

PLOT



n° 87

L'esprit informatique

NUMÉRIQUEMENT VOTRE

exposition itinérante

ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger.

septembre 1999

50 F

Plot 87 - septembre 1999

Sommaire

1 - Deux p'tits bouts d'allumaths Les allumés des maths	02
2 - Où commence le ciel ? LA RÉDACTION !	05
3 - Sous le Soleil, exactement ! Daniel TOUSSAINT, Aix-en-Othe	07
4 - Des quadrilatères qui se reproduisent ! Jean-Marie LEBRIE, Montréal	13
5 - Mesurez l'Univers ? Oui, c'est possible !!	18
6 - La distance Terre-Soleil Jean-Luc FERRARI - Lausanne	21
7 - Construire une mosquée André VIRICEL - Villers-les-Nancy	25
7 - Des nombres astronomiques Irem de LYON	25
6 - L'an 2000 et les calendriers René LIGIER - Besançon	29

Éditorial

Maths 2000, année mondiale des mathématiques va voir le jour d'ici quelques semaines.

Dans ce numéro, fort de l'appel de cet été de voir, avec ou sans lunettes, la dernière éclipse du siècle, fort de l'avènement du prochain siècle en 2000 ou, pour les puristes en 2001, nous vous proposons une suite d'articles et d'activités tournées vers le ciel et les étoiles.

A vous d'en tirer le meilleur profit pour vos élèves !
Réabonnez-vous pour l'année 2000 !

**Pensez
à vous
réabonner
pour
1999
et
2000
année
mondiale
des mathé-
matiques !**

Les bissectrices dans un parallélogramme

Deux nouveaux bouts d'allumaths

par les allumés des maths !!!

Le groupe des allumaths (les "allumés" des maths) réunit quelques enseignants de mathématiques de l'Académie de Poitiers pour la plupart.

Il propose à chaque fois une idée ou une situation de recherche neuve ou peu connue, simple pour des lycéens.

A vous d'inventer les questions qui vont avec !

Voici deux nouveaux sujets, l'un géométrique, l'autre numérique, et des éléments de réponses pour les deux précédents sujets parus dans le PLOT n° 85.

Plot 87 - Situation 1

Plot 87 - Situation 2

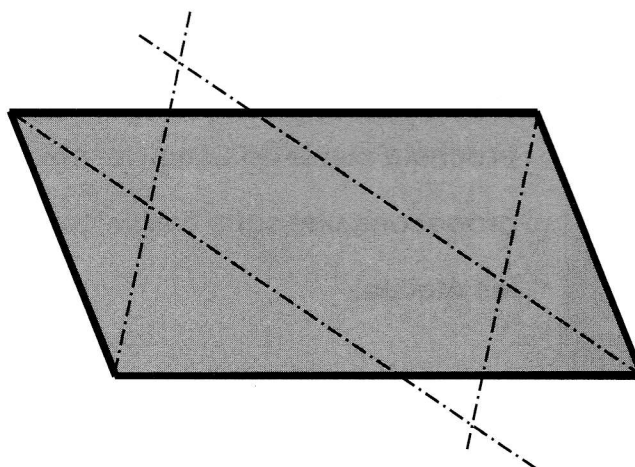
ABCD est un parallélogramme.

Que pouvez-vous dire des quadrilatères formés par les ... bissectrices des angles du parallélogramme ?

Et si l'on décidait qu'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ était divisible par un autre nombre rationnel $\frac{c}{d}$ lorsqu'il existe, comme dans $\mathbb{N}$, un nombre relatif k tel que :

$$\frac{a}{b} = k \times \frac{c}{d} \quad ?$$

Et cela suffit pour se poser des problèmes divers et variés et accessibles à tous !



Attention ! Les bissectrices sont intentionnellement mal tracées pour ne pas faire apparaître trop rapidement les premières propriétés à trouver.

Merci de bien vouloir
envoyer vos
commentaires et
réflexions à
Marc Blanchard,
39, rue Barbès.
17300 Rochefort/mer.

Les orthocentres d'un quadrilatère

A propos des situations 1 et 2 parues dans le Plot n° 85

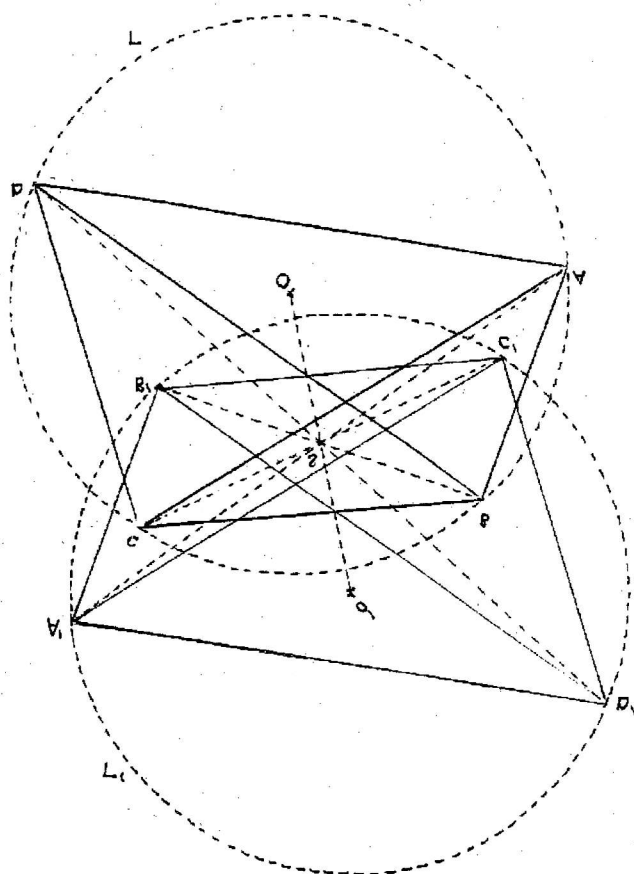
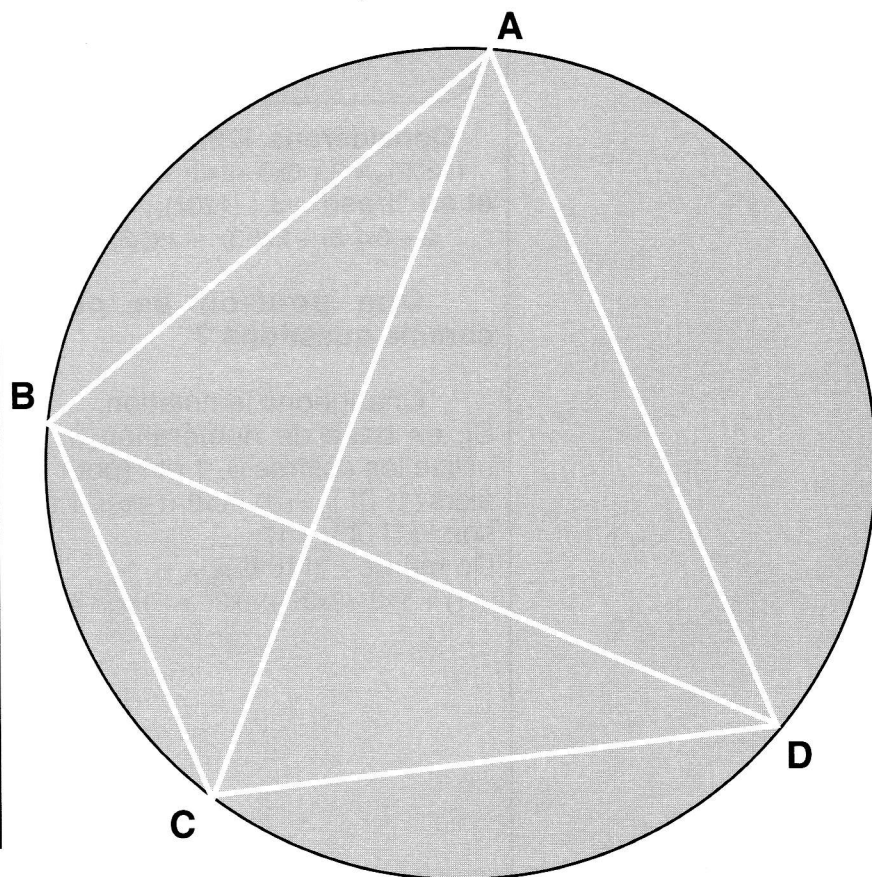
Situation Plot 85-1

ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle.

On note D' l'orthocentre du triangle ABC , A' celui de BCD , B' pour CDA et C' pour DAB .

Et cela suffit pour se poser des problèmes divers et variés, divertissants et accessibles à tous.

1- $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CDC'D'$ et $DAD'A'$ sont des parallélogrammes.

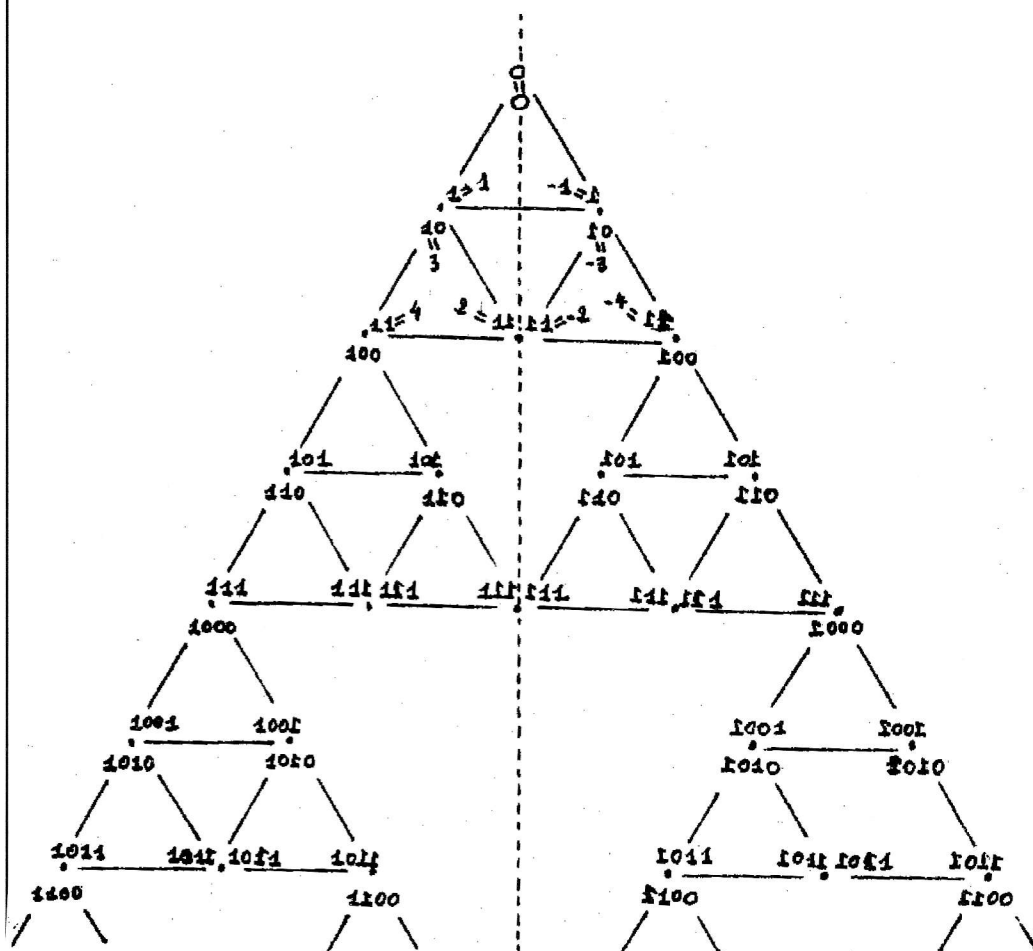


2- Les segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ et $[DD']$ ont un milieu commun S qui est centre de symétrie de la figure - en traçant le cercle symétrique au cercle $(ABCD)$.

3- S est point commun aux cercles d'Euler des triangles ABC , BCD , CDA , DAB , $A'B'C'$, $B'C'D'$, $C'D'A'$ et $D'A'B'$.

4- S est le point de concours des droites de Simson des points A , B , C et D pour les triangles respectifs BCD , CDA , DAB et ABC .

Ceci peut s'étendre à toute base de numération b , naturelle impaire en utilisant comme chiffres les entiers de 0 à $(b-1)/2$ et leurs opposés (par exemple en base 5 : 0, 1, 2, -1, -2).



Pour écrire l'opposé d'un nombre,
il suffit de changer les chiffres 1 en $\bar{1}$ et $\bar{1}$ en 1.

La Terre, l'Univers et l'enfant

Dans beaucoup de pays, en France (sur La 3, M6, ...), dans les pays anglo-saxons, des émissions de télévision sur l'Univers et l'astronomie s'adressent aux enfants et aux adolescents. Les enseignants peuvent reprendre ces émissions et apprendre à observer le ciel dans la journée ou sous le ciel étoilé.

Les salles de classe sont de lieux auxiliaires et ne pourront jamais remplacer la réalité.

L'astronomie est une science qui évolue, les phrases toutes faites, les certitudes doivent être interdites.

Nous pouvons montrer la réalité avec des phrases toutes simples. La compréhension de la structure physique de l'Univers est basée sur des faits concrets.

Si les enfants étudient la réalité et pas seulement ses représentations orales ou écrites, leur surprise, leur joie, leur enthousiasme et leur curiosité augmenteront toujours.

Les phrases des scientifiques, loin d'être des paroles de journalistes, sont des invitations à la découverte. La disponibilité de l'enfant pour la découverte ne sera jamais remplie par les pseudo-fictions scientifiques. La réalité est infiniment plus belle que n'importe quelle fantaisie.

Nous pouvons conclure que s'il existe un soleil (le nôtre) avec une pla-

nète habitée par des êtres sensibles et intelligents la probabilité d'existence d'autres soleils avec des planètes habitées augmente au fur et à mesure qu'augmente le nombre de soleils. Le carbone, la base de tous les êtres vivants sur la Terre, est le seul à permettre des milliers de liaisons pour les manifestations de vie.

Plus, l'homme s'intègre à son milieu, plus il devient universel. Le sentiment d'universalité ne nuit pas, il se perfectionne. La vision spatiale est un des meilleurs outils pour cela.

Même s'ils nous mènent loin, les voyages spatiaux n'auront aucune valeur s'il s'agit tout simplement d'une aventure technologique.

Des notions d'espace-temps, de distance-durée, de vitesse et de simultanéité ainsi que des notions sur les structures de notre Univers devront être enseignées et comprises avec beaucoup de clarté et de profondeur. Les belles théories de la Physique Moderne auront vraiment la saveur de l'aventure et laisseront toujours la sensation du mystère sans la crainte des paradoxes apparents.

Pour cela il faut également que les enfants connaissent l'histoire de la pensée scientifique et des découvertes technologiques. Pour pouvoir comprendre et évaluer les défis vaincus par la science il faut les appréhender.

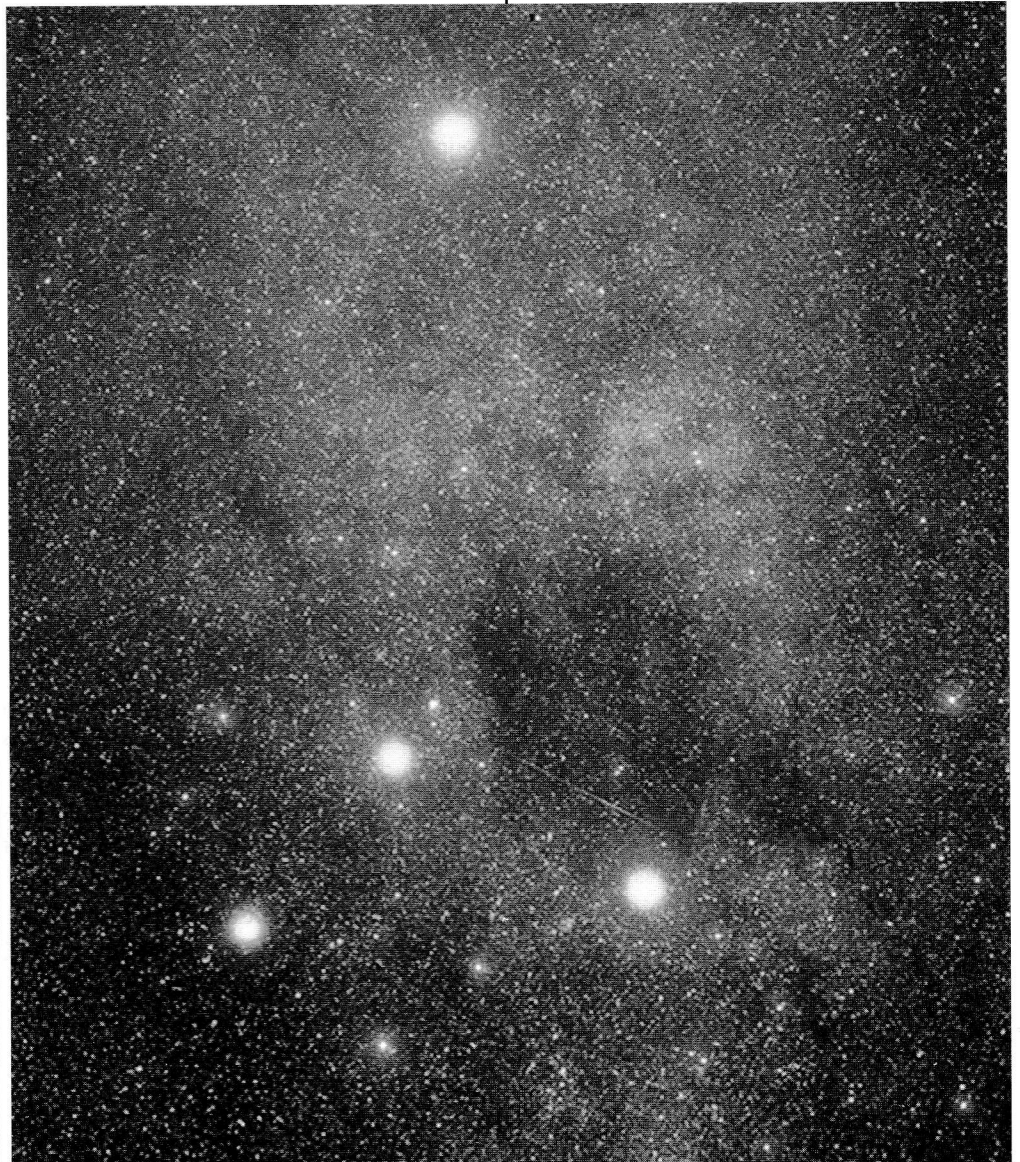
où
com-
mence
le
ciel
?

