriquée au XIX^{ème} siècle, appelée la pile de Charlemagne, l'ancêtre de nos "boîtes de poids". Ce serait une copie d'une ancienne pile datant de l'époque de Charlemagne.

Cette pile comporte 13 godets creux, en cuivre, de forme tronconique. Ces godets s'emboîtent les uns dans les autres.

Chacun des 13 godets a une masse bien précise : 1 gros - 1 gros - 2 gros - 4 gros - 8 gros - 2 onces - 4 onces - 1 marc - 1 livre - 2 livres - 4 livres - 7 livres - 10 livres.



Exercez-vous :

- Sauf pour les deux derniers, chaque masse de la pile est multipliée par 2 pour obtenir la suivante : vérifiez-le. Montrez que la masse totale fait 25 livres. Et en kilos ?
- Vérifiez qu'une livre vaut 9 216 grains. Quelle est, en grammes, l'équivalent de 1 grain ? Combien 1 kilo vaut de grains ?



5 Des unités de capacités ...

Avant notre système métrique, utilisant le litre, ses multiples et sous-multiples, les unités de capacité étaient très diverses. On distinguait deux types d'unités : celles qui étaient utilisées pour les "liquides" (eau, vin, huile, ...) et celles qui étaient utilisées pour les "matières sèches" (céréales, sel, charbon,...).

Voici un texte concernant ces anciennes unités (Quid 2000, p. 241) :

■ Capacité.

Liquides : *Roquille* (contenu d'une écorce d'orange appelée «roquille») : 0,030 L (litre). *Demi-posson* (2 roquilles) : 0,060 L. *Posson* (doublet de potion, «coup à boire») (4 roquilles) : 0,119 L. *Demi-setier* (2 possons) : 0,238 L. *Chopine* (primitivement mesure germanique de la bière, environ 0,33 L.) ou *setier* (du latin *sextarius*, sixième) : 0,476 L. *Pinte de Paris* (environ 2 setiers) : environ 0,93 L. ou 48 pouces cubes (définie en 1742). *Pot* ou *quade* (ou *cade*) (2 pintes). *Velte* (du latin médiéval *gualguita*, petite jauge) (8 pintes) : 7,44 L. *Quartaut* (9 veltes) : 67 L. *Feuillette* (tonneau marqué d'une feuillure, «entaille de jauge») (2 quartauts) : 137 L. *Muid* (du latin *modius*, mesure) (288 pintes) : 274 L, *de Bourgogne* (2 feuillettes) : 268 L, *de Paris* : 268,2 L.

Matières sèches (à Paris) : *litron* : 0,79 L. *Boisseau* [de boisse, bas-latin *bostia*, gaulois *bosta*, creux de la main (16 litrons)] : 12,7 L (utilisé pour blé, avoine, sel, charbon de terre, charbon de bois). *Setier* (12 boisseaux) : 152 L. *Minot* (de mine : du gréco-latin *hemina*, mesure de 28 cl) (avoine, charbon de terre valant : 6 boisseaux ; sel : 4 ; blé : 3 ; charbon de bois : 2). *Double minot* (la mine) : *muid* [valant pour charbon de bois 20 mines (client) ou 16 (commerçant), de terre 7 mines et demie ; plâtre 72 (ou 36 sacs) ; avoine 288 ; sel 192 ; blé 144]. En outre, chaque boisseau change de valeur selon les façons (fixées par l'usage) de le remplir : bon poids ou poids courant ; comble ou ras, etc.

Exercez-vous :

- Pour y voir plus clair, dessiner un ou plusieurs "organigrammes" indiquant clairement le passage d'une unité à une autre.

Par exemple :

roquille	×4	posson	×?	chopine	×?	pinte	×?	velte
----------	----	--------	----	---------	----	-------	----	-------

- Certains mots sont encore en usage ; lesquels ? Comment ?
- Quelle est la valeur du muid en litres ?



Le mètre, de 1740 à nos jours ...

METRE, du grec METRON qui signifie MESURE.

- ◆ Au milieu du XVIII^{ème} siècle se fit sentir la nécessité d'unifier les unités de mesure qui variaient d'un pays à l'autre et, au sein d'un même pays, d'une région à l'autre, d'une ville à l'autre.

En 1766, quatre-vingts copies de la toise de Paris furent distribuées aux parlements de province. Des comparaisons entre les unités utilisées en France et en Angleterre furent entreprises dès 1742. L'idée de définir une unité de longueur à partir d'une *référence à la nature* fut envisagée très tôt. La Condamine et Condorcet songèrent à prendre pour référence la longueur du pendule battant la seconde, à la latitude de 45°, au niveau de la mer.

Des travaux commencèrent en 1775 sous l'impulsion de Turgot mais furent interrompus.

- ◆ **Première définition du mètre**

Dès 1740, des travaux de mesure de la longueur d'un méridien avaient été réalisés par l'abbé Lacaille.