Si les phénomènes de la nature sont intelligibles, le langage mathématique est un langage qui peut être un outil de cette compréhension, avec tous les avantages d'un langage clair et concis.

L'Astronomie est la maîtresse des premiers pas de l'humanité pour la connaissance de la nature: c'est elle qui a formé l'esprit de la patiente indignation des savants, et qui a façonné le

nomie est le début naturel pour former l'esprit scientifique, l'esprit d'observation et d'interprétation.

L'Astronomie est une invitation aux enfants à revenir à leurs origines, à reprendre leurs voyages, à découvrir de nouveaux sentiers et à la longue marche des hommes tout au long des siècles, à la recherche de la connaissance.



génie des découvertes, se laissant dévoiler de ses mystères.

Si le perfectionnement de chacun se fait en suivant les mêmes chemins parcourus par l'humanité, l'Astro-

Si avec l'Astronomie les enfants arrivent à regarder le ciel avec des yeux de scientifiques, ils peuvent aussi nous apprendre à regarder les étoiles avec des yeux d'enfants.

Sous le ciel des tropiques

Daniel Toussaint, Aix en Othe (10)

Gosier (Guadeloupe) :
Latitude: 16,0° Nord
Longitude: 61,5° Ouest.

Aix en Othe (Aube):
Latitude: 48,2° Nord
Longitude: 3,25° Est.

Cet article rédigé lors d'un mémorable congrès de l'Apmep aux Antilles a pour modeste ambition de vous permettre de décoder ces quelques chiffres pour y découvrir tout le charme des tropiques.

Longitude

Pour téléphoner des Antilles en métropole (et vis-&-versa !!!) sans se faire insulter par un correspondant réveillé en sursaut, il vaut mieux avoir compris ce qu'indiquent les montres !

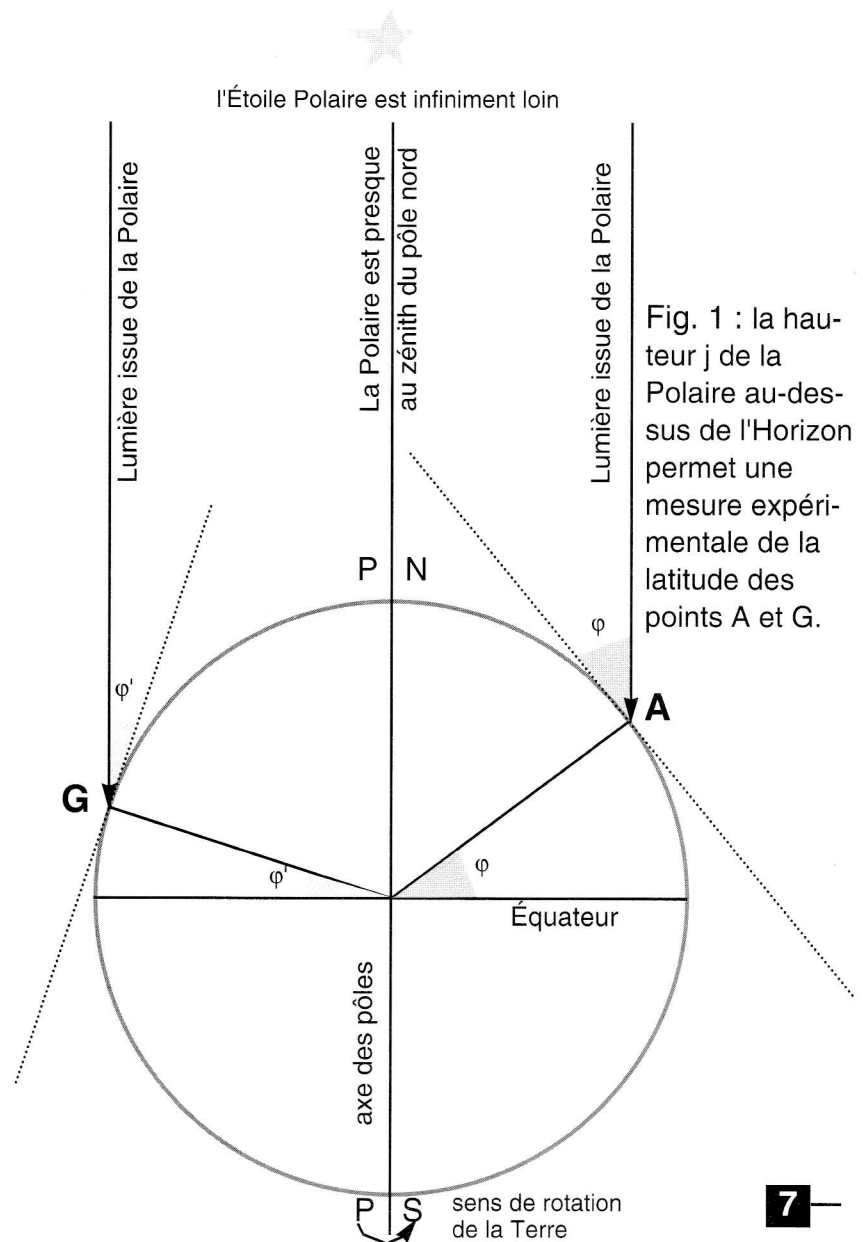
- Quand le Soleil culmine en un lieu, il y est théoriquement midi, et c'est ce qu'indiquent tous les cadrans solaires situés sur le même méridien. En cherchant bien, on peut dénicher quelques rares cadrans solaires, mais quand ils indiquent midi la Terre a dû tourner pendant environ 4 heures depuis l'instant où un cadran construit à Aix en Othe donnait le même renseignement.

- Cela peut se vérifier sur un transparent mobile (distribué par le CLEA), mais cela se retrouve aussi

par un rapide calcul ; une différence de longitude de 15° correspond à une heure (360°/24h), et le décalage entre Aix et les Antilles est de : $3,25 - (-61,5) = 64,75^\circ$ soit 4h 20min.

C'est le retard d'un cadran solaire antillais sur un autre cadran construit au cœur de la forêt d'Othe.

- Mais ce n'est pas le décalage qu'indiquent les montres, car si on peut



négliger les variations de longitudes (maximum une demi-heure) sur le territoire métropolitain (c'est ce que l'on a fait en établissant les fuseaux horaires) et l'équation du temps (à une date donnée, elle prend la même valeur pour tout point de la Terre), on ne peut cependant négliger les fantaisies du législateur qui a subrepticement ajouté 2 heures en été à l'indication des cadrans solaires (les parisiens "ne cherchent pas midi à 14h" mais 14 heures à midi ! quand elle indique l'heure solaire de l'Europe centrale).

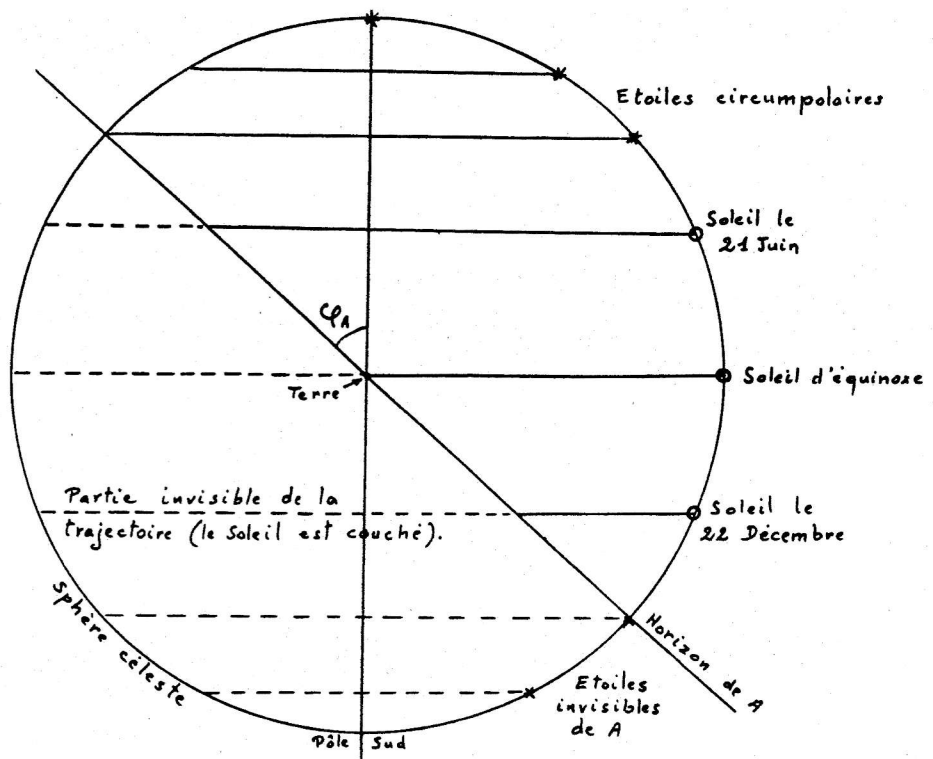
Comme ce législateur n'a pas imposé ses facéties aux Antillais, il faut retarder sa montre de 6h pendant le trajet de Roissy à Pointe-à-Pitre ou Fort-de-France.

Latitude

Que les cadrans solaires aient un retard de 4 heures sur les cadrans parisiens ne signifie pourtant pas que la journée commence à Gosier avec 4 heures de retard, car la différence de latitude contribue à compliquer la situation: la durée du jour varie beaucoup avec la saison sous les latitudes élevées, alors qu'elle varie très peu dans la zone intertropicale.

Ce phénomène est facile à interpréter sur une sphère céleste :

- chaque astre a une trajectoire diurne qui dépend beaucoup de la latitude simplement parce que l'angle dièdre entre le plan de l'horizon et celui de la trajectoire (toujours parallèle au plan équatorial) s'ouvre plus ou moins (Fig. 2a et 2b). Cela a des conséquences pratiques faciles à observer, et un peu plus difficiles à photographier.



— 8

Fig. 2a :
Trajectoires apparentes
des astres vus de A
(mouvements diurnes).

Que peut-on mettre en évidence par des photos ?

- les étoiles nouvelles dont parle Hérédia :
- où les trouver ? Vers le Sud, au-dessous de l'équateur céleste.
- techniques : film 400 ISO ou plus. Objectif normal (50mm) ou grand angle (28mm) ouvert à fond (f/1,8). Pose de 15s à 40s (pose B).
- Nécessité de fixer l'appareil et d'utiliser un déclencheur souple.

due au mouvement diurne (c'est-à-dire qu'on voit la Terre tourner dans le ciel).

- sujet : diriger successivement l'appareil vers les points cardinaux.

Vers le Nord, on voit que la Polaire est très basse sur l'horizon: sa "hauteur" est égale à la latitude de Gosier, soit 16° , seuls le Grand Chariot et Cassiopée peuvent ainsi se coucher, alors que ce sont des constellations circumpolaires en métropole.

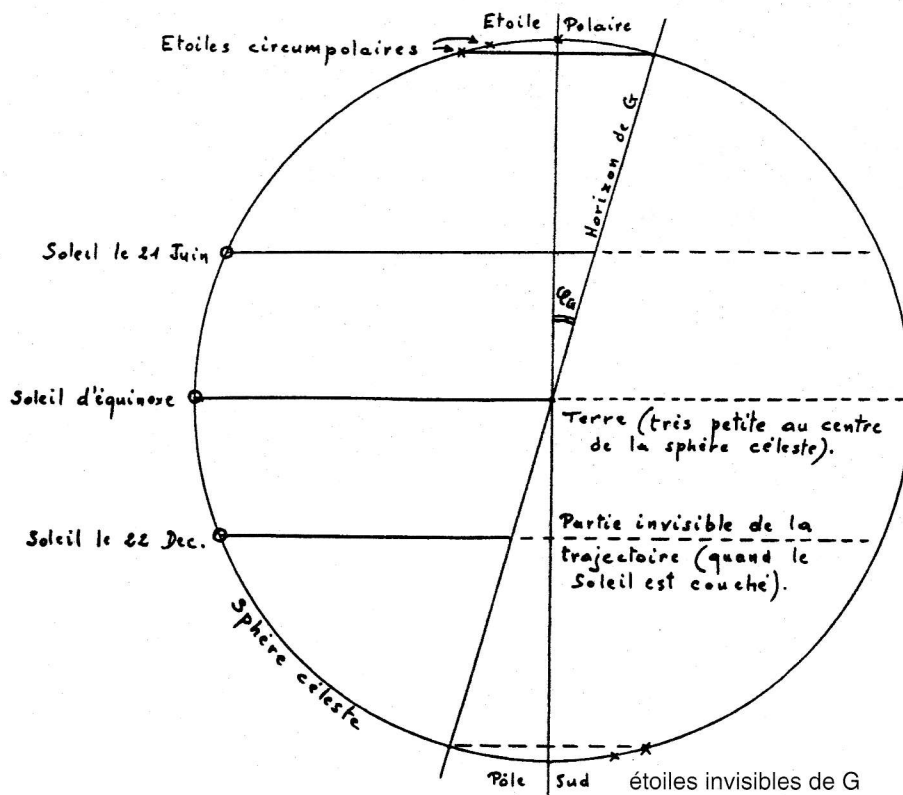


Fig. 2b :
Trajectoires apparentes
des astres vus de G
(mouvements diurnes).

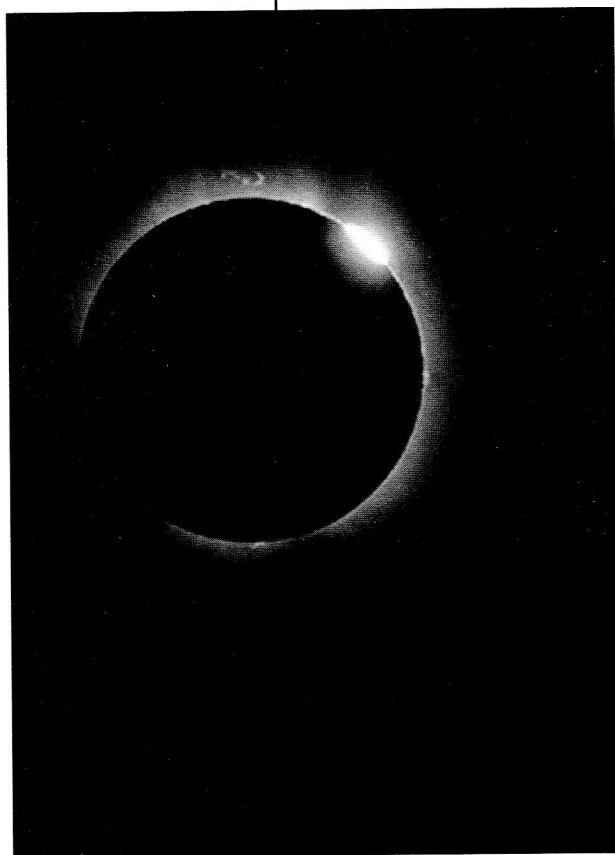
- le mouvement de rotation de la Terre :

- technique : faire des poses plus longues, (un film 200 ou 400 ISO suffit) ; si le mouvement de la Terre n'est pas compensé par un dispositif d'entraînement, on voit une trace

Vers le Sud, on voit culminer la Croix du Sud (bien que l'on soit dans l'hémisphère Nord, une partie non négligeable des constellations australes est visible).

Vers l'Est ou l'Ouest, les étoiles, mais surtout les planètes qui sont

souvent bien plus lumineuses, plangent presque perpendiculairement à l'horizon (Fig. 2b). Pendant les Journées APMEP, on pouvait assister chaque soir au coucher de Vénus et de Jupiter dans ces conditions.



• autre technique plus simple: avec des pellicules ordinaires, on peut toujours photographier les ombres des lampadaires de temps en temps pendant toute une journée.

C'est la vieille méthode du gnomon,

ancêtre des cadrans solaires. Au mois d'avril, le Soleil passe au zénith de Gosier et, à cet instant, les piquets plantés verticalement perdent leur ombre.

- les nébuleuses gazeuses invisibles à des latitudes plus élevées:

Pour les mettre en évidence, il faut faire des poses longues tout en compensant le mouvement diurne avec un système d'entraînement de l'appareil photo. Mais comme cela demande du matériel assez difficilement transportable dans

20kg de bagages, on peut tourner la difficulté en utilisant des pellicules très sensibles, ce qui permet de poser pendant, moins d'une minute.