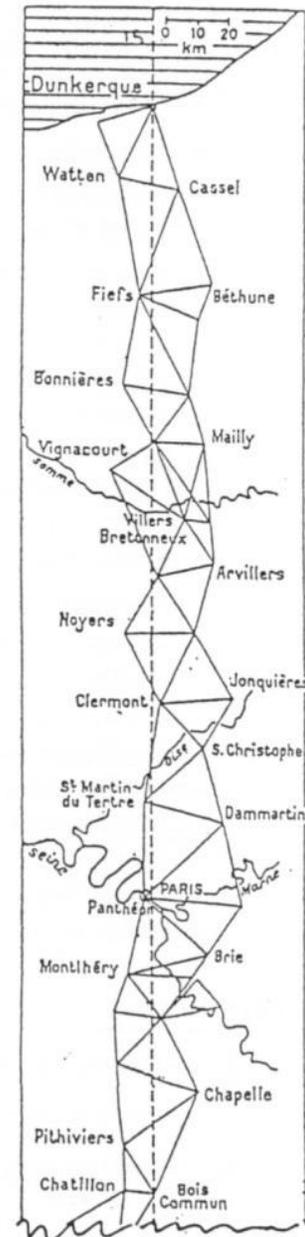
Le 26 mars 1791, sur proposition de l'Académie des Sciences, la Constituante proposa la définition suivante du mètre :

"Le mètre est la dix-millionième partie de la portion du méridien de Paris comprise entre le pôle et l'équateur."

Des travaux furent entrepris de 1792 à 1798 pour améliorer la mesure du méridien par triangulation. Une équipe conduite par Delambre effectua cette mesure de Dunkerque à Rodez, une autre conduite par Méchain la fit entre Rodez et Barcelone.

Le 22 août 1795, le Directoire confirme la définition du mètre donnée par la Constituante en prenant, pour longueur du méridien, les résultats des travaux de Delambre et Méchain, dûment vérifiés : 5 130 740 toises.

Un mètre vaut donc 3 pieds 11,296 lignes.



Pour l'usage courant, des étalons furent fabriqués en fer et en platine, métal connu en Europe depuis moins de 50 ans. Ces étalons étaient « à bouts », 1 mètre étant la distance entre les deux bouts d'une règle. (Comme les mètres en bois utilisés pour mesurer les tissus.)

Exercez-vous :

- 1- Dunkerque et Carcassonne sont deux villes situées sur le méridien de Paris. Quelle est la distance en kilomètres, à vol d'oiseau, entre ces deux villes sachant que leurs latitudes respectives sont $51^{\circ}03'N$ et $43^{\circ}13'N$?
- 2- Quelle est la différence entre la longueur du méridien à 1000 mètres d'altitude et la longueur du méridien au niveau de la mer ? Quel pourcentage de cette dernière représente cette différence ?

◆ **Deuxième définition du mètre**

Le 10 décembre 1799 fut adoptée la définition suivante :

*"Le mètre est la mesure de l'étalon en platine
déposé aux Archives le 22 juin 1799."*

Cet étalon est une règle « à bouts », en platine, ajustée au calcul du mètre. Les oppositions à cette nouvelle unité furent nombreuses et ce n'est que la loi du 4 juillet 1837 qui rendit le système métrique *obligatoire* en France.

Il fut adopté à la même époque en Belgique, aux Pays-Bas et au Luxembourg.

◆ **Troisième définition du mètre**

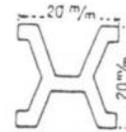
En 1869 fut entreprise la construction de nombreux étalons, en platine iridié, à section en forme de X, les uns « à bouts », les autres « à traits ».

L'un d'eux fut déposé au pavillon de Breteuil à Sèvres.

En 1875 fut créé le Bureau International des poids et mesures.

En 1889, la Conférence générale des poids et mesure adopte la définition suivante :

*"Le mètre est la distance, à la température de $0^{\circ}C$,
entre les axes des traits médians
tracés sur le prototype international du pavillon de Breteuil."*



Profil en X
du mètre étalon
« à bouts » de 1875.

L'unité légale pour la France est la copie n° 8 de cet étalon. Le domaine du pavillon des poids et mesures de Sèvres jouit du privilège d'exterritorialité : il n'a pas été occupé par les Allemands, pendant la guerre 1939-45.

◆ **Quatrième définition du mètre**

Si la définition du mètre de 1889 était satisfaisante pour les mesures usuelles, elle était insuffisante pour les mesures de plus en plus précises exigées par les progrès de la physique.

Dès la fin du XIX^{ème} siècle, Maxwell, Michelson, Benoît songèrent à rattacher la définition du mètre à une référence naturelle plus précise. Après avoir songé à utiliser la longueur d'onde du cadmium, la III^{ème} Conférence des poids et mesures adopta le 14 octobre 1960 la définition suivante :

“Le mètre est égal à 1 650 763,73 fois la longueur d'onde, dans le vide, de la radiation rouge-orangée du Krypton 86.”

Ce nombre “bizarre” s'explique par la nécessité d'une définition qui ne modifie pas les unités courantes. Cet étalon optique serait 100 fois plus précis que l'étalon de 1889.

Le décret du 3 mai 1961 adopta cette définition pour la France.

◆ Cinquième définition du mètre

L'utilisation du laser ayant permis une détermination de plus en plus précise de la vitesse de la lumière, la XVII^{ème} Conférence générale des poids et mesures a défini le mètre à partir de cette constante physique universelle :

“Le mètre est la fraction $\frac{1}{299\,792\,458}$ de la distance parcourue par la lumière, dans le vide, en une seconde.”

Cette définition a été adoptée en France par décret du 30 décembre 1985.

Exercez-vous :

- En reprenant la première définition du mètre, donner le rayon de la Terre.
- La distance de la Terre au Soleil est d'environ 23 500 fois le rayon de la Terre. Combien de minutes met la lumière du Soleil pour parvenir sur la Terre ?
- Quelle différence y a-t-il entre les deux premières définitions ? Qu'apporte de plus la troisième ?
- Qu'est-ce qu'une année-de-lumière, ou année-lumière ? (Le parsec, unité utilisée en astronomie vaut environ 3,26 années-lumière).



À grande vitesse ...

Ernst MACH était physicien et philosophe autrichien (1838-1916).

Il fit des recherches en optique, en acoustique et mit en évidence le rôle de la vitesse du son en aérodynamique.

Il a donné son nom à une unité de vitesse utilisée pour les avions supersoniques. Cette unité est égale à la vitesse du son dans l'air, à 0°, au voisinage du sol : c'est environ 330 m/s.

La vitesse du son est de 343 m/s à 20° ; elle varie avec la température ambiante.

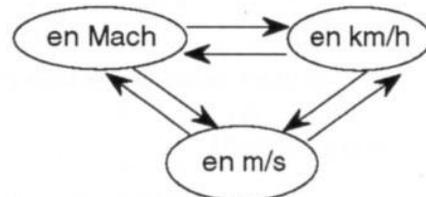
L'appareil de mesure s'appelle un machmètre.

$$\text{Mach 1} \approx 1200 \text{ km/h}$$

Exercez-vous :

- Expliquer comment on a obtenu Mach 1 en kilomètres par heure ?
- L'avion russe Tupolev 144 vole à Mach 1,92 et le Concorde français à Mach 1,82. Quelles sont leurs vitesses en km/h ?
- Que signifie "supersonique" ?

- Par quels opérateurs passe-t-on d'une vitesse en Mach à une vitesse exprimée en km/h et en m/s, et inversement ?



- La lumière parcourt environ 300 000 km par seconde. Donner l'équivalent en Mach.
- Dédé se fait contrôler, en voiture, sur l'autoroute, à Mach 0,12 et à Mach 0,04 au centre de Lyon. Que va-t-il se passer ?
- Cocher la bonne réponse :

vitesse d'un homme au pas	Mach 0,045	Mach 0,004	Mach 0,000 1
et pour la tortue ...	Mach 0,000 03	Mach 0,000 3	Mach 0,003 08

- Un avion vole à 10 000 mètres d'altitude à Mach 1 ; combien de temps met-il pour faire le tour du globe ?

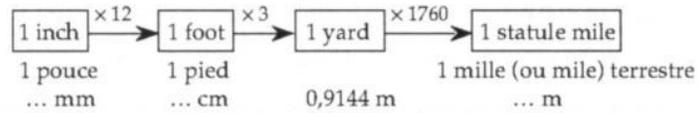


8 Les unités anglo-saxonnes !

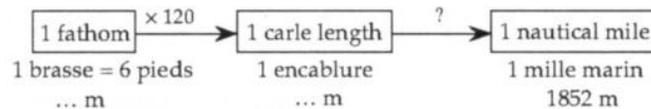
Voici les principales unités utilisées dans les pays anglo-saxons. Pour chaque unité sont donnés : le nom anglais, le nom français (s'il existe). Pour certaines unités, vous trouverez la valeur correspondante dans le système métrique ; vous pourrez compléter pour les autres à l'aide des renseignements donnés.

◆ Longueurs

- Longueurs terrestres



- Longueurs marines



Le mille marin est la longueur d'un arc de méridien de 1 minute.

Exercez-vous :

- Un avion vole à une altitude de 10 000 pieds. Quelle est son altitude en mètres ?
- Un mille-pattes parcourt un millième de mille terrestre en mille secondes. Quel temps mettrait-il (à cette même vitesse ...) pour parcourir la longueur d'un mille-feuilles mesurant un vingtième de yard ?

◆ Vitesses

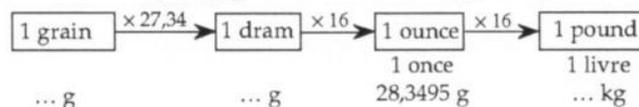
- Sur terre : le Mph équivaut à 1 mile terrestre par heure.
- Sur mer : le nœud (kt) équivaut à 1 mille marin par heure.

Exercez-vous :

- Les limitations de vitesse en France sont, suivant le lieu, 50 km/h, 90 km/h, 110 km/h, et 130 km/h. Donnez ces vitesses en miles par heure (Mph). Un
- Aux USA et en Angleterre, les limitations de vitesse, en rase campagne, sont 55 Mph et 60Mph. Donnez ces vitesses en km/h.
- Dans la marine, on utilise le nœud qui est un mille marin par heure. Un navire file 25 nœuds. Quelle est sa vitesse en km/h ? en m/s ?