Objets célestes à ne pas manquer

- **La Croix du Sud**, avec la nébuleuse obscure du Sac de Charbon, à ne pas confondre avec la fausse croix (entre la Carène et les Voiles).

- L'amas globulaire **Oméga du Centaure** qui, étant relativement proche (17.000 a-l), est bien visible à l'œil nu.

- Ce n'est malheureusement pas la bonne période pour **les Nuages de Magellan**. A cette latitude, ils émergent un peu de l'horizon sud, mais le Soleil est mal placé en ce moment. Il faudrait revenir 6 mois plus tard.

- **Le Scorpion** qui se déploie complètement alors qu'en métropole, il est toujours à demi caché. Mais il faut attendre assez tard dans la nuit et le 30 avril, la Lune qui est justement dans cette direction fait pâlir toutes les étoiles. Il suffit d'attendre quelques nuits pour que la situation soit plus favorable car la Lune change de constellation d'une nuit à l'autre (elle se lève de plus en plus tard et sa phase diminue puisque la Pleine Lune est passée).

Pour obtenir des renseignements sur les Recherche Pédagogique du CLEA, écrire à : Gilbert Walusinski, 26 rue Béren-gère, 92210 Saint Cloud.

Des quadrilatères qui se reproduisent

Jean-Marie Labrie - Montréal

Le Bulletin de l'AMQ (Association Mathématique du Québec) propose régulièrement des problèmes. En voici un que nous laissons à votre cogitation tout en vous en donnant une solution.

Problème 1 :

**Peut-on généraliser
le théorème de Van Aubel
?**

Quand on dessine vers l'extérieur un carré à partir de chaque côté d'un quadrilatère convexe et qu'on réunit, par des segments de droite, les centres des carrés opposés, les deux segments de droite ainsi obtenus sont égaux et se coupent à angles droits.

En attendant de recevoir quelques propositions de démonstrations, nous vous donnons quelques exemples d'illustrations de ce théorème dans les cas suivants :

1. Le quadrilatère initial est convexe.
figure 1.

2. Dans la figure 2, nous avons appliqué le théorème à un segment de droite ayant deux points choisis à l'intérieur du segment.

Est-ce toujours vrai ? Sinon, quelle est la condition suffisante ?

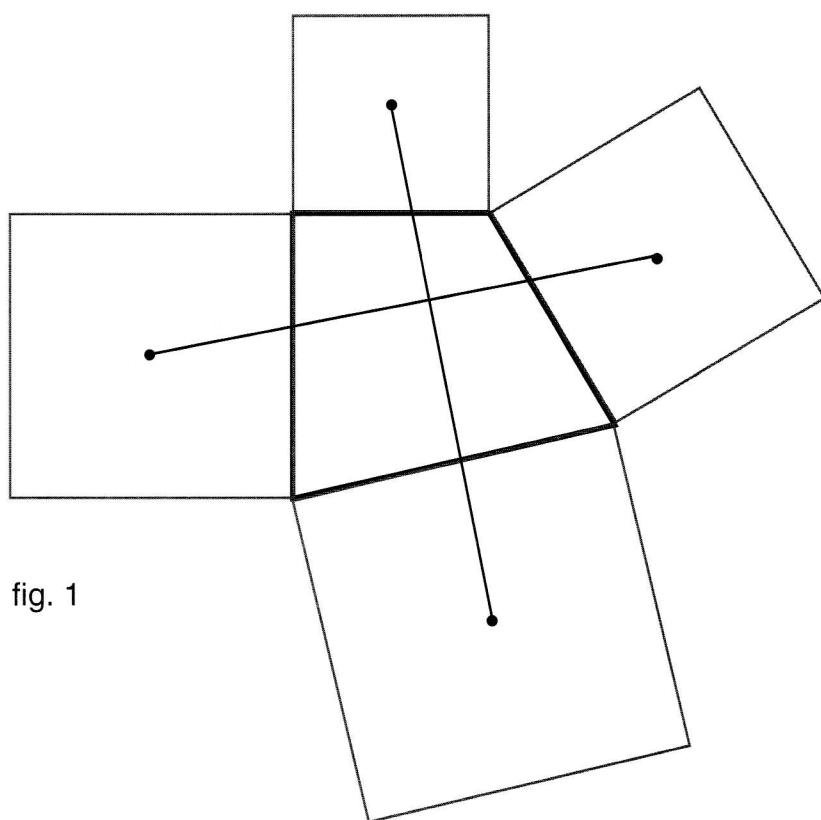
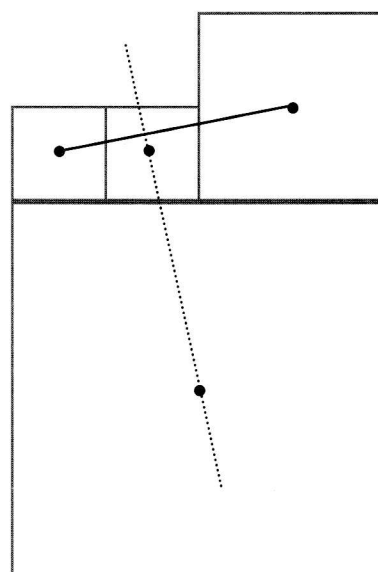


fig. 1

fig. 2



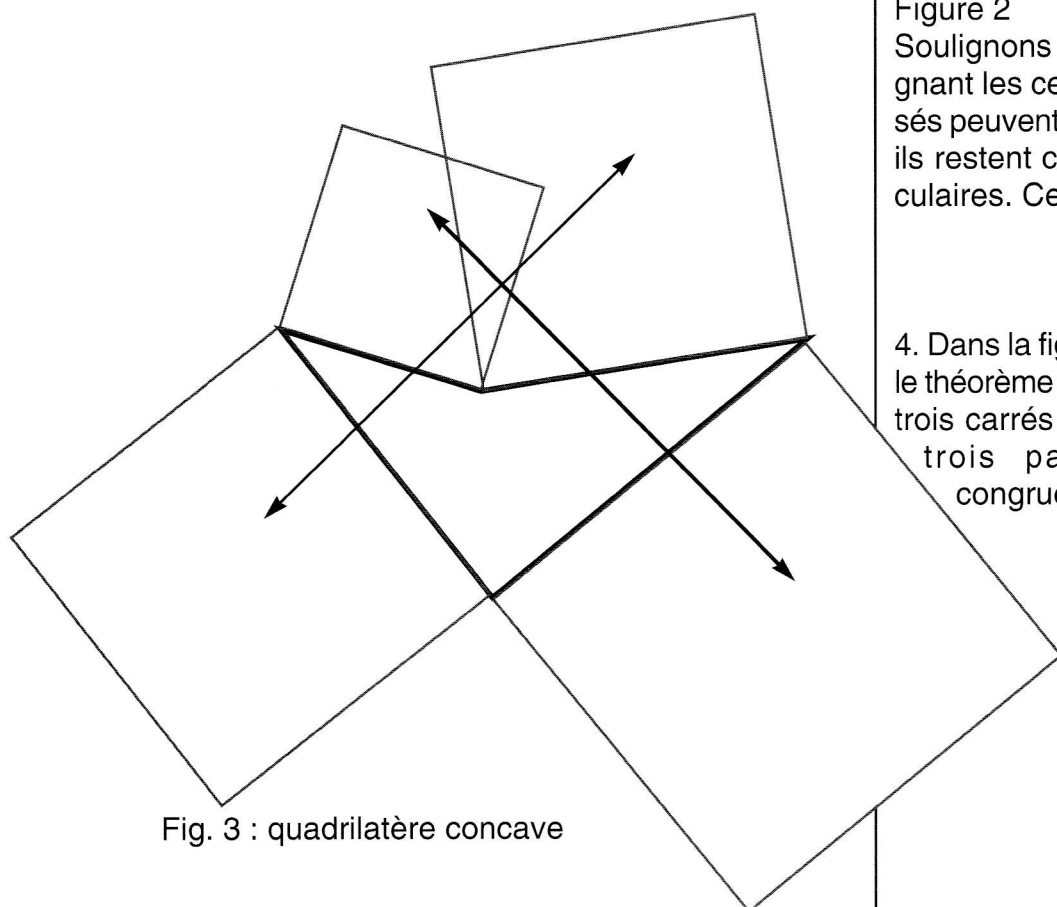
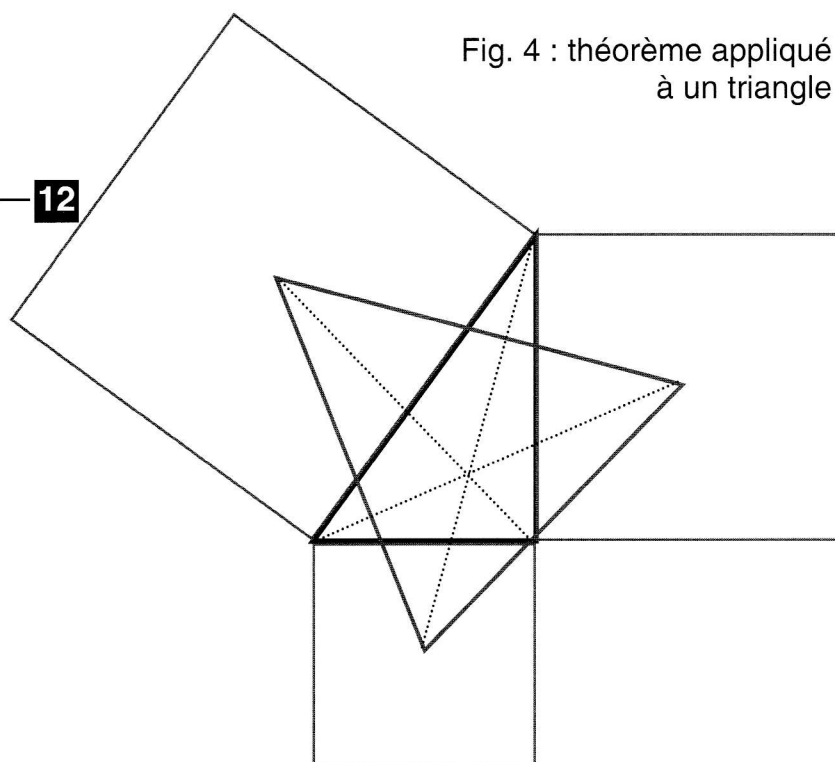


Fig. 3 : quadrilatère concave

Fig. 4 : théorème appliqué à un triangle



3. Le quadrilatère initial peut être concave.

Figure 2

Soulignons que les segments joignant les centres des carrés opposés peuvent ne pas se couper. Mais ils restent congruents et perpendiculaires. Ce n'est pas le cas ici.

4. Dans la figure 4, nous appliquons le théorème à un triangle. Il n'y a que trois carrés et nous pouvons avoir trois paires de segments congruents.

5. Vous pouvez aussi appliquer le théorème au cas d'un segment de droite où il y a seulement un point à l'intérieur du segment.

Problème 2 :

Trouvez deux triangles !

Trouver, s'ils existent, deux triangles qui ne sont pas congruents, mais qui ont leurs trois angles congruents et seulement deux côtés congruents.

Solutions à envoyer au Journal et qui paraîtront dans le prochain numéro du PLOT.

Mesurez ... l'Univers !!!

Aujourd'hui, grâce à nos technologies avancées (satellites, télescopes, écho radar, ...), il nous est possible de mesurer avec assez d'exactitude la circonférence de la Terre et la distance Terre-Lune. Le professeur de mathématique qui voudrait aborder ce sujet avec ses élèves trouverait peut-être de nombreuses oreilles intéressées à son discours. Il pourrait se servir de l'occasion pour rapporter comment des hommes qui ont vécu il y a plus de deux mille ans et qui s'étaient passionné pour ces deux questions, s'y sont pris pour les résoudre.

Dimensions de la Terre

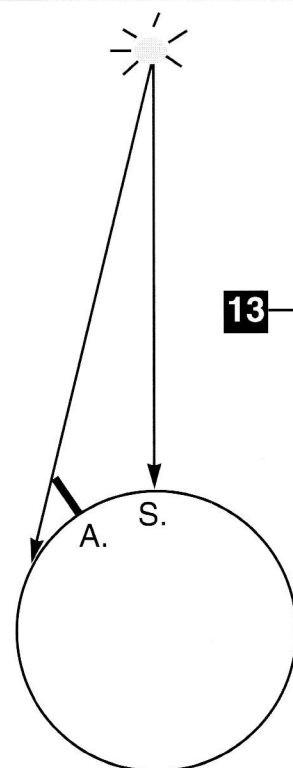
La méthode des Grecs, en ce qui concerne ces deux questions, repose beaucoup sur l'observation des phénomènes naturels. On attribue généralement à Eratosthène (284 - 192 av. J.-C.) la première mesure de la circonférence de la Terre - on savait que la Terre n'était pas plate depuis les 6^e ou 5^e siècle et le modèle de solution qu'il proposa demeura le seul pendant fort longtemps.

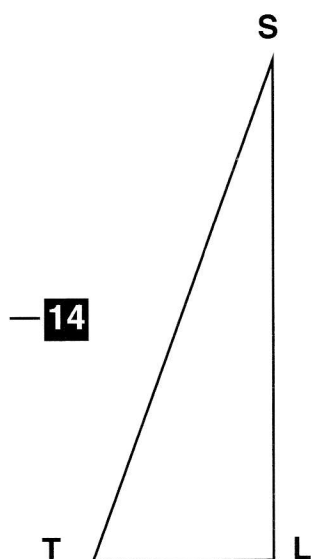
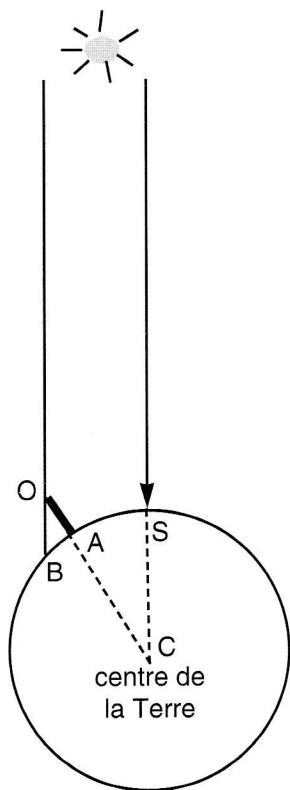


Eratosthène avait entendu dire qu'à midi, au jour le plus long de l'année, le Soleil ne produisait aucune ombre dans la ville de Sienne, alors qu'au même moment à Alexandrie - qu'on croyait juste au sud de Sienne - le Soleil frappant l'obélisque produisait au sol une ombre. Ce n'est qu'à partir de ces seuls renseignements qu'Eratosthène se mit au travail.

Le jour le plus long !

Il interpréta la première affirmation comme suit : le jour le plus





Voyez-vous pourquoi les trois astres forment un triangle rectangle lorsque de la Terre on voit un quart de Lune ?

long, les rayons du Soleil arrivent perpendiculairement sur la ville de Sienna. Ils frappent par contre obliquement l'obélisque d'Alexandrie.

Puis, il fit l'approximation ou l'idéalisation suivante: la distance du Soleil à la Terre étant très grande par rapport à la distance séparant les deux villes, l'angle entre les deux segments représentant les rayons du Soleil sera infiniment petit.

Ces segments apparaîtront parallèles pour l'observateur terrestre. Ce qui le conduit à s'intéresser plutôt à la figure ci-contre.

Dans tout ceci, quelles sont les longueurs qu'il peut mesurer ? Certainement la hauteur de l'obélisque (Thalès lui avait indiqué comment, grâce à son célèbre théorème).

Nul doute qu'il peut mesurer sur le terrain la longueur de l'ombre AB. Ainsi, il saura calculer la valeur de l'angle BOA puisque le triangle AOB est rectangle.

$$(\tan BOA = AB / OA)$$

Des considérations sur les angles alternes-internes lui assure qu'il connaîtra l'angle au centre qui sous-tend l'arc AS. En fait, angle AOB = angle ACS et il peut mesurer le premier angle.

Finalement, à partir d'une

règle de trois, il déduit que :

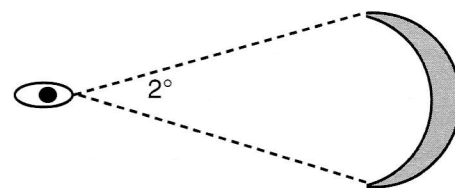
$$(\text{circonférence de la terre} / 360^\circ) = (\text{distance entre A et S} / \text{angle ACS})$$

Il fera calculer par les marcheurs du Roi la distance entre les deux villes et connaîtra complètement la valeur du membre de droite de l'égalité ci-dessus.

Distance Terre-Lune

Ainsi, la circonférence de la Terre sera connue.

Eratosthène mis à exécution son plan. La mesure qu'il obtient surprend par sa précision, compte tenu des moyens de mesure rudimentaires à sa disposition (les marcheurs du roi !) et l'erreur commise en croyant qu'Alexandrie se trouvait juste au sud de Sienna, ce qui n'est pas tout à fait le cas.



C'est aussi à partir d'observations, mais cette fois plus nombreuses, que les Grecs tentèrent de mesurer la distance Terre-Lune.

Observation 1

On savait qu'un observateur placé sur la Terre voit la surface de la Lune avec un angle de vision de 2° .