◆ Masse

Voici l'un des systèmes utilisés (système "Avoirdupois")

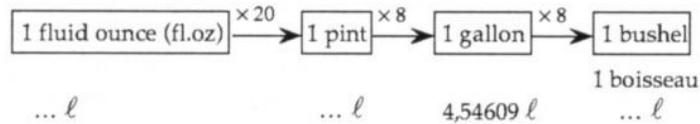


Exercez-vous :

- Convertir en grammes une masse de 6 livres 7 onces.
- Donnez le poids en livres et onces d'un individu pesant 75 kg.
- Quel est le plus lourd : 23 kg ou 50 livres 10 onces ?
- Dans ce système, que valent 800g ; 30 kg ; 12 kg ; 3 kg.

◆ **Capacité**

- Angleterre



- Les Américains n'utilisent pas le boisseau mais le baril dont la valeur varie d'un état à l'autre.

Attention : le gallon U.S. ne vaut que 3,7854 l.

Pour la consommation de carburant :

en France, on donne le nombre de litres consommés pour parcourir 100 km

en Angleterre, on donne le nombre de miles parcourus avec 1 gallon de carburant.

Exercez-vous :

- La capacité d'un réservoir d'essence est 42 litres. Donnez sa capacité en unités anglaises puis américaines..
- Mon ami Andrew m'a dit : "Ma voiture fait 4 miles par gallon" ; quelle est sa consommation en litres aux 100 km ?
- Quel est le véhicule le plus économiques: 35 miles par gallon ou 8 l aux 100 km ?
- Un flacon contient 1,6 fl.oz de parfum. Quelle est cette capacité en ml ? SOn prix est de 250 F. Quel est le prix du litre en euros ?.

◆ **Température**

Au lieu du degré Celsius, les anglo-saxons utilisent le degré Farenheit. La correspondance entre les deux systèmes résulte de $0^{\circ} \text{C} = 32^{\circ} \text{F}$ et $100^{\circ} \text{C} = 212^{\circ} \text{F}$. 100 graduations Celsius régulières correspondent ainsi à 180 graduations Farenheit régulières .

Exercez-vous :

- Justifiez ces deux formules permettant de passer d'une température T_c en degré Celsius à la température T_f en degré Farenheit et inversement :

$$T_c = \frac{5}{9} (T_f - 32) \quad \text{et} \quad T_f = \frac{9}{5} T_c + 32$$

- Dessiner un abaque de correspondance (degré C) \longleftrightarrow (degré F).
- Quelle est celle des deux températures 25°C et 75°F qui est la plus élevée ?
- Quelle est celle des deux températures -20°C et 0°F qui est la plus basse ?



9 Diogène dans son tonneau

Voici un texte très ancien édité au 13^{ème} siècle sous le règne de Philippe le Hardi. Il est relatif à la recherche de la capacité d'un tonneau dont on peut mesurer les dimensions.

[...]

"Si tu veux trouver la contenance d'un muid (voir 1), tu mesures le diamètre du fond et le diamètre là où affleure le vin ; tu les additionnes et les divises par moitié (voir 2).

Si tu trouves l'aire du fond par le diamètre, tu sais combien de pieds (voir 3) est cette aire. Si tu multiplies cette surface par la hauteur du muid, le produit te dira combien de pieds (voir 3) le muid contiendra. Si tu divises cette somme par le volume du setier (voir 1), le quotient fera le nombre de setiers - ce qui peut se prouver au moyen du calcul.

Si tu veux trouver la contenance du tonneau, si tu sais l'aire de base du tonneau grâce au diamètre, et la hauteur du tonneau, tu multiplies l'aire par la hauteur ; le produit fera la contenance du tonneau (voir 4). Si tu divises cette somme par la contenance du muid, la division te donnera la contenance par rapport au muid.

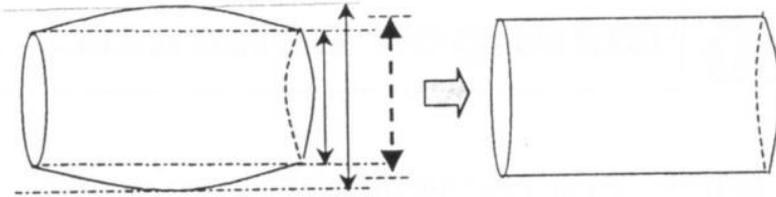
Sache que deux tonneaux ayant la même hauteur, si le diamètre du premier est double du diamètre de l'autre, la contenance du premier sera quadruple de celle de l'autre, ce qui peut se prouver par les diamètres et les circonférences (voir 5). Si le diamètre du tonneau est le double du diamètre de l'autre, lequel aurait une hauteur quadruple de la hauteur du premeir, les contenances des deux seront égales, ce qui peut se prouver par ce qui est dit avant et par le calcul (voir 5).

Le tonneau de bonne mesure (voir 6) doit être tel que 2 pieds et demi doit être le fond et le bouge doit avoir le quart d'un pied (voir 3) et il doit avoir la hauteur de 4 pieds et le douzième d'un pied. Or le pied est de 12 pouces et ainsi la grosseur du tonneau sera de 31 pôuves et demi et la hauteur de 49 pouces par dedans ..."]

Exercez-vous :

- (1) **Un muid.** Rechercher cette capacité dans le dictionnaire ou une encyclopédie ; même question pour le **setier**.

(2) En examinant le dessin ci-après, expliquer la signification de cette phrase.

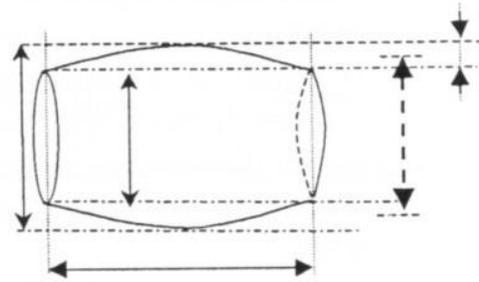


(3) Le mot "pied" désigne plusieurs grandeurs. Lesquelles ?
En trouver des approximations dans le système métrique.

(4) Le tonneau est assimilé à un solide, lequel ?
Imaginer comment ce solide est défini. Représenter par un dessin.

(5) Démontrer ces deux propositions relatives aux volumes des cylindres.

(6) Ici, *le bouge* est la différence entre les deux diamètres : celui du fond et le diamètre où affleure le vin.
En utilisant les unités de cette époque, reporter sur le schéma les dimensions définissant un tonneau de *bonne mesure*.



◆ Autres cubages de tonneaux

Voici d'autres formules plus récentes permettant de trouver la capacité d'un tonneau à partir de différents mesurages de longueurs :

1/ Approximation par deux troncs de cône :

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

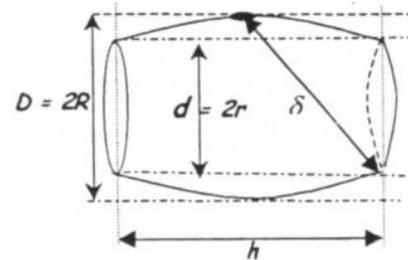
2/ Formule d'Oughred :

$$V = \frac{\pi h}{36} (5D^2 + 4d^2)$$

3/ Formule empirique :

$$V = 0,605 \delta^2$$

Appliquer ces différentes formules en utilisant des dimensions de votre choix.





10

Unités actuelles mais peu connues ...

Certaines professions utilisent des unités très particulières. En voici quelques-unes...

◆ Le carat

Cette unité est utilisée, avec deux sens très différents, en joaillerie et en orfèvrerie.

En joaillerie, le carat est une unité de masse qui vaut 0,20 g ; elle est utilisée dans le commerce des diamants, des perles fines et des pierres précieuses.

Parmi les plus gros diamants, on trouve les diamants suivants :

- le **Cullinan** découvert en 1905 en Afrique du Sud. Avant la taille, il pesait 3 106 carats ; on en a extrait 9 pierres principales dont l'**Étoile d'Afrique** taillée à 74 facettes, de masse 530 carats et le **Cullinan II** de 317 carats ;
- le **Régent** découvert en Inde au XVIII^{ème} siècle, pesait 410 carats avant la taille et 140 après cette taille. Ce diamant est actuellement exposé au Musée du Louvre.

Exercez-vous :

- Donner en grammes la masse de chacun de ces diamants.
- Le diamant est un carbone pur de masse volumique $3,5 \text{ g/cm}^3$. Trouver le volume avant la taille et après, de chacun des diamants ci-dessus.

En orfèvrerie, le carat indique la proportion d'or pur dans un alliage : on l'appelle le **titre** de cet alliage. Il indique, en grammes, la masse d'or pur dans 24 grammes de l'alliage. Par exemple, en France, l'or utilisé par les orfèvres est un alliage au titre de 18 carats, ce qui veut dire qu'il contient $18/24$ d'or pur, ce qui correspond à $750/1000$ d'or pur (750 millièmes), ou encore contenant 75 % d'or pur.

Exercez-vous :

- Convertir en millièmes et en pourcentages d'or pur : 9 ; 12 ; 14 ; 20 et 22 carats.
- Que serait un alliage au titre de 24 carats ? Que penser d'un titre de 50 carats ?
- À l'occasion de son entrée en Sixième, Jean a reçu en cadeau un superbe stylo avec une plume en or à 18 carats. La plume pèse 0,2 grammes. Quelle est la masse d'or dans cette plume ?

- Nos bijoux en or sont au titre de 18 carats .Une bague qui pèse 4 grammes, contient une pierre de topaze de 3 carats. Quel est le poids d'or pur contenu dans la bague ?

◆ Le denier

Le denier était une unité monétaire utilisée à Rome , puis en France au Moyen-Age. Mais de nos jours, c'est une unité de masse utilisée dans l'industrie textile .

Le denier est la masse, en grammes, de 9 000 mètres d'un fil ou d'une fibre textile. On dit aussi que c'est le **titre** de ce fil. Par exemple, si une soie naturelle est au titre de 2 deniers, cela veut dire que 9 000 mètres de ce fil de soie pèsent 2 grammes. Les textiles artificiels ont un titre entre 0,5 et 20 deniers.

Cette unité tend à être remplacée par le TEX et ses sous-multiples décimaux : décitex, centitex, etc. Le TEX est la masse en grammes de 1 000 mètres de fil.

Exercez-vous :

- Sur une boîte de collants on lit : "15 deniers ou 17 décitex". Est-ce la même chose ?
Quelle longueur de fil a-t-on utilisé pour tisser ce collant sachant qu'il pèse 10 g ?
- Une bobine de fil de 15 deniers pèse 100 g. Donner le titre en Tex .Quelle longueur de fil contient cette bobine ?
- On considère deux paires de bas utilisant la même longueur de fil : l'une de 15 deniers et l'autre de 20 deniers. Quels sont les bas plus fins ?