Observation 2

Lorsque de la Terre on voit la moitié de la surface de la Lune (c'est-à-dire un quart de Lune), alors on peut calculer l'angle avec lequel on voit la distance entre le Soleil et la Lune, c'est-à-dire l'angle STL. Cet angle est très près de 90° .

Observation 3

Lors d'une éclipse de Soleil (pour ceux qui n'auraient pas lu, entendu ou vu les médias : la Lune passe devant le Soleil et le cache complètement), la Lune couvre exactement le Soleil ! (Attention à vos lunettes !!!).

Observation 4

Lors d'une éclipse de Lune (la Terre se trouve entre la Lune et le Soleil), le diamètre de l'ombre terrestre est le double de celui de la Lune. Autrement dit, le cône d'ombre pourrait recouvrir deux fois la Lune.

C'est surtout à partir de ces quatre observations que les Grecs élaborèrent des calculs. Nous allons

les suivre dans leur raisonnement.

A partir de l'observation 2, ils ont calculé que l'angle STL vaut 87° . En fait, ce résultat est faux. L'angle est en réalité plus près de 90° que cela.

Mais passons, c'est surtout à leur démarche que l'on veut s'intéresser.

Ainsi l'angle TSL vaut 3°

et $\sin 3^\circ = TL / TS$, rapport des distances Terre-Lune et Terre-Soleil, sera alors connu.

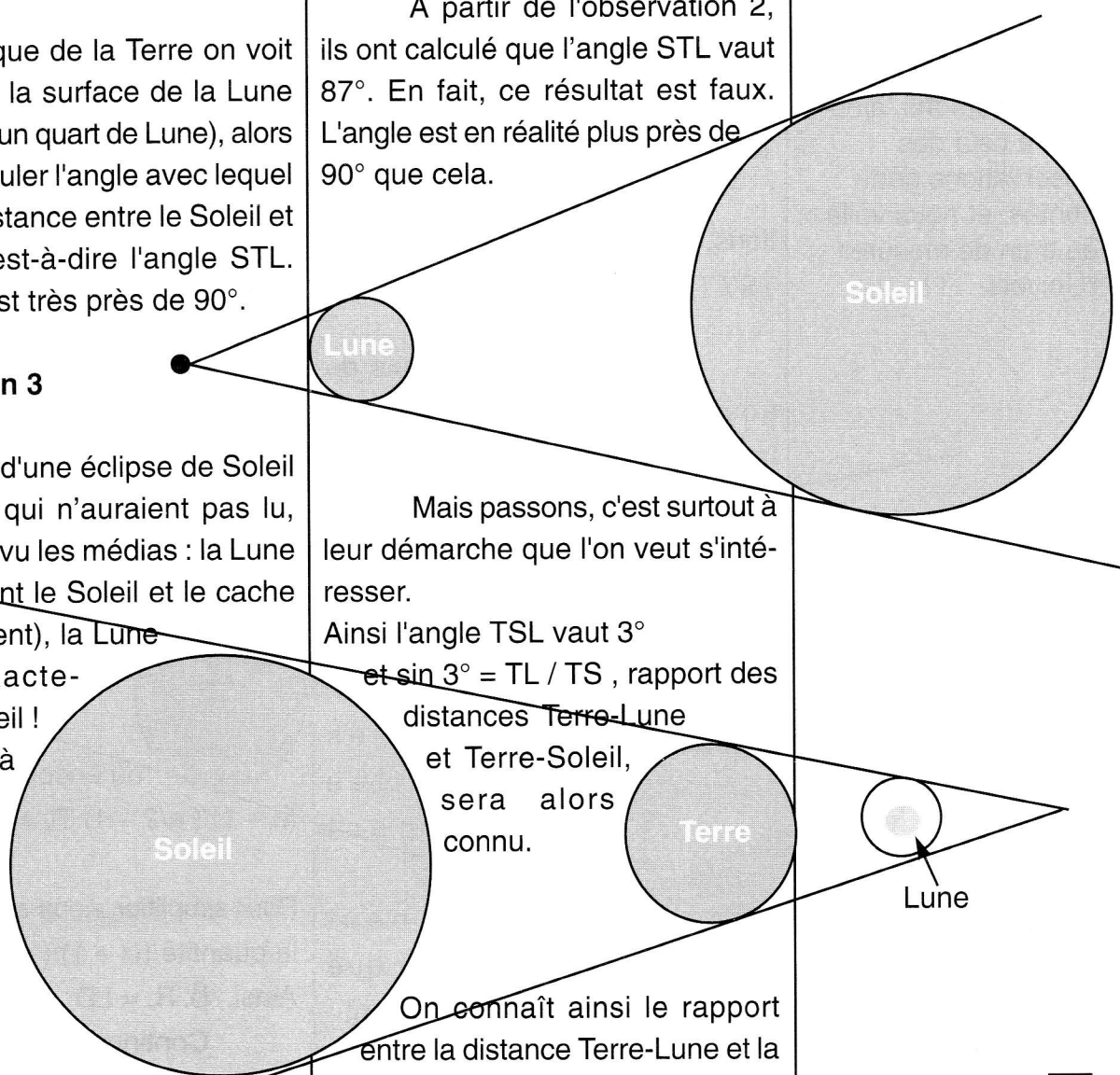
On connaît ainsi le rapport entre la distance Terre-Lune et la distance Terre-Soleil.

L'observation 3 nous fournit un renseignement précieux.

Notons r_L , r_T et r_S les rayons, respectivement de la Lune, de la Terre et du Soleil.

A cause des triangles semblables, on peut écrire l'égalité entre les rapports suivants :

$r_L / r_S = \text{distance Terre-Lune} / \text{distance Terre-Soleil} = TL / TS$ qui est connu, c'est $\sin 3^\circ$.



Quelques traits de crayon sur une feuille, quelques considérations sur les proportions, ajoutées à cela des observations pertinentes, et nous voilà en train de mesurer l'Univers... !!!

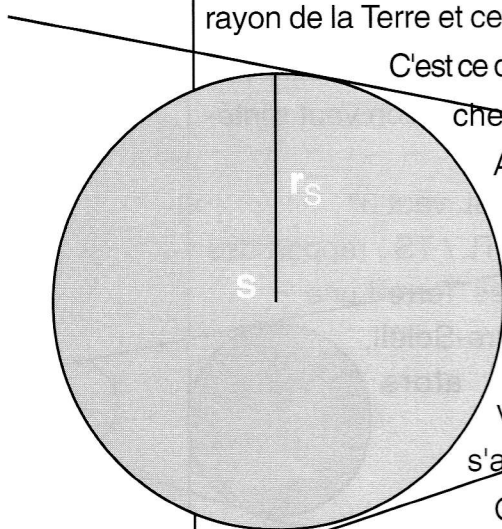
C'est donc dire que l'on connaît le rapport entre le rayon du Soleil et celui de la Lune (c'est le même que le rapport de leurs distances à la Terre).

Afin de simplifier les notations, nous écrirons :

$$TS / TL = r_S / r_L = \alpha$$

Il est peut-être possible de trouver aussi le rapport entre le rayon de la Terre et celui de la Lune.

C'est ce que nous allons chercher.



A partir de la figure de l'observation 4, d'autres égalités viennent s'ajouter.

On peut même établir que

r_S / r_L est connu ; voici comment :

S, T, L sont respectivement le centre du Soleil, de la Terre et de la Lune.

On voit, par exemple, que :

$$(1) \quad SD / LD = r_S / 2.r_L =$$

$$(1/2).(r_S / r_L) = (1/2).\alpha$$

puisque $\alpha = r_S / r_L = TS / TL$

$$(2) \quad TS = \alpha . TL$$

Regardez bien la figure et vous verrez que :

$$SL = ST + TL$$

qui peut aussi s'écrire, grâce à (2),

$$(3) \quad SL = \alpha . TL + TL = (\alpha + 1) TL.$$

On peut voir aussi que

$$SL = SD - LD.$$

Mais d'après (1) :

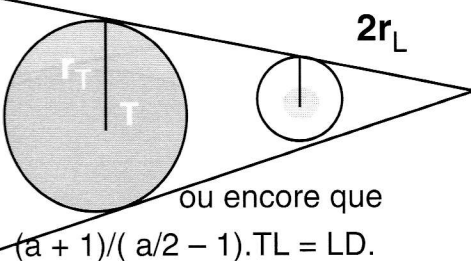
$$(4) \quad SD = (1/2)\alpha . LD$$

d'où

$$(5) \quad SL = (1/2)\alpha . LD - LD = (1/2)(\alpha - 1) LD.$$

Si on compare les résultats écrits en (3) et (5), on déduit que

$$(\alpha + 1) TL = (1/2)(\alpha - 1) LD$$



ou encore que

$$(\alpha + 1) / (\alpha / 2 - 1) . TL = LD.$$

Pour simplifier, nous appellerons β la quantité $(\alpha + 1) / (\alpha / 2 - 1)$.

$$\text{Ainsi, } \beta . TL = LD \quad (6).$$

Continuons, c'est un plaisir de manipuler comme ça des distances astronomiques...

Toujours sur la figure ci-dessus, on lit que :

$$TD = TL + LD$$

$$\text{par (6) } TD = TL + \beta . TL$$

$$= (\beta + 1) TL \quad (7)$$

A partir des équations (4) et (6) on déduit que :

$$SD = (1/2)\alpha . LD = (1/2)\alpha \beta . TL$$

On conclut donc que :

$$SD = \alpha\beta.TL/2 \quad (8)$$

Si on veut calculer le rapport SD / TD , on trouve, en utilisant (7) et (8), qu'il vaut

$$(1/2)\alpha\beta / (\beta + 1).$$

N'oublions pas que α est connu, et que β l'est de ce fait.

Ainsi SD / TD est connu, c'est-à-dire qu'il a une valeur numérique bien précise que les Grecs disaient être compris entre $19/3$ et $43/6$.

Maintenant :

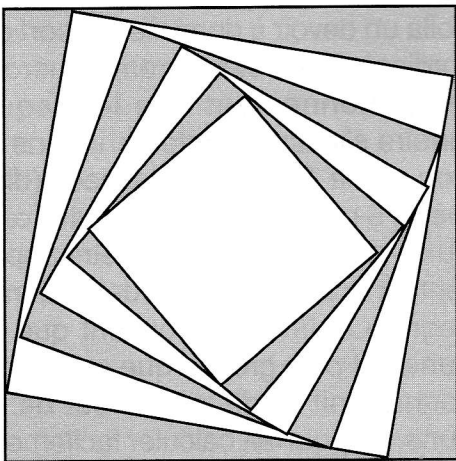
$SD / TD = r_S / r_T$ est connu,

r_S / r_L est connu ainsi, c'est α ,

$r_T / r_L = (r_T / r_S) / (r_L / r_S)$ est donc connu, appelons-le δ .

$$r_L = r_T / \delta.$$

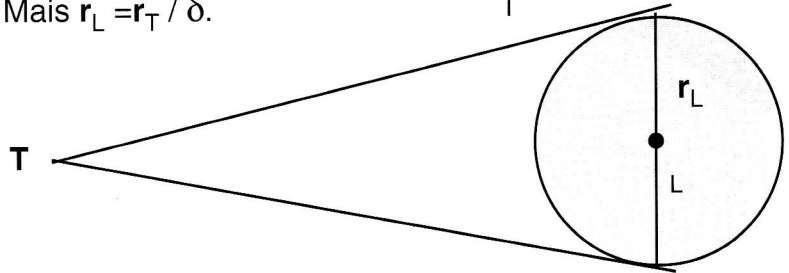
Il s'agit maintenant de voir comment ceci nous permet de calculer la distance Terre-Lune. C'est grâce à la première observation qu'on y arrive.



En effet :

$\tan 1^\circ = r_T / TL$ peut être calculée.

Mais $r_L = r_T / \delta$.



Ainsi $(r_T / \delta) / TL$ est connu

et $TL = r_T / (\text{terme connu} \times d)$

ce qui exprime la distance Terre-Lune en fonction du rayon de la Terre.

Grâce aux résultats d'Eratosthène on connaissait le rayon de la Terre et de ce fait on connaissait maintenant la distance Terre-Lune.

Évidemment, cette méthode repose sur plusieurs approximations ce qui explique que l'on puissent obtenir une réponse différente de celle fournie par nos instruments les plus précis.

Vous aurez remarqué aussi que les connaissances de géométrie utilisées dans ces problèmes sont forts élémentaires : triangles semblables, proportions. Le peu de trigonométrie qui apparaît pourrait être éliminé facilement, en introduisant des considérations sur des triangles rectangles, familiers aux élèves. Est à souligner tout le processus de mathématisation et de construction d'un modèle mathématique qui est sous-jacent à ces deux problèmes.

La distance Terre-Soleil

Jean-Luc Ferrari - Lausanne

Faites-le vous même !

Avec de la carte assez rigide, fabriquez plusieurs disques de diamètres différents compris entre 6 et 60 cm. Dans de la carte de couleur contrastée, percer un trou A, de centre C, diamètre 2 cm.

L'homothétie permet de définir la notion de diamètre apparent.

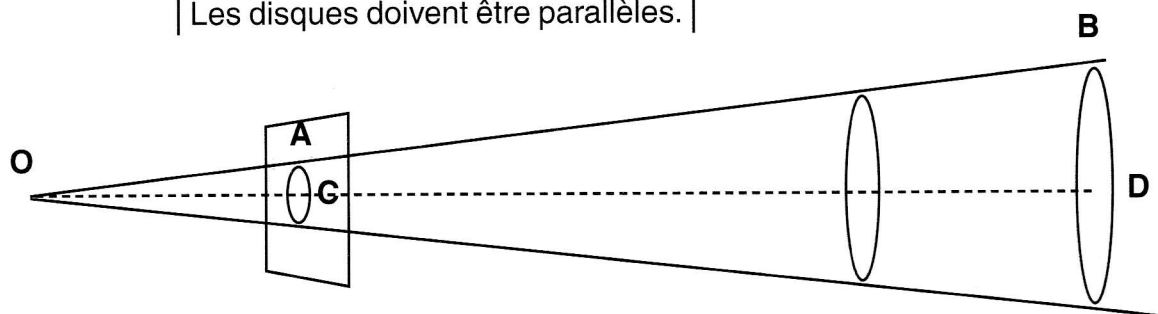
Méthodes

Un élève place son œil à une certaine distance (à mesurer) du trou. Sur son indication, les autres disposent les disques de telle façon que leur diamètre apparent corresponde exactement à celui du trou. Les disques doivent être parallèles.

Par analogie, on peut mesurer le diamètre apparent de différents objets, par exemple la règle du tableau noir.

A quelle distance de l'observateur faudrait-il la placer pour qu'elle apparaisse sous un angle de 1° ? Après plusieurs essais, on constate que lorsqu'on place un objet à une distance égale à 57 fois son diamètre, cet objet apparaîtra sous un angle de 1° .

Il est facile de mesurer le diamètre apparent de la Lune, ce qui permettrait de calculer la distance cherchée si on connaissait son diamètre réel.



18

L'observateur est placé en O. D est le centre du cercle B. On peut établir les relations, en mesures algébriques :

$$\frac{OD}{OC} = \frac{DB}{CA}$$

Les positions relatives possibles étant infinies pour un angle donné, on dira que tous les disques ont le même diamètre apparent, défini par la valeur de l'angle.

Celui-ci peut être calculé facilement:
 $\tan \alpha / 2 = BD / OD$.

Mesurer le diamètre apparent de la Lune !

Voilà un devoir à domicile qui sort de l'ordinaire. Les élèves remarqueront avec étonnement que le disque lunaire s'inscrit exactement dans le trou d'une feuille de classeur (diamètre 5 mm) placé à 57 cm de l'œil. Vu ce qui précède, le diamètre apparent de la Lune est donc de un demi-degré. On imagine souvent que la Lune est plus grosse que ça ! Si on connaissait le diamètre réel de la Lune, on pourrait calculer facilement son éloignement.

La Terre vue de la Lune !

Lalande et Lacaille, deux astronomes français, vont avoir l'idée de renverser le problème : calculer le diamètre apparent qu'aurait la Terre vue de la Lune. Un petit pas pour l'homme, un grand pas pour l'Humanité !!!

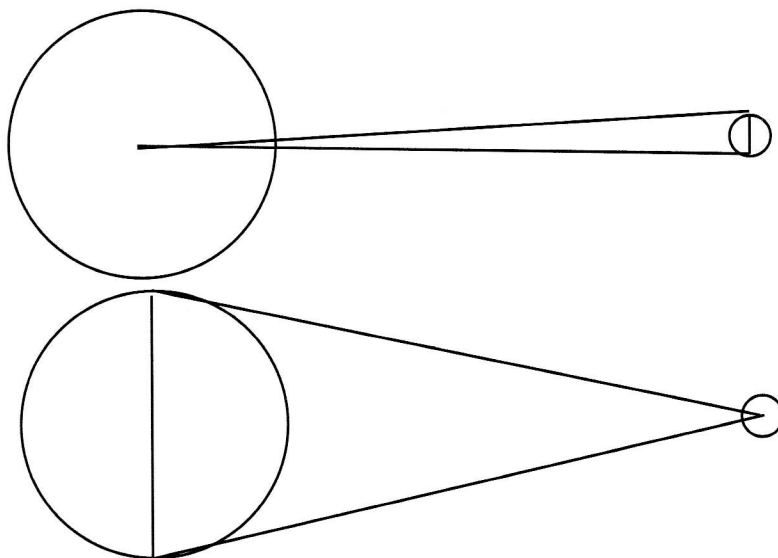
C'est une idée géniale qu'ont eue Lalande et Lacaille en 1751.