◆ Le baril

Le baril était le nom d'une ancienne unité de capacité valant 72 litres et employée dans divers pays. Actuellement, le baril est utilisé dans l'industrie pétrolière. Un baril de pétrole vaut 42 gallons, soit environ 159 litres ; ce qui correspond à 0,14 tonnes de pétrole brut environ.

Exercez-vous :

- En utilisant ces informations, calculez la densité moyenne (ou la masse volumique) du pétrole brut.
- Un gros pétrolier, le PRAIRIAL, aujourd'hui à la ferraille, pouvait transporter $647\,934\text{ m}^3$ de pétrole brut, réparti en 37 citernes .Combien de barils représentait cette cargaison ? Quelle était la masse de cette cargaison ?
- La Tour Eiffel pèse environ 7 000 tonnes et le pétrolier vide pesait l'équivalent de 11 fois la Tour Eiffel. Quelle était la masse du pétrolier plein ?



11

Échelle Beaufort

L'échelle Beaufort, imaginée et calculée par l'amiral anglais Francis Beaufort en 1806, indique une corrélation entre vitesse du vent et force de ce vent, dans certaines conditions. Elle fut adoptée en 1874 par le comité météorologique international.

Ce n'est pas, à proprement parler, une *mesure* mais un procédé de repérage au moyen de **degrés de force** allant de 0 à 12.

Chaque degré correspond à une vitesse de vent.

Ainsi, le degré de force 4 indique un vent de 20 à 28 km/h.

Voici un tableau donnant les 13 degrés Beaufort avec des intervalles correspondant à la vitesse du vent.

◆ Sur terre

Force	Vent en km/h	Terme descriptif	Correspondance
0	< 1	calme	la fumée s'élève verticalement
1	1 - 5	très légère brise	le vent incline la fumée
2	6 - 11	légère brise	on perçoit le vent sur la figure
3	12 - 19	petite brise	le vent agite les feuilles
4	20 - 28	jolie brise	le vent soulève poussière et papiers
5	29 - 38	bonne brise	le vent forme des vagues sur les lacs
6	39 - 49	vent frais	le vent agite les branches des arbres
7	50 - 61	grand frais	le vent gêne la marche d'un piéton
8	62 - 74	coup de vent	le vent brise les petites branches
9	75 - 88	fort coup de vent	le vent arrache les cheminées
10	89 - 102	tempête	graves dégâts
11	103 - 117	violente tempête	ravages étendus
12	> 117	ouragan	ouragan catastrophique. Cyclone tropical
-	166 - 212		Cyclone tropical intense
-	> 212		Cyclone tropical très intense

L'échelle de Beaufort se termine à 12. Les deux lignes suivantes sont là uniquement pour situer les cyclones les plus intenses.

Exercez-vous :

- Chaque force de vent, de 1 à 11, correspond à un intervalle $[a ; b]$ pour les vitesses du vent : l'amplitude de l'intervalle est $b - a$. Calculer cet écart pour les 11 degrés de 1 à 11.

On passe d'une amplitude à l'autre en ajoutant un entier. Calculer ces entiers. Quelles remarques peut-on faire sur ces entiers ?

- Pour chaque intervalle $[a, b]$, calculez la moyenne $m = \frac{a + b}{2}$. Pour chacune des 11 forces, construisez un point représentatif dans un repère convenable :

pour chaque point $M(x, y)$: $x = \text{moyenne } \frac{a + b}{2}$; $y = \text{force}$.

Exemple : force 4 : point $M_4 (24 ; 4)$. Que constatez-vous pour ces 11 points ?

- Soit la fonction $y = 0,09x + 1,58$. Construisez sa représentation graphique. Vous constatez qu'elle ne s'éloigne pas trop de vos 11 points ...

C'est ce que l'on appelle "la droite d'ajustement pour le nuage de points".

Pour chacune des abscisses x calculées ci-dessus, calculez la valeur correspondante de y au moyen de cette fonction. Vous obtenez sensiblement la "force" du vent dans l'échelle Beaufort.

x	y
3	
8,5	
15,5	

◆ **En mer** : Voici un extrait du guide maritime de météo-France :

Degrés	termes descriptifs	Vitesse moy. en nœuds	État de la mer
0	calme		comme un miroir
1	très légère brise		quelques rides
2	légère brise		vaguelettes ne déferlant pas
3	petite brise		les moutons apparaissent
4	jolie brise		petites vagues, nombreux moutons
5	bonne brise		vagues modérées, moutons, embruns
6	vent frais		lames, crêtes d'écume blanche, embruns
7	grand frais		lames déferlantes, traînées d'écume
8	coup de vent		tourbillons d'écume à la crête des lames, traînées d'écume
9	fort coup de vent		lames déferlantes grosses à énormes, visibilité réduite par les embruns
10	tempête	

Compléter la colonne qui représente la vitesse en nœuds [abréviation anglaise kt (knot)] en vous servant de la fiche 8.

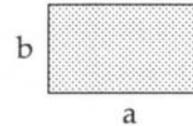


12

Choisir sa propre unité ...

C'était déjà le souci d'Euclide, il y a 2500 ans ...

Nous voulons déterminer la longueur a d'un rectangle en prenant sa largeur b pour unité, c'est-à-dire trouver un nombre x tel que $a = xb$.



◆ Une première méthode consiste à utiliser une unité auxiliaire

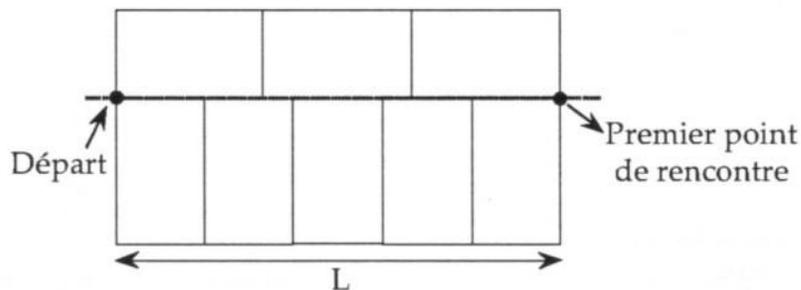
Choisissons le millimètre pour *unité auxiliaire* : $a = 30$ mm et $b = 18$ mm donc

$$\frac{a}{b} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} \text{ d'où } a = \frac{5}{3} b.$$

Cette méthode peut être entachée d'erreurs successives : on pourrait mesurer a par excès et b par défaut, d'où une erreur importante pour le rapport.

◆ Méthode du Plus Petit Commun Multiple (PPCM)

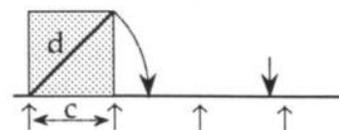
Alignons des rectangles égaux comme l'indique la figure afin d'obtenir un premier point de rencontre. ...



Nous avons construit une longueur commune L telle que dans notre exemple $L = 3a = 5b$ d'où $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$. La mesure de a est $\frac{5}{3}$ en prenant b pour unité.

Exercez-vous :

- Dans l'exemple précédent, on décide de continuer les alignements de rectangles jusqu'au deuxième point de rencontre. Exprimer le rapport a/b avec une autre fraction. Et si on continuait ?
- Mesurer la longueur d'une carte à jouer en prenant sa largeur pour unité.
- Recommencer avec une feuille de format A4.
- Un carré de côté c a une diagonale de longueur d . Voici une construction à la règle et au compas permettant de mesurer d en prenant c pour unité par la



même méthode. Le dessin suggère de graduer une droite avec les unités c et d . Reproduis ce dessin et trouve une approximation de d/c . Dans la pratique, c'est le dessinateur qui décide du point de rencontre. Ici, le point de rencontre existe-t-il *mathématiquement* ?

- Imaginer une méthode similaire pour mesurer le périmètre P du cercle en prenant le diamètre d pour unité ($P = \pi d$). Décrire la manipulation.

◆ Méthode du Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

Reprenons le rectangle du départ et appliquons le procédé suivant :

Mesurons a en fonction de b : $a = 1 b + c$ (c est le reste)

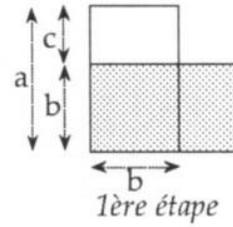
Mesurons b en fonction de c : $b = 1 c + d$ (d est le reste).

Mesurons c en fonction de d : $c = 2 d$. C'est fini !

En résolvant le système formé par ces trois équations, il vient :

$a = 5d$ et $b = 3d$ donc $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$. On a construit une unité

commune d qui permet de mesurer a et b en nombres entiers.

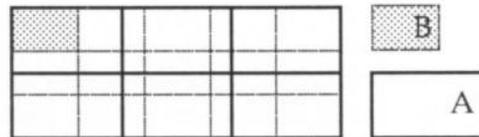


Exercez-vous :

- Reprendre cette méthode avec une feuille de papier A4. Existe-t-il *mathématiquement* une unité commune à a et b ? (Voir Galion Thème $\sqrt{2}$).
- Reprendre cette méthode avec un (grand) carré dessiné sur une feuille de papier blanc et mesurer la diagonale avec le côté pour unité.

◆ Autres grandeurs et mêmes méthodes

- Ce dessin suggère une méthode pour trouver l'aire de A en prenant B pour unité d'aire. On superpose deux pavages : l'un avec A , l'autre avec B . Conclure.



- Disposant d'une balance de Roberval, imaginer une méthode pour mesurer la masse d'un objet A en prenant la masse de B pour unité. Le dessin ci-contre suggère une méthode qui n'utilise pas les masses marquées.



- Deux pendules simples étant suspendus au plafond, imaginer une méthode simple pour mesurer la période T de l'un en fonction de la période t de l'autre sans utiliser un chronomètre.
- Imaginer une méthode pour mesurer la capacité d'une tasse (a) en prenant pour unité la capacité d'une cuillère à soupe (b).