A cette époque, si on ne connaît pas le diamètre de la Lune, on connaît depuis peu le diamètre de la Terre d'une façon précise grâce aux travaux d'arpentage effectués par Picard (encore un français) en 1671, mesure utilisée par Newton lui-même pour la vérification de sa loi de la gravitation. Or la distance Terre-Lune mesurée de la Terre est évidemment la même que la distance Lune-Terre mesurée de la Lune !

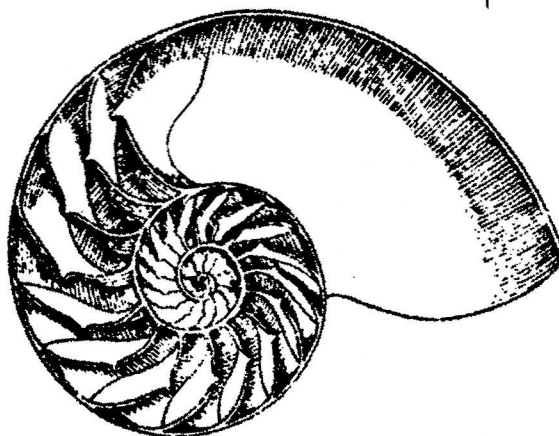
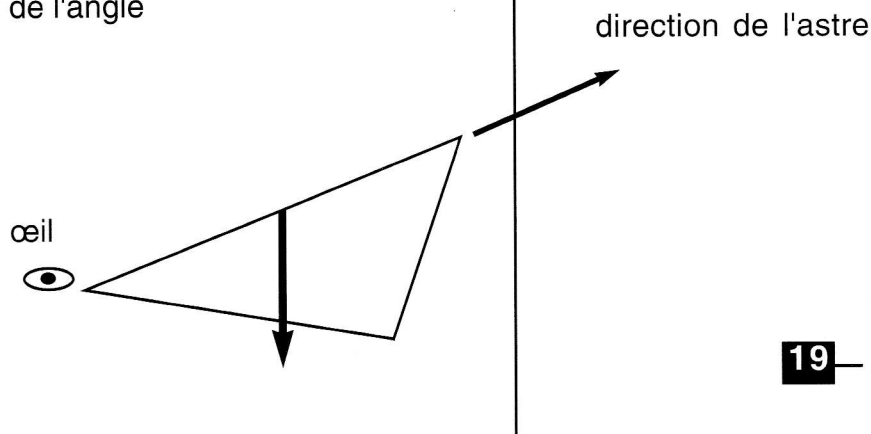
Il suffit donc de se transporter par l'imagination sur la Lune et de mesurer sous quel angle apparaît la Terre. C'est simple mais il fallait y penser!

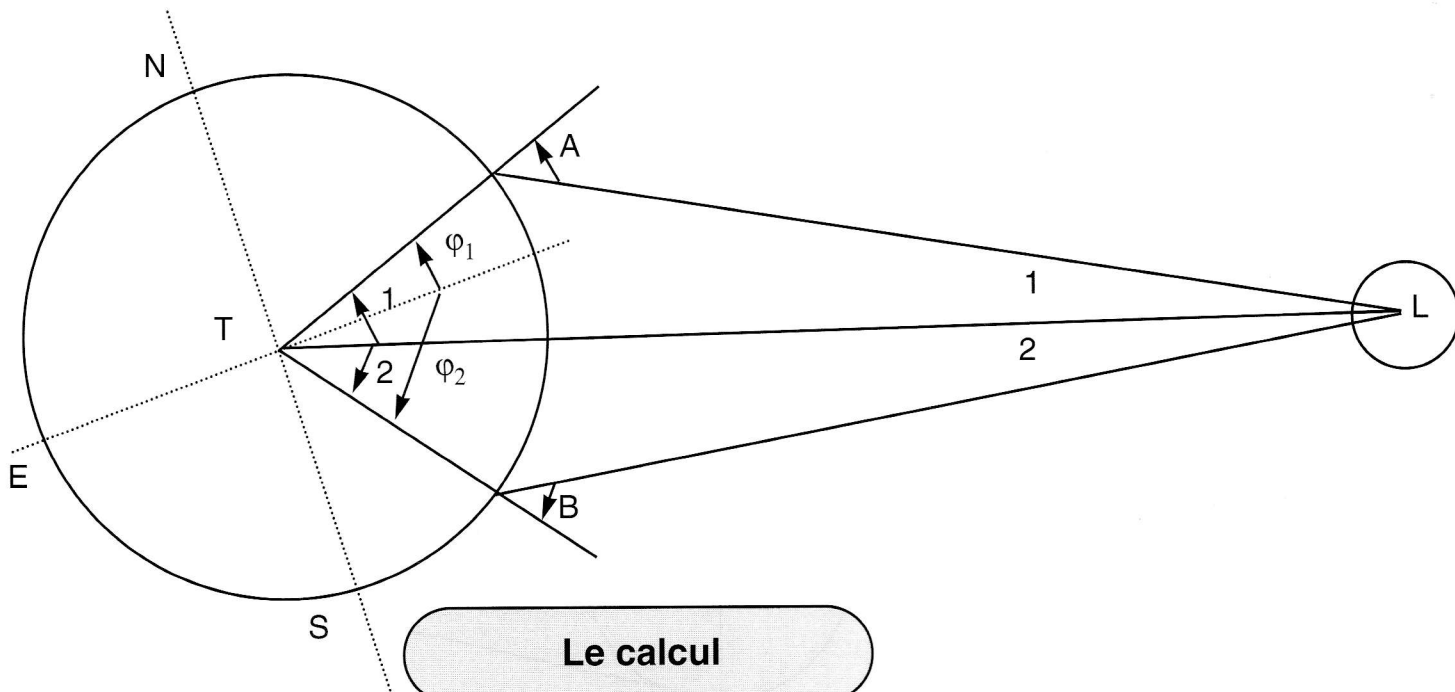
Nos deux astronomes n'auront plus qu'à mesurer deux angles, et le calcul de la distance Terre-Lune sera possible.

Ils se placèrent sur le même méridien, l'un à Berlin et l'autre au Cap. Il s'agissait de mesurer l'angle de la direction de la Lune avec la verticale du lieu lors du passage de l'astre au méridien, donc au même instant, à l'aide d'un quadrant.



On peut fabriquer un quadrant simple à l'aide d'un rapporteur auquel on fixe un fil à plomb, qui offre l'avantage de la lecture directe de l'angle





Le calcul

$$\begin{aligned} L_1 &= A - T_1 \\ L_2 &= B - T_2 \\ L &= L_1 + L_2 \\ L &= A - T_1 + B - T_2 \\ L &= A + B - (T_1 + T_2) \end{aligned}$$

mais on voit que $T_1 + T_2 = \varphi_1 + \varphi_2$,
 φ étant la latitude du lieu.

De la Lune, on verra la Terre sous un angle maximum lorsque A et B seront presque diamétralement opposés. Vu la distance, on admettra par simplification que A et B se trouvent sur le diamètre, donc :

$$L_{\max} = (L \times 180) / (\varphi_1 + \varphi_2).$$

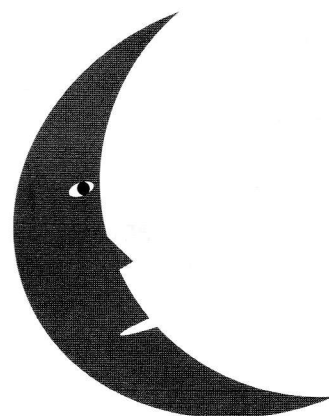
Les deux astronomes ont trouvé à l'époque $1^\circ 54' 6''$, soit presque 2° . Le rayon Terrestre serait donc vu sous un angle d'environ 1° . Or, nous avons observé plus haut qu'un objet est vu sous un angle de 1° lorsqu'il est situé à une distance égale à 57 fois sa mesure.

Si le rayon de la Terre est arrondi à 6.400 km, on a :
 $6.400 \times 57 = 364.800$ km.

On peut apprécier la précision de la mesure de l'époque lorsqu'on sait qu'aujourd'hui, grâce à des réflecteurs laser déposés sur la Lune, on mesure cette distance avec une précision de quelques centimètres.

En raison de l'ellipse orbitale lunaire, celle-ci varie entre 356.500 km et 406.800 km.

Cet article nous vient de nos collègues vaudois et de leur revue Diagonales qui faute de rédacteurs et de lecteurs assidus ne paraît plus.



Appelons (xy) la ligne de terre. Prenons comme plan horizontal le plan équatorial, et comme plan frontal le plan du méridien de Nancy. Alors, le projeté horizontal de l'équateur et

le projeté frontal du méridien de Nancy ont pour support commun, sur l'épure, un même cercle (C) de centre O.

Ce cercle est orienté dans le sens rétrograde, à partir de X' (figure ci-contre).

1- Épures de N et de P :

Ces points sont dans le plan frontal, leurs projetés horizontaux n et p sont donc sur (xy).

De plus, p est en O et $p' \in (C)$, et n'est défini par l'angle $(Ox, On') = 49^\circ$.

2- Épure de M :

a-Projeté frontal du parallèle de M

Soit **a** le point de (C) défini par l'angle de vecteurs $(Ox, Oa) = 22^\circ$. Le projeté frontal du parallèle de M (sur lequel se trouve m') est un segment parallèle à (xy) passant par **a**.

(Remarque: soit j le point où ce segment coupe (OP) ; le rayon du parallèle de M est égal à aj.)

b-Projeté horizontal du méridien de M :

Soit **b** le point de (C) défini par l'angle de vecteurs $(Ox, Ob) = -34^\circ$; le projeté horizontal du méridien de M est le segment [Ob].

c- Projeté horizontal de M :

on a $m \in [Ob]$; d'autre part, m se trouve à une distance de O égale à aj, ce qui détermine ce point.

d- Projeté frontal de M

(où l'on trouve le point m' cherché !) : il suffit maintenant de "relever" m sur [aj]: la perpendiculaire à (xy) passant par M coupe [aj] au point m' cherché.

3- Remarque :

L'angle que l'on cherche à évaluer est l'angle des tangentes au méridien de N et au grand cercle passant par M et N.

Ces deux tangentes étant perpendiculaires à (ON), l'angle cherché se projettera en vraie grandeur sur le plan perpendiculaire en O à (ON). D'où l'idée de prendre ce plan comme nouveau plan horizontal.

4- Changement de plan horizontal:

La nouvelle ligne de terre ($x' y'$) est donc la perpendiculaire en O à (On') (figure suivante).

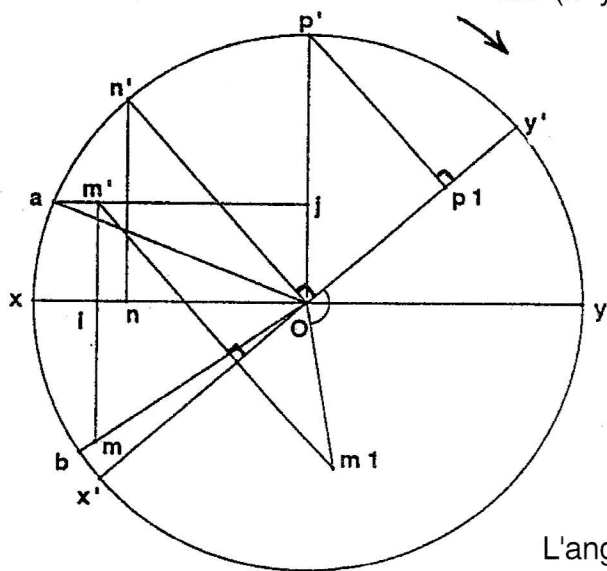
Le plan frontal étant conservé, les projetés frontaux le sont aussi; de plus, les éloignements (distances "algébriques" au plan frontal) sont eux aussi conservés.

a- Projeté horizontal de N : c'est bien sûr O.

b- Projeté horizontal de M : ce point m_1 est situé sur la perpendiculaire en m' à ($x' y'$), à la distance im de ($x' y'$) (i étant le projeté de m sur ($x' y'$)).

D'où la construction de m_1 .

c- Projeté horizontal de P :
De même que ci-dessus, ce point p_1 se trouve sur la perpendiculaire à $(x' y')$ passant par p' , et également sur $(x' y')$ (car l'éloignement de P reste nul). Le point p_1 est donc le projeté de p' sur $(x' y')$.



L'angle cherché est donc l'angle (Op_1, Om_1) , qu'il ne reste plus qu'à évaluer.

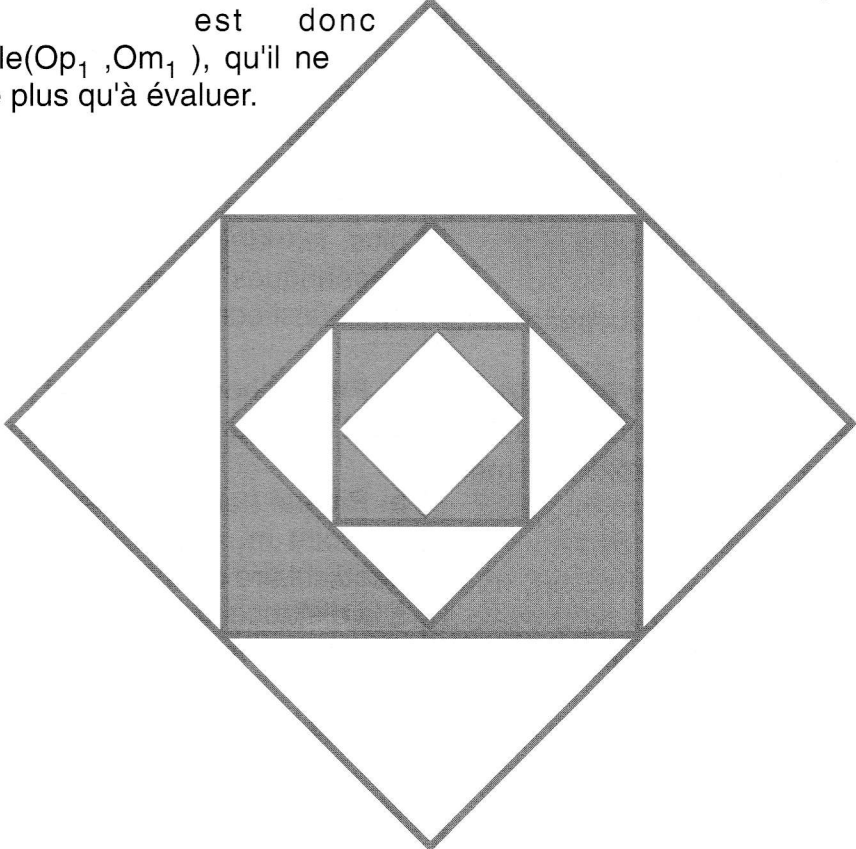
On trouve environ 122° (Cabri-géomètre dixit), ce qui - à la précision du logiciel près - confirme le résultat trouvé dans l'autre solution.

5- Dernière remarque :

L'un de nos lecteurs, Jérôme Cardot, précise que, pour le pèlerin qui se rend à la Mecque en suivant le plus court chemin (c'est à dire un grand cercle de la Terre), l'angle α n'est pas constant ; il se peut qu'il doive partir vers le nord-est puis, lors de son voyage, obliquer vers l'est en enfin vers le sud-est. Les courbes décrites à α constant joignent les pôles ; au voisinage de ces pôles, elles s'enroulent ... en spirale !!!

Dernière question :

Pouvez vous résoudre le même problème pour votre ville ?
Par exemple pour **Dakar** ($17^\circ 26'$ Ouest et $14^\circ 40'$ Nord, à 1° près)?



Des nombres ... astronomiques

Irem de Lyon

à la recherche des nombres infiniment grands et petits pour une classe de seconde

Les temps géologiques

La connaissance des phénomènes géologiques actuels et l'étude des fossiles, c'est-à-dire des vestiges d'animaux ou de végétaux que l'on trouve dans les roches, ont permis aux géologues de reconstituer, en partie, l'histoire de la Terre. On estime que l'âge de la Terre atteint 4,5 milliards d'années.

On considère deux grandes phases:

• **Les temps pré géologiques** de - 4,5 milliards d'années à - 570 millions d'années.

• **Les temps géologiques** de - 570 millions d'années à nos jours, divisés en ères, elles-mêmes subdivisées en périodes comme l'indique le tableau ci-dessous.

- Inscrire, dans la colonne réservée par la durée des périodes

- Après avoir choisi une échelle convenable, représenter sur une bande de papier, l'histoire de la Terre, en utilisant les données du tableau.

Dates en millions d'années	Eres	Périodes	Durée en années	Principaux fossiles	Formation des montagnes
-4500	Age probable de la Terre				
-4000	Précambrien			Mal connus	
-570		Cambrien		Trilobites Flore houillère (dont les fougères)	Chaîne Hernycienne
-510		Ordovicien			
-440		Silurien			
-410		Dévonien			
-360		Carbonifère			
-280		Permien			
-240	Secondaire	Trias		Bélemnites	
-200		Jurassique		Reptiles géants	
-140		Crétacé		Ammonites	
-65	Tertiaire	Eocène		Mammulites	Chaîne Alpine
-37		Oligocène		Mammifères	
-25		Miocène		fleurs	
-5		Pliocène		Plantes à	
-2	Quaternaire	Pleistocène Holocène			

Astronomie et puissance de 10

Les principales unités de distance utilisées en astronomie sont définies dans les exercices qui suivent, à l'exception de l'unité astronomique (UA).

L'unité astronomique est la distance Terre-Soleil (environ $150 \cdot 10^6$ km.)

La lumière parcourt 300.000 km en une seconde.

1- Quelle distance parcourt-elle en un an ? Cette distance s'appelle une année-lumière (AL).

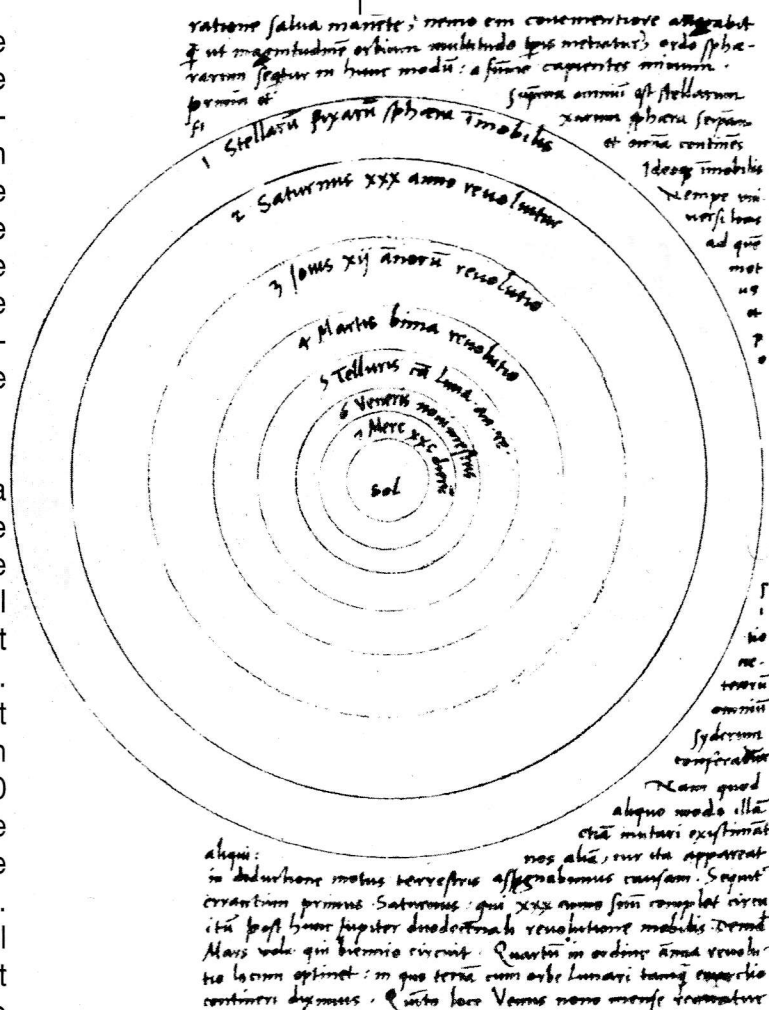
2- La distance de la Terre au Soleil est variable. Elle est d'environ 23 400 fois le rayon de la Terre. Quel temps met la lumière pour aller du Soleil à la Terre ?

3- La distance de la Terre à la Lune est variable. Elle varie entre 55 fois le rayon de la Terre et 66 fois ce rayon.

On prendra comme distance moyenne 60 fois le rayon de la Terre.

Si l'on émettait un signal lumineux sur la Lune, combien de temps ce signal mettrait-il pour arriver sur Terre ?

4- L'étoile la plus rapprochée de la Terre en est située plus de 200 000 fois plus loin que le Soleil. Combien de temps mettrait, pour venir à la Terre, un signal lumineux émis sur cette étoile ?



5- La lumière pour venir de l'étoile **Proxima du Centaure** met 3,66 années. Quelle est la distance de cette étoile à la Terre ?

6- En 1932, on pensait que les

dernières étoiles visibles à l'oeil-nu étaient à 140 années lumière et celles visibles avec les instruments les plus puissants, à l'époque, à 3000 années lumière.

Évaluer ces distances en km.

On pense que l'étoile la plus éloignée de notre Galaxie est à environ 75 000 années lumière. Quelle est sa distance en km. ?

Combien de fois est-elle plus éloignée de la Terre que le Soleil ?

Son et lumière

Le son, dans des conditions habituelles, se propage dans l'air à une vitesse de 333 m/s.

Si on néglige la vitesse de la propagation de la lumière (pourquoi ?), à quelle distance du point de chute de la foudre se trouve l'observateur qui a noté un temps de 15s entre la lueur de l'éclair et le bruit du tonnerre ?

Les atomes

Un Angström est la dix millionième partie du mètre.

(1 Å = 10^{-10} m)

Le corps humain contient environ 5 litres de sang.

Dans 1 mm³ on trouve 10µm.

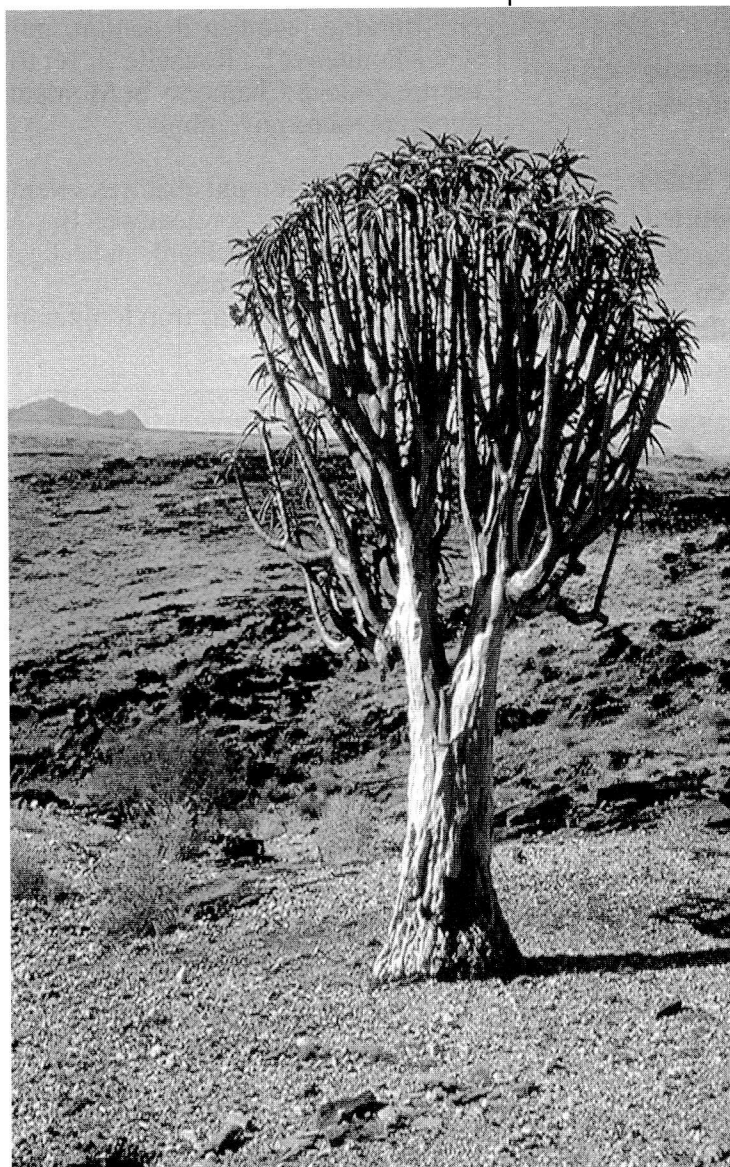
Calculer la longueur de la chaîne obtenue avec tous les globules rouges d'un corps humain juxtaposés.

Un atome d'hydrogène a un diamètre d'environ 1 Å. Combien faudrait-il en ranger côte à côte

pour obtenir une chaîne de même longueur qu'à la question précédente?

Le noyau de l'atome d'hydrogène a un diamètre d'environ 4.10^{-5} Å.

Si on représente sur un dessin le noyau par un cercle de 2 cm de diamètre, quel doit être le diamètre du cercle représentant l'atome ?



L'année Maths 2000 !

Les expositions de Centre•Sciences

Nous décrivons ci-dessous les expositions mathématiques qui sont disponibles à Centre•Sciences.
Vous en verrez quelques images en 3ème de couverture.

Sans oublier pour les mathématiciens astronomes :

Le ciel de Babylone

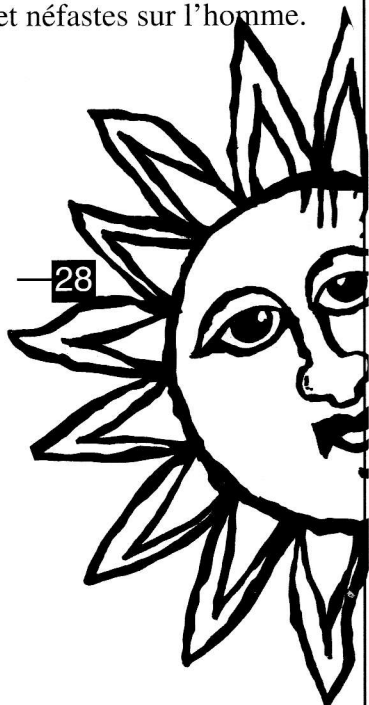
une exposition de 150m² sur les origines arabes de l'astronomie, du calcul en base soixante et de la mesure du temps.

Présentée à Grenoble, Nançay, Observatoire de Paris et Bagdad.

Et la toute dernière exposition de Centre•Sciences :

Le Soleil, notre bonne étoile !

Qui fait le tour de notre étoile et présente en 20 manipulations ses effets bénéfiques et néfastes sur l'homme.



Deux types d'expositions sont disponibles :

- les expositions de 200m² **avec** mobiliers, **avec** montage et démontage par une personne de Centre•Sciences.

Maths 2000 est une exposition réalisée dans le même esprit que Horizons mathématiques et qui présente une cinquantaine de manipulations. Elle est disponible en français et peut-être facilement traduite.

Elle est actuellement présentée en Touraine jusqu'en décembre puis sera à Poitiers et La Rochelle au 1er trimestre 2000, à Chambéry et Montpellier en octobre-novembre.

Parallèlement d'autres exemplaires devraient être présentés en Basse-Normandie, à Montbéliard, au Sénégal, au Portugal et en Grèce.

N'attendez pas trop longtemps pour la réserver !

L'esprit inform@tique :
numériquement vôtre !

Où l'on parle autant de l'homme que des ordinateurs et plus de logique que de logiciel.

L'Esprit informatique vient d'être actualisée. Elle permet aux visiteurs de parcourir les concepts informatiques de façon ludique à travers une cinquantaine de manipulations.

Vous irez du calcul en binaire aux problèmes posés par Internet : les réseaux, la compression d'images, en passant par la logique, les algorithmes, les automates et les robots ...

Déjà présentée à Paris (Unedic), Prague, Bourges et Athènes.

- les expositions de 80m² **sans** mobiliers, avec montage et démontage par vos soins :

Jeux africains

A partir de l'Afrique, comment le jeu participe à l'éducation et à la socialisation de tous, comment il traverse les cultures et les pays, adaptant ses règles aux traditions locales.

Ordre et chaos dans la nature

Voyagez entre ordre et chaos dans le domaine du désordre prévisible, représenté par des images fractales ou chaotiques.

Jeux logiques et mathématiques

Pour faire des mathématiques sans se prendre au sérieux, tester sa logique tout en s'amusant.

Pythagore, tout est nombre

Des nombres figurés aux calculs d'aires, du théorème de Pythagore au dernier théorème de Fermat, le tout est nombre. 2 versions : CM et collèges-lycées.

De l'œil au cerveau

De l'objet perçu par l'œil à l'objet interprété par le cerveau, un parcours ludique de la perspective linéaire aux anamorphoses, de l'image "plate" aux images en relief.

Nouveautés

Jeux et stratégies

Jeux d'argent, jeux de hasard, économie, bourse, conflits sociaux ou armés... tout un ensemble de situations qui peuvent être analysées à l'aide de la théorie des jeux.

Les hasards de la vie

Faites la chasse au hasard et repérez les lieux où il se cache et ceux où il n'est pas.

Toutes ces expositions peuvent être traduites en langues étrangères.

L'an 2000 et les calendriers

René Ligier - Besançon

Un calendrier est un système élaboré par les hommes pour compter les jours de leur existence ; dans le choix des unités, l'homme n'est pas libre : le ciel les lui impose.

Toutes les civilisations ont utilisé les rythmes des astres, la Lune et le Soleil bien sûr, mais aussi la planète Vénus chez les Aztèques.

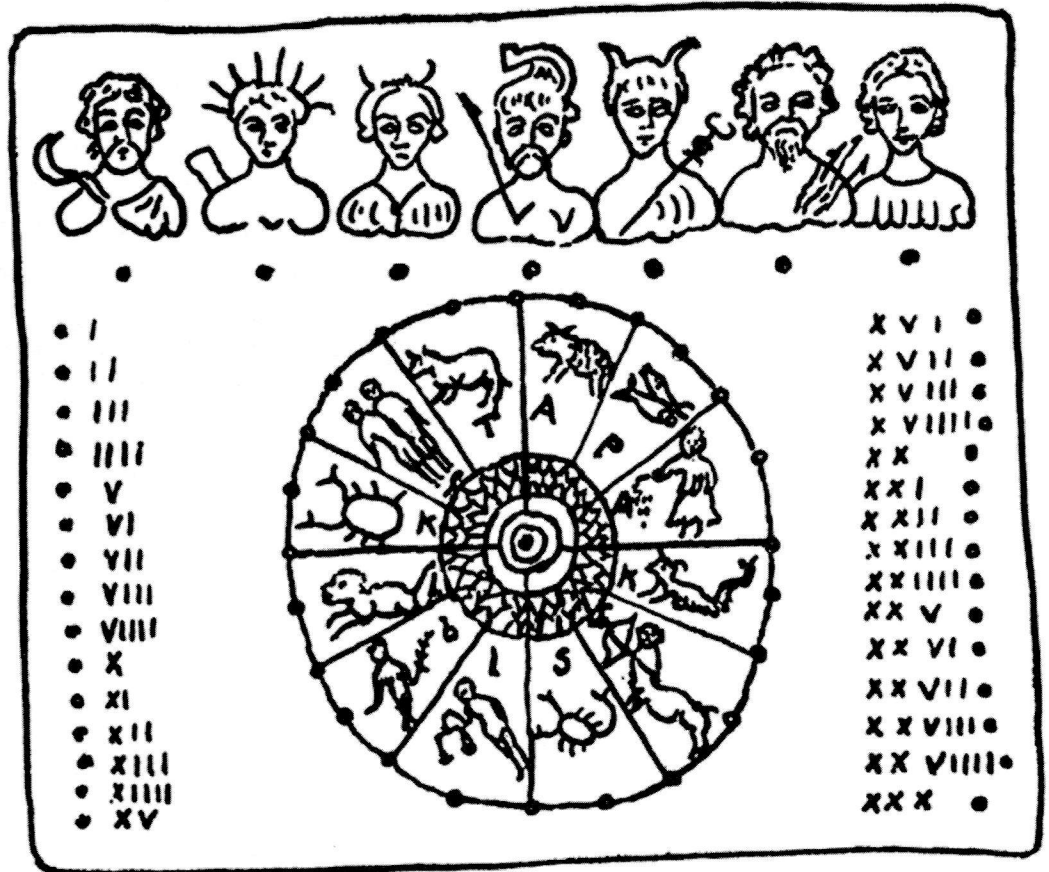
Nos ancêtres considéraient que les astres avaient été créés à cette unique fin, ainsi "L'éternel a fait la Lune pour marquer les temps, ainsi que le Soleil, qui connaît l'heure de son déclin" (la Bible). Ne furent laissés au libre choix des hommes que les façons d'associer entre eux ces éléments, hélas discordants, imposés par le ciel. Suivant les régions du globe (contraintes des saisons plus ou moins marquées) ou pour obéir à des impératifs religieux, les hommes ont choisi pour ponctuer le temps, la Lune pour seule maîtresse, ou le Soleil, ou encore se sont évertués à concilier les rythmes des deux astres. Il en résulte les trois types de calendriers

- les calendriers lunaires,
- les calendriers soli-lunaires,
- les calendriers solaires.

Les calendriers lunaires

La Lune, avec la série de

transformations frappantes qu'elle subit en une trentaine de jours, fut un compteur de jours idéal pour l'humanité ;



elle imprègne encore totalement notre calendrier, qui pourtant n'a plus rien de lunaire.

Par la durée du mois (environ 30 jours, durée du cycle de la Lune) par la durée de la semaine (à relier sans aucun doute à la longueur de chacune des phases de la Lune).

L'homme préhistorique dut compter le temps exclusivement par lunes (voir les Indiens d'Amérique) ; dans les zones tropicales où les saisons sont peu mar-

quées, le rythme de l'année n'a rien d'impératif pour fixer le calendrier.

Dans un calendrier lunaire, le mois commence (en général) à chaque nouvelle lune et dure 29 ou 30 jours, alternativement puisque la lunaison est en première approximation de : 29,5 jours.