13

Au certif ... vers 1930

◆ Arpentage

- 1- Un arpenteur reconnaît que sa chaîne de 10 mètres est trop longue de 42 mm. Il s'en sert, néanmoins pour mesurer une longueur qu'il trouve égale à 28 longueurs de chaîne. Quelle est la longueur réelle de la distance mesurée ?
- 2- Un jardinier achète à raison de 2,50 F le mètre, un tuyau de toile de 82 m de longueur. Le mètre avec lequel on a mesuré le tuyau était trop court de 0,75 cm. On demande la perte subie par le jardinier.

◆ Histoire de piétons et de cyclistes

- 3- Un piéton qui marche d'un bon pas parcourt 80 mètres à la minute. Il veut aller d'un village A à un village B. Sur la carte du Ministère de l'Intérieur à l'échelle de $1/100\ 000$, la distance entre les deux villages est de 0,12 m. Combien ce piéton mettra-t-il de temps pour faire le trajet indiqué ?
- 4- Un père marche avec son jeune fils ; le fils est obligé de faire 5 pas tandis que le père en fait 4. Au bout de 2,700 km, le fils a fait 1 000 pas de plus que le père. Dites en millimètres la longueur d'un pas du père et la longueur d'un pas du fils.
- 5- Calculer la distance parcourue de 6 h 45 à 9 h 12 :
1°/ par un piéton qui fait régulièrement 5 km à l'heure ;
2°/ par un bicycliste qui fait régulièrement 16 km à l'heure.
- 6- Un cycliste et un piéton partent d'un même point à 9 h 30 du matin. Le cycliste fait 18 km à l'heure et le piéton 1 km en 12 minutes. À quelle distance seront-ils l'un de l'autre à 2 h 15 du soir :
1°/ s'ils vont sur la même route, dans la même direction ;
2°/ s'ils vont dans deux directions opposées.
- 7- En avion, un aviateur français a pu couvrir, de 6 h 8 à 17 h 24, 1 150 kilomètres. Quelle a été sa vitesse à l'heure ? Comparez-la à la vitesse à l'heure d'un bon pilote qui a gagné le Grand Prix d'Espagne en couvrant avec son automobile 692,6 km en 5 h 20.
- 8- Un cycliste, parti à 5 h doit arriver à destination à 11 heures en roulant sans arrêt à 12 km à l'heure. Mais quand il a parcouru 30 km, une crevaison l'arrête une demi-heure. À quelle allure doit-il poursuivre pour arriver à l'heure fixée ? (Concours des Bourses).

◆ **Avec des capacités**

9- 1 hl de pommes de terre pesant 80 kg, combien gagne-t-on à vendre 368 kg de pommes de terre à raison de 12 Francs le double décalitre au lieu de les vendre 70 F le quintal ?

10-On offre à un cultivateur d'acheter son blé 112,50 F l'hectolitre. Il préfère le vendre à raison de 153,60 F le quintal métrique, parce que, de la sorte, il en retire 218,70 F de plus. Sachant que le blé pèse 75 kg l'hectolitre, on demande combien il avait de doubles décalitres à vendre.

◆ **Sur le méridien**

11-Paris et Alger sont sur le même méridien à une distance de 12° environ. Calculez en kilomètres la distance qui sépare ces deux villes.

12-Quelle est en kilomètres la distance de Dunkerque à Barcelone ? Ces deux villes sont sur le méridien de Paris ; la latitude de Barcelone est $41^\circ 22'$ et celle de Dunkerque $51^\circ 2'$.

◆ **Des clous !**

13-Un cloutier fabrique 1200 pointes dans une journée qui lui est payée 5,40 F. Une pointe a 0,05 m de longueur et le fil de fer avec lequel on fait les pointes pèse 450 g par mètre et vaut 81 F le quintal. On demande à combien revient le demi-kilogramme de pointes.

◆ **Des trains**

14-Deux trains doivent faire le même trajet de 240 km. L'un omnibus fait 45 km à l'heure, l'autre est express et fait 75 km à l'heure. le premier part à 7h 30 . À quelle heure l'autre devra-t-il partir pour arriver à destination 26 minutes plus tard seulement que le premier.



14 Soyons précis ...

Ça faisait un *bon bout de temps* que j'attendais le bus. Une *éternité*, quoi ! Enfin il arrive à 8 h 42 passées de quelques *broquilles*.

Le conducteur explique que ça faisait un *bail* qu'il n'avait pas eu de retard...

Tu parles !

Enfin, il démarre à *toute berzingue* en direction de la gare Saint Lazare.

En face de moi, j'observe un grand type d'*une trentaine* d'années et *des poussières* ; il m'apostrophe :

«Je vous connais vous ? ça fait *une paye*, hein !»

«Et *le pouce* !» que je lui réponds !

Le bus arrive à Saint Lazare ; l'homme descend, ça faisait bien *longtemps* que je ne l'avais pas vu.

Je descends à mon tour Il fait un vent de *corne-cul* sur le parvis de la gare. Il me reste une *trotte* à parcourir pour regagner mon bureau.

Il fait froid, je n'aurais pas du travailler avec cette *fièvre de cheval*.

Je rentre dans un bistrot et je demande *une bonne ration* de vin chaud.

Ca fait du bien.

Exercez-vous :

- Calculer la durée du voyage à un laps de temps près.
- Imaginer d'autres unités pifométriques pour les longueurs, les aires, les volumes, les durées.

D'après une idée prise dans un article de Jean Blanchard.