Dans les premiers calendriers lunaires, rien n'est fixé à l'avance, c'est l'apparition du

premier fin croissant au couchant qui annonce le début du mois nouveau. Mais le besoin de régler définitivement la durée des mois a très vite émergé et les diverses civilisations qui ont adopté le calendrier lunaire ont tôt ou tard fixé la durée de chaque mois arbitrairement, ce qui peut provoquer parfois un décalage d'un ou deux jours avec le rythme réel de la Lune.

Exemple : le calendrier musulman

L'ère mahométane, ou hégire, correspond au vendredi 16 juillet 622, date où Mahomet quitte La Mecque. La Lune est le symbole du Coran. Les mois suivent son rythme, ils débutent à la nouvelle lune. Ils ont alternativement 29 et 30 jours. Les années, de douze

mois, ont donc 354 jours, ou parfois 355.

En fait la lunaison est : $L \sim 29,53$ jours. Par rapport à la moyenne de 29,5 jours, l'écart est donc de 11 jours en 30 années (360 lunaisons) :

360 lunaisons : $360 \times 29,53 \approx 10.631$ J
360 mois "moyens" $360 \times 29,5 = 10620$ J

Sans corriger cet écart, la Lune prendrait du retard sur le rythme des mois (en 40 ans, le mois commencerait à la pleine Lune).

On rajoute donc 11 jours en 30 ans, à raison d'un jour rajouté au dernier mois des onze années dites "abondantes" qui ont alors $12 \times 29,5 + 1 = 355$ jours.

Ces années sont situées aux rangs numéros : 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26 et 29 du cycle de 30 ans.

Le décalage de 11 jours sur notre calendrier entraîne que le jour de l'an musulman "remonte" chaque année notre calendrier. De la même manière, le 9ème mois du calendrier, appelé "Ramadan", débute chaque année 11 jours plus tôt dans notre calendrier, d'où les diffi-

cultés dans des régions du globe où les saisons sont très marquées (jeûner en hiver, ...).

Il en résulte que le Musulman qui vous affirmera avoir 34 ans n'aura en fait connu que 33 printemps. Certaines difficultés administratives (décompte de la retraite par exemple) peuvent en résulter.

Pour conclure :

Les calendriers lunaires ne suivent donc pas le rythme des saisons ; nous leur devons d'avoir permis un progrès important dans l'explication du phénomène des éclipses, puisque dans un tel calendrier, l'éclipse de Lune arrive

toujours en milieu de mois, l'éclipse de Soleil en début de mois. C'est jusqu'au caractère matériel de la Lune qui a pu ainsi être mis en évidence.

Calendriers soli-lunaires

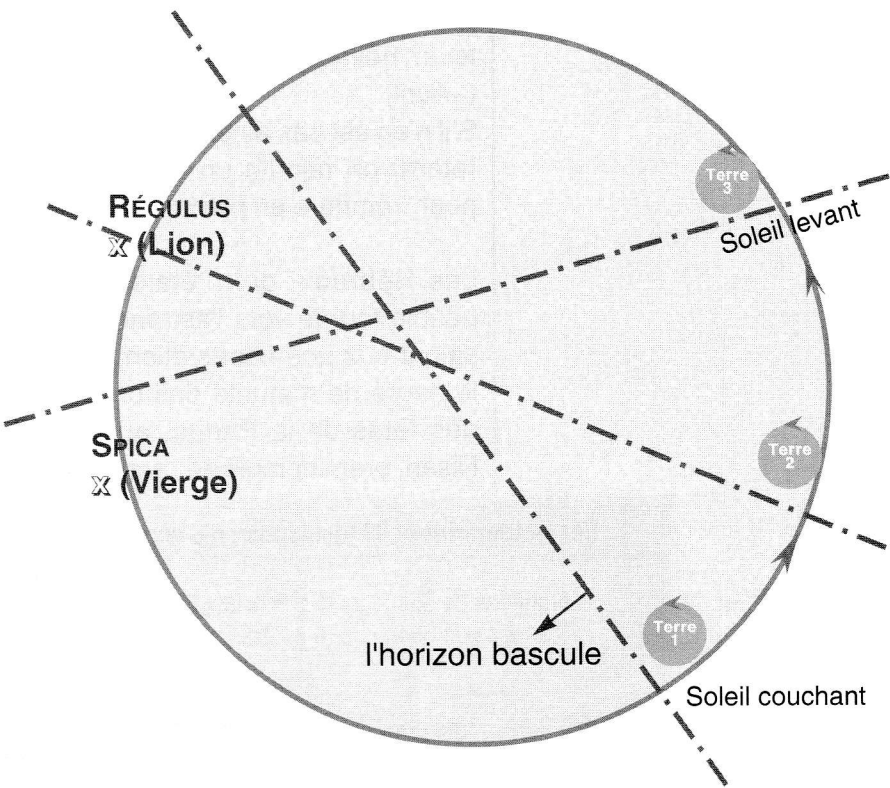
Ces calendriers sont fondés sur la Lune mais s'efforcent, tant bien que mal, de suivre aussi les saisons et l'année. Il s'agit donc d'avoir un début d'année qui soit toujours dans la même saison.

Cet impératif était essentiellement agricole. Les mois ont donc alternativement 29 ou 30 jours, mais le déficit de 11 jours dont on a parlé plus haut impose d'ajouter à l'année un treizième mois tous les trois ans (environ). Ce rajout est fondé sur une observation astronomique (chez les Chaldéens) ou agricole (chez les Hébreux), ou encore est déterminé par des règles reconnues (chez les Grecs).

**Exemple 1
Les calendriers chaldéen et hébreux**

Les Peuples de Mésopotamie ont développé semble-t-il les premiers, une étude des astres digne du nom d'Astronomie. Pour reconnaître que le moment était venu de rajouter un treizième mois à l'année, ils utilisaient la technique du "Lever héliaque".

Ayant remarqué que chaque étoile a son lever héliaque dans une saison fixe, les Chaldéens décident d'attacher chaque mois au lever



Lever héliaque d'une étoile

Dans la position 1, le Lion suit le Soleil dans le mouvement diurne (rotation de la Terre sur elle-même) : lorsque le Soleil est déjà couché (sous l'horizon), le Lion est dans notre ciel, peu après le couchant, vers l'ouest. De minutes en minutes, l'horizon "bascule" et le Lion va à son tour se coucher, environ une heure après le Soleil.

Au fil des Jours, le Lion se "rapproche" du Soleil dans notre visée, pour finalement être aligné avec lui (**en position 2**) : on dit que le Soleil est "dans le Lion", d'où l'origine des signes astrologiques. Ce phénomène au mois d'août, au temps des Chaldéens, en septembre à présent, par suite de la précession des équinoxes.

Enfin, **dans la position 3**, cette fois-ci, le Lion précède le Soleil : il apparaît dans notre ciel le matin, juste avant le lever du Soleil : la première "réapparition" d'une étoile s'appelle son lever héliaque.

héliaque d'une étoile facilement repérable.

Ainsi Dilgan (le Bélier) doit effectuer son lever héliaque au mois de Nisannu (~Avril) :

S'il n'en est pas ainsi (il a alors pris du retard) on rajoute un treizième mois pour "remettre en place" le calendrier.

Les Hébreux, qui n'étaient pas un peuple tourné vers l'astronomie, utilisaient eux une observation agricole : le degré de maturité des orges. Lors des fêtes de la Pâque, au mois de Nisan, premier mois de l'année (défor-

(Les Grands Prêtres). Il n'était pas rare, par suite d'oublis, d'avoir deux années consécutives de 13 mois.

Exemple 2 : Le calendrier grec

Longtemps le calendrier grec fut uniquement lunaire - un oracle, dit-on, avait prescrit, de régler les solennités sur les phases ; mais plus tard, un autre oracle invita à célébrer aux mêmes dates des mêmes mois les cérémonies agricoles, autrement dit d'harmoniser le calendrier lunaire avec le rythme des saisons..

Les octaétérides : 99 lunaisons en 8 ans	LE CYCLE DE METON : 235 lunaisons en 19 ans	
5 années de 354 jours (6 x 30 + 6 x 29) 3 années de 384 jours (6 x 29 + 7 x 30) soit 2.922 jours pour 8 ans et 99 lunaisons. On obtient comme valeurs moyennes Année : A = 365.25, ce qui est excellent Lunaison : 1 = 29,51 au lieu de 29,53 L'écart est, en 8 ans, de 1 jour 1/2, donc en 80 ans, de 15 jours.	5 années de 355 j (7 x 30 + 5 x 29) 7 années de 354 j (6 x 30 + 6 x 29) 6 années de 384 j (7 x 30 + 6 x 29) 1 année de 383 j (6 x 30 + 7 x 29) on obtient A = 365,26 ce qui est moins bon L = 29,53 ce qui est excellent : le calendrier suit parfaitement les phases de la Lune, un peu moins bien les saisons (une demi-heure d'écart chaque année !). NOTE : le rang d'une année dans le cycle de 19 ans est appelé son NOMBRE d'OR. On le trouve encore sur les calendriers postaux.	soit 6.940 jours pour 19 ans et 235 lunaisons
LE CYCLE DE CALLIPPE sur 76 ans (335 avant JC)	LE CYCLE DE HIPPARQUE sur 304 ans (130 avant JC)	
Il supprime un jour en 76 ans. On obtient A = 365,25 L = 29,5308, au lieu de 29,5305 !	Il retranche, par rapport au cycle de Callippe, un jour en 304 ans. On obtient A = 365,2467. Hipparque est le premier à avoir reconnu que 365,25 était trop fort. C'était il y a 2000 ans. Notre calendrier en tient compte. Comment ? (voir calendrier grégorien). L ≈ 29,53059 !	

mation du Nisannu Chaldéen), on offrait deux pains de froment nouveau. Si à la fin de l'année, l'orge semblait ne pas devoir être en épis pour la Pâque, on redoublait le douzième mois.

On le voit, le rajout du 13ème mois était arbitraire ; rien à l'avance ne permettait de savoir si l'on trouvait dans une année de 12 ou 13 mois. La décision était prise par décret du Souverain (Babylone) ou des autorités religieuses

Aux douze mois (354 jours) s'ajoute d'abord un treizième tous les deux ans (6ème siècle) : mais l'année moyenne devint trop longue ; un siècle plus tard, l'intercalation se fait tous les trois ans: l'année moyenne devint trop courte.

En effet, dans, le premier cas (354 + 384)/2 = 369, dans le second cas : (354 + 354 + 384)/3 = 354.
On eut ensuite recours à une période de huit années, dites "octaétérides" au

cours de laquelle s'intercalaient trois mois intermédiaires : cette période de 8 ans, connue semble-t-il dès le 8ème siècle, semble n'avoir été mise en application qu'à la fin du 5ème siècle. Mais le cycle des "octaétérides" est lui-même imparfait, la Lune prend du retard (voir encadré), deux semaines en dix "octaétérides" (80 ans) : les fêtes ne sont alors plus en accord avec les phases auxquelles elles sont rattachées. Cette erreur fut corrigée, la découverte même de l'erreur permettant dans un pareil cas de rectifier immédiatement le tir. Une période de dix-neuf ans, connue sous le nom de "cycle de Méton", fut proposée.

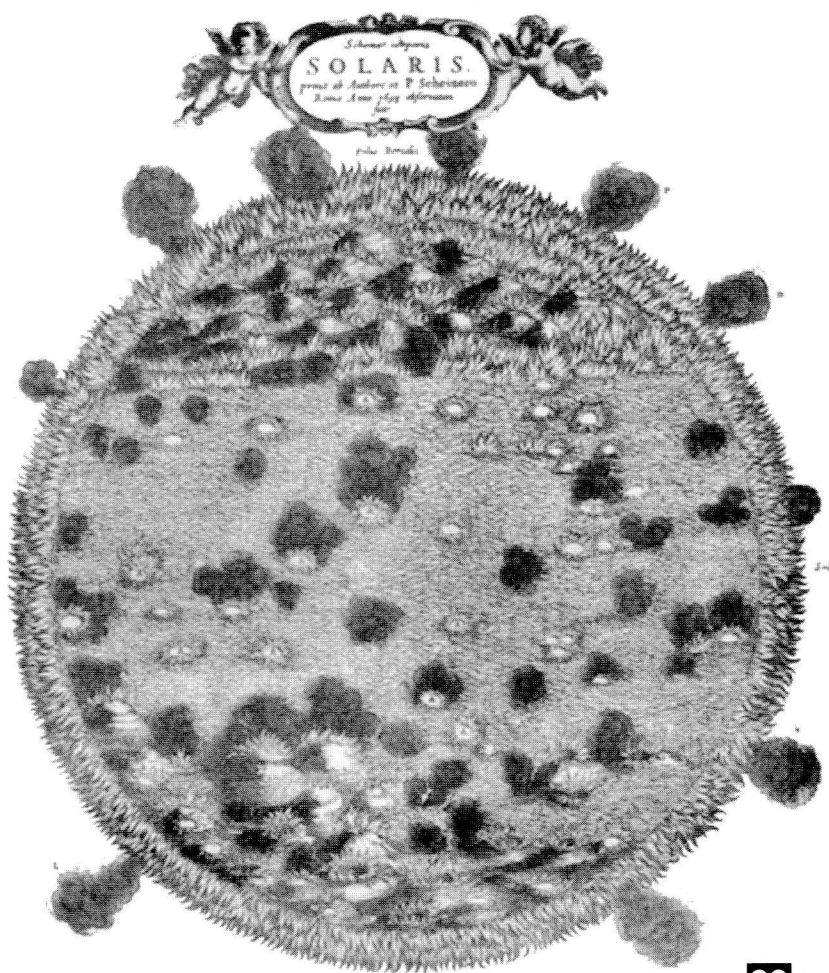
Selon la légende, Méton reconnut que dix-neuf années contenaient exactement 235 lunaisons : après dix-neuf ans, les phases reviennent donc aux mêmes dates des mêmes mois (on peut le constater sur nos calendriers !). Découvert en 433, le système ne fut introduit qu'en 330.

Le cycle de Méton fut lui-même amélioré par Callippe, puis par Hipparque. Les calculs indiqués ci-dessous montrent à quelle précision en était arrivé l'astronomie grecque, par un travail méthodique, les défauts d'un calendrier sécrétant par eux-mêmes son amélioration.

Les calendriers solaires

Un calendrier solaire est un calendrier qui tient uniquement compte du rythme des saisons. Ainsi, dans un tel calendrier, l'équinoxe de printemps doit toujours être situé à la même date, du moins pour le même hémisphère (21 mars en général pour ce qui nous concerne).

Les difficultés évoquées au paragraphe précédent expliquent aisément le désir des peuples de se débarrasser du cycle de la Lune, dans la mesure où aucune contrainte religieuse en général, ne s'y opposait.



Fac-similé d'une gravure de l'année 1425 représentant le Soleil

L'année est encore découpée en mois : on a le plus souvent douze mois de trente jours (environ), vestiges des anciens calendriers lunaires ; on a parfois d'autres associations, ainsi les dix-huit mois de vingt jours des Aztèques.

Le plus ancien calendrier solaire a été le calendrier égyptien (on connaît l'importance du Dieu Râ dans la mythologie égyptienne) ; nous étudierons ensuite plus particulièrement notre calendrier.

Exemple 1 : le calendrier égyptien

Très anciennement le calendrier comportait 12 mois de 30 jours (groupés en 3 décades de 10 jours) ; le peuple égyptien s'est donc affranchi très tôt du cycle de la Lune.

Dès la fin du 5ème millénaire apparaît un "calendrier vague" de 365 jours (les 5 jours ajoutés sont appelés "épagomènes") : dans ce pays où les saisons ne se laissaient pas ignorer, ce peuple agricole remarqua que la crue bien-faisante du Nil coïncidait avec le lever héliaque de l'étoile Sothis (Sirius). Les prêtres d'Héliopolis fixèrent donc le début du nouveau calendrier (1er Thoth) au jour du lever héliaque de Sirius (en 4.230 av J.-C.) : l'état du ciel au temps du lever héliaque de Sothis passait pour l'état originel de l'Univers. Mais le décalage sur l'année des saisons (un jour tous les quatre ans) ne tarda pas à se faire sentir : le lever héliaque de Sirius prit du retard, dériva au 2 Thoth (4 ans plus tard), puis au 3 Thoth, etc.

Les Egyptiens furent ainsi sans doute le premier peuple à découvrir, par le spectacle de leur calendrier civil désaccordé, la valeur $A = 365,25$.

Mais ils n'aménagèrent pas pour autant le calendrier en conséquence.

Au bout de 1461 années vagues ($1461 \times 365 = 1460 \times 365,25$), tout rentra dans l'ordre : on célébra ce retour par des fêtes extraordinaires ; le cycle écoulé fut appelé "période sothiaque". Puis la dérive du lever héliaque de Sirius recommença ; à côté du calendrier civil déréglé, les agriculteurs devaient continuer à suivre un calendrier agricole, réglé sur les étoiles.

Par respect des traditions, 1^{er}es Egyptiens s'accommodèrent pendant plus de 4.000 ans des anachronismes de leur calendrier.

Deux siècles avant J.-C., le roi Ptolémée III, Evrogète, décréta l'emploi d'un sixième jour épagomène tous les quatre ans, mais le peuple refusa de l'appliquer. L'Empereur Auguste se heurta plus tard aux mêmes résistances : le calendrier civil égyptien ne se stabilisa qu'aux premiers siècles de notre calendrier, à quelques détails près.

Exemple 2 : notre calendrier**Le calendrier romain**

il fut d'abord lunaire et comportait 10 trois mois de 29 ou 30 jours : Mars, (Dieu de la guerre), Avril, (aprilio : ouvrir ; les bourgeons s'ouvrent), Mai, (Maia, déesse de la croissance, Juin (Junon, épouse de Jupiter), puis quintilis ("le 5ème"), sextilis (6ème), september (7ème), october (8ème), november (9ème) et december (10ème).

Un calendrier de 10 mois (295 jours.) ne pouvait durer longtemps : ainsi le jour de l'an était chaque année dans une saison différente ; en 700 av. J.-C., on rajouta Januarius (Janus, dieu à double tête, l'une tournée vers 1^{er} passé, l'autre vers l'avenir) et février, mois de purification ; on donna 31 ou 29 jours aux mois, car "l'Impair plaît aux Dieux", sauf à février, dernier mois de l'année dédié aux dieux infernaux (28 jours). L'année comportait 355 jours, on rajoutait tous les deux ans un mois de 22 jours, Mercedonius ; en bref, on avait un calendrier qui avait tous les inconvénients du calendrier lunaire, mais qui, comble de l'ironie, ne suivait plus les phases de la Lune ! Les Pontifes, à qui fût confié le pouvoir de fixer la durée de Mercedonius, abu-

sèrent de leur pouvoir, allongeant ou raccourcissant l'année pour favoriser leurs amis. La pagaille était à son comble, on en arriva à célébrer la moisson en plein hiver. C'est alors qu'intervint Jules César.

Le calendrier Julien
(45 avant J.-C.)

César fit venir l'astronome grec Sosigène, installé à Alexandrie. Celui-ci, fort de l'expérience égyptienne proposa une année de 365 jours, avec rajout d'un jour tous les quatre ans ; le jour supplémentaire fut attribué au mois de février, mois néfaste à 28 jours pour ne pas choquer les superstitions, le mois conserva en apparence 28 jours: on doubla le 24ème jour qui porta le nom de "sex-tus ante calenda martias" (sixième jour avant les calendes de mars, c'est-à-dire avant le 1er Mars).

Le jour supplémentaire fut donc le "bis-sextus" d'où notre terme de "bis-sextile".
L'année qui précéda la réforme dura 445 jours et fut appelée année de confusion.

Il fut décidé que l'équinoxe de printemps coïnciderait avec le 25 Mars. Par ailleurs, César fixa le début de l'année au le 1er janvier, date où les consuls entraient en charge.

Hélas, quatre siècles plus tard, en 325, l'équinoxe de printemps tomba

le 21 Mars ; lors du concile de Nicée, cette année-là, les pères de l'Église attribuèrent l'erreur de 4 jours à Sosi-

En fait, l'année julienne vaut $A_j = 365,25$.
L'année des saisons ou année tropique :
 $A_t = 365,2422$.
L'écart est de 0,0078 jour par an , soit 3,12 jours tous les 400 ans.
L'équinoxe de printemps aux dates clés de l'histoire du calendrier grégorien fut donc aux dates indiquées ci-dessous :

45 avant J.-C. SOSIGENE	25 mars	23 mars	
325 CONCILE DE NICEE	21 mars	20 mars	*
1582 Réforme Grégorienne	11 mars	11 mars	**
	Dates annoncées dans le calendrier julien	Date réelle	

* 3 jours en 400 ans ; ** 9 jours en 1200 ans
L'année grégorienne vaut, elle :
 $365 - 1/4 + 3/400$ soit $A_g = 365,2425$.
L'écart est donc de 0,0003 jour par an
soit 3 jours en 10 000 ans.

gène (lorsqu'il avait déterminé l'équinoxe de printemps) et ne remirent pas en cause le chiffre 365,25 ; ils lièrent alors la date de Pâques au 21 Mars (Pâques étant le premier dimanche qui suit la pleine lune qui suit le 21 Mars).

Mais au fil des siècles, l'équinoxe de printemps continua à dériver; à suivre les prescriptions du concile, Pâques fête printanière, finirait (à très long terme, certes !) par se célébrer au cœur de l'été.

On s'en émut très régulièrement dans les siècles qui suivirent, mais la réforme attendue n'advint que douze siècles plus tard : en 1582, l'équinoxe de printemps eut lieu le 11 Mars, conformément aux calculs donnés dans l'annexe.

Du jeudi 4 au vendredi ... 15 octobre

c) Calendrier grégorien

(1582, Grégoire XIII)

Pour ramener l'équinoxe de printemps au 21 mars, le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 fut le vendredi 15 octobre. Par ailleurs, pour fixer définitivement l'année tropique Grégoire XIII décida de supprimer 3 jours en 400 ans, à savoir que les années séculaires (dont le millésime se termine par deux zéros) cessent d'être bissextiles, sauf celles dont le nombre de siècles est divisible par 4 :

ainsi 1600 et 2000 demeurent bissextiles, mais 1700, 1800, 1900 et 2100 ne le sont plus.

Un tel calendrier est encore imparfait (voir encadré) mais l'erreur est inférieure à d'autres erreurs d'ordre astronomique : ralentissement de la rotation de la Terre par effet des marées (frottements), raccourcissement de l'année des saisons.

**Aujourd'hui 1er février,
et demain 15 février**

La réforme papale fut adoptée presque universellement (les musulmans et les israélites ne s'y sont pas encore ralliés), mais le feront à plus ou moins longue échéance. Les états protestants attendirent plus d'un siècle ; les régions orthodoxes ne l'adoptèrent qu'au début du XX^{ème} siècle. La Russie l'appliqua en 1918.

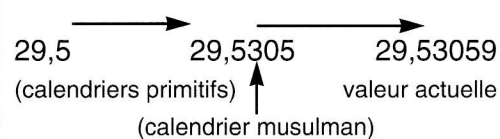
Il y avait alors 13 jours de décalage à supprimer : le lendemain du 1er février fut le 15.

Pour conclure :

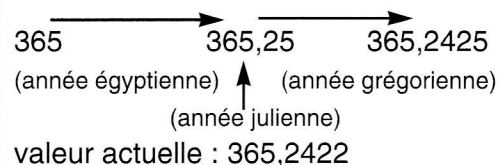
Plus qu'un simple moyen de "compter" les jours, le calendrier a été

tout au long de l'histoire des civilisations un outil efficace pour l'astronomie, en améliorant considérablement les connaissances sur les cycles des astres :

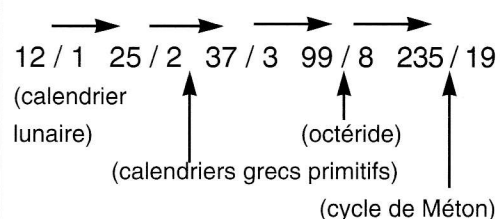
- **Les calendriers lunaires** ont fourni une approximation excellente de la lunaison :



- **Les calendriers solaires** ont donné successivement, pour l'année tropique (année des saisons) :



- **Les calendriers luni-solaires**, en accordant les cycles du Soleil et de la Lune, ont donné par des fractions simples mais à chaque fois plus précises le rapport du nombre de lunaisons au nombre d'années solaires :



Chose remarquable, ces différentes fonctions sont les cinq premières "réduites" de la fraction $(365,25) / (29,53)$ par la méthode des fractions continues.

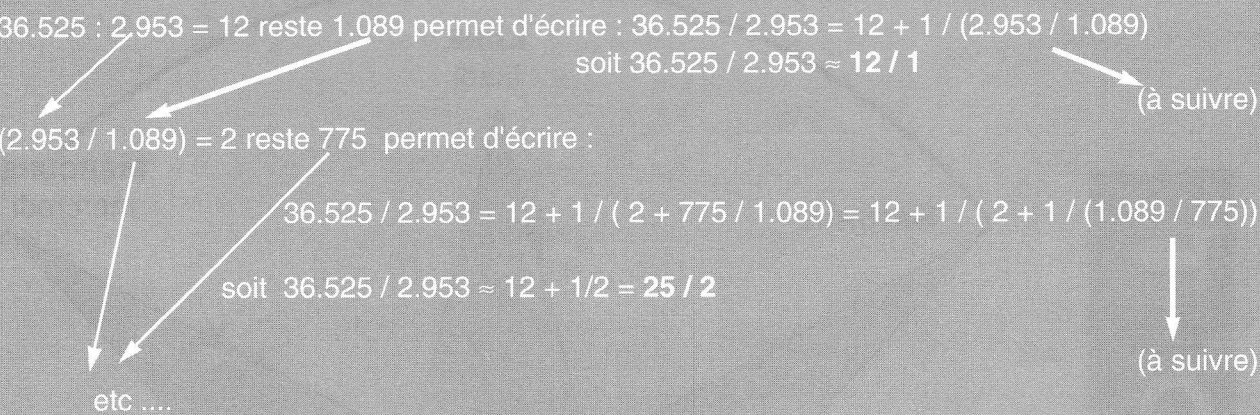
Nous avons là un exemple remarquable d'une réponse empirique sur plusieurs siècles à un problème pour lequel les mathématiques ont apporté plus tard un outil efficace.

mois, mais au bout d'un certain temps, tout rentre dans l'ordre : il faut 29,5 / 1,5 soit environ 19 cycles de 8 ans (152 ans) pour revenir au point de départ. Ceci n'est pas sans rappeler la période sothiaque de 1.461 ans qui a

LES FRACTIONS CONTINUES

Problème : on veut que K années contiennent exactement N lunaisons, soit
 $K \times 365,25 = N \times 29,53$

Soit $N / K = 365,25 / 29,53 = 36.525 / 2.953$
On recherche une fraction simple (dénominateur inférieur approchant cette fraction).



Nous obtenons, en poursuivant le même algorithme :

1.089 / 775 = 1 reste 314 soit $N / K \approx 12 + 1 / (2 + 1/1) = 37 / 3$

775 / 314 ≈ 2 reste 147 soit $N / K \approx \dots\dots\dots = 99 / 8$

Soit $N / K \approx 235 / 19$ (le cycle de Méton).

Annexe 2 :
Comment le cycle de Méton
a peut-être été découvert

Les Grecs utilisaient alors l'octaéride : 99 lunaisons en 8 années, soit 2.922 jours.
Or : 2.922 / 99 = 29,5151 au lieu de 29,5306.
L'erreur est de 1,5 jours en 8 ans ; en laissant fonctionner l'octaéride, le cycle de la Lune se décale sur le cycle des

permis d'exhiber le nombre 365,25.

Poursuivons :
donc en 152 ans, on a 19 x 99 mois, soit 1.881 mois mais seulement 1.880 lunaisons.
Divisons par 8 : en 19 ans, on aura 235 lunaisons.
C'est encore par l'erreur du système des octaérides qu'est découvert un cycle bien meilleur.

Annexe 3: Les jours de la semaine

Au temps d'Aristote l'ordre assigné aux planètes est défini par la philosophie : Terre = Chaos, Ciel = Ordre (Kosmos) ; plus un astre est mouvant sur la sphère des fixes, plus il est supposé proche : d'où l'ordre :

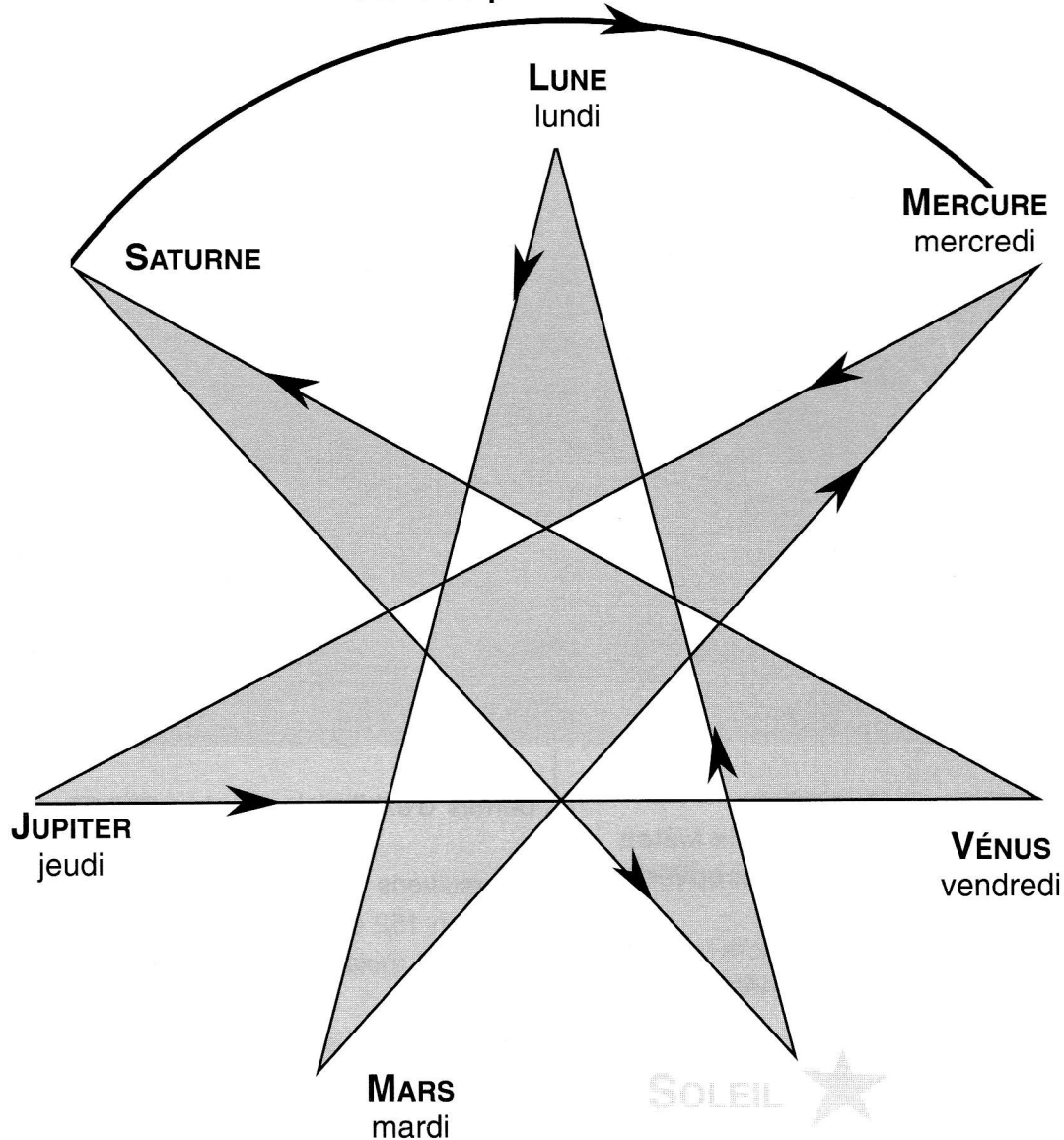
Lune – Mercure – Soleil – Mars – Jupiter – Saturne.

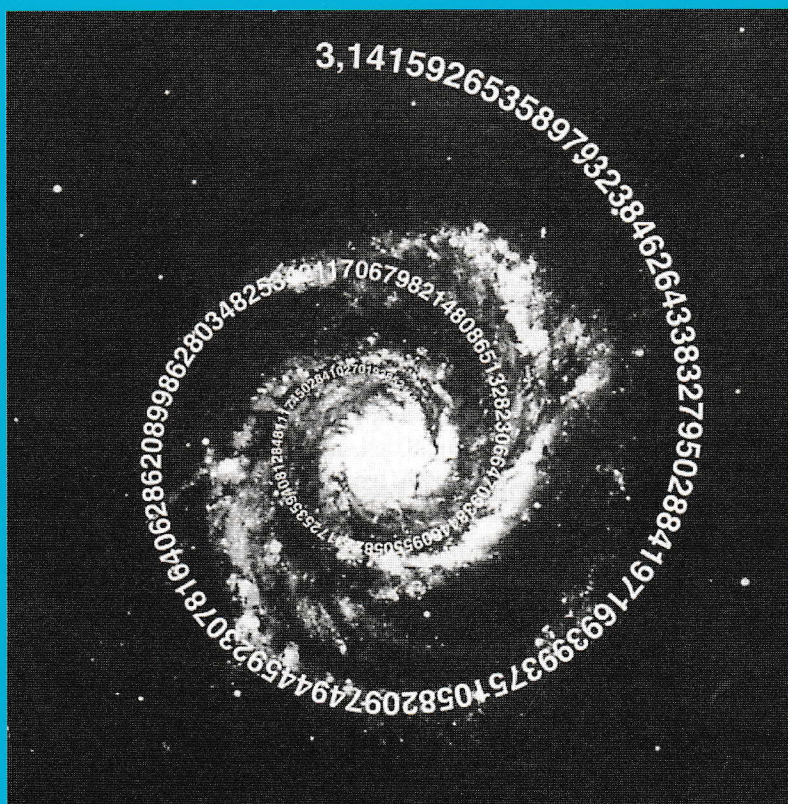
Chaque heure du jour est dominée par une planète, dans l'ordre décroissant

de proximité, la 1ère heure du 1er jour est sous l'ordre de la Lune (d'où lundi, jour de la Lune), puis la 2ème heure : Saturne, d'où la 1ère heure du 2ème jour sous l'égide de Mars (mardi : jour de mars) etc. On a perdu Saturdi (Saturday) et soldi (Sunday, Sonntag) dans notre langage.

Samedi est le Jour du Sabbat, dimanche le jour du Seigneur.

ordre de proximité croissant





une π -galaxie extraite de **“Le fascinant nombre π ”**
de Jean-Paul Delahaye . Ed. Pour la Science - Belin