PLOT

88-89

numéro double

Densité maximale : un problème résolu !

Babylone et les mathématiques

hiver 1999 - 2000

50 F

ISSN [illegible] 74 71 - Vendu en France et à l'étranger.

Plot 88 / 89 - hiver 1999-2000

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi
Responsable de rédaction
Michel Darche
Secrétariat
Madeleine Schlienger
Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté
Michel Clinard, Gérard Chauvat
Roger Crépin, Luce Dossat
Georges Le Nezet, Serge Parpay
Michel Soufflet, Raymond Torrent
Abonnements
PLOT APMEP Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2
Prix d'abonnement pour 2000
160 FF pour 4 numéros
Adhérent APMEP : 140 F
Abonnement étranger : 160 F
+ tarif avion : 50 F
Photocomposition et maquette
i.c.e.- Limoges
Impression
Fabrègue - St-Yrieix
Editeur
Association régionale
de l'APMEP d'Orléans - Tours,
et
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du Ministère chargé de la Coopération.

Sommaire

Éditorial

Maths 2000 : l'année mondiale des mathématiques a commencé ! Poitiers, La Rochelle, Dakar, Strasbourg, Orléans-Tours ...

L'équipe du Plot va consacrer sa dernière année d'existence à vous apporter une suite de 4 numéros inédits qui s'achèveront par un numéro exceptionnel à mettre dans toutes les mains, des élèves aux parents qui se posent la question récurrente :

à quoi ça sert les maths ?

Quatre numéros à venir qui vous feront part des dernières réflexions sur les mathématiques et sur l'enseignement des mathématiques. De quoi nourrir vos réflexions et actions auprès des élèves et du grand public. Pour tous ceux qui ont aimé nous lire,

réabonnez-vous pour l'an 2000,
dernière année ... du PLOT !!!

Trois cercles et un triangle ???

Deux nouveaux bouts d'allumaths

par les allumés des maths !!!

Le groupe des allumaths (les "allumés" des mathématiques) réunit quelques professeurs et inspecteurs de mathématiques de l'Académie de Poitiers pour la plupart.

Ils échangent problèmes et solutions sans autre restriction que leur intérêt. Voici deux nouveaux sujets, l'une géométrique, l'autre numérique, et des éléments de réponses pour les deux précédents sujets parus dans le PLOT n° 87.

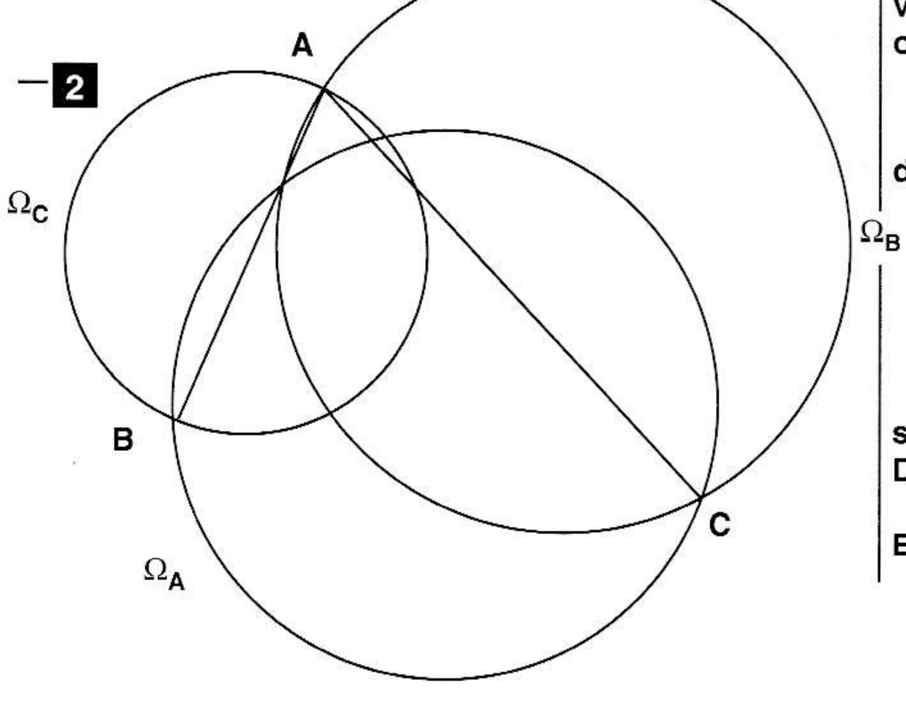
Plot 88 - Situation 1

A, B, C sont trois points non alignés d'un plan..

Ω_A, Ω_B, Ω_C les cercles de diamètres [BC], [CA] et [AB].

Que peut-on en dire ?

Et cela suffit pour se poser des problèmes divers et variés et accessibles à tous !



Plot 88 - Situation 2

Nous avons proposé dans le n° 86 de trouver une explication au texte suivant de Walusinski : "l'histoire des calendriers julien et grégorien étant connue de ... tous, et sachant que le 1er janvier 1900 était un ... lundi, on en déduit par le calcul ci-dessous que le :

31 décembre 2ooo

sera ... un dimanche !".

Pouvez-vous décrypter ce calcul et vérifier que nos glorieux ancêtres ont pris la Bastille un mardi !!!

31	-->	2
décembre	-->	5
2ooo	-->	2
100 ↓ 25	-->	4

soit pour le tout : 6 (modulo 7)
D'où du lundi au dimanche !!!

Et quel jour était le 14 juillet 1789 ?

Les bissectrices d'un triangle

À propos des situations 1 et 2 parues dans le Plot n° 87

Plot 87 - Situation 1

ABCD est un parallélogramme noté P.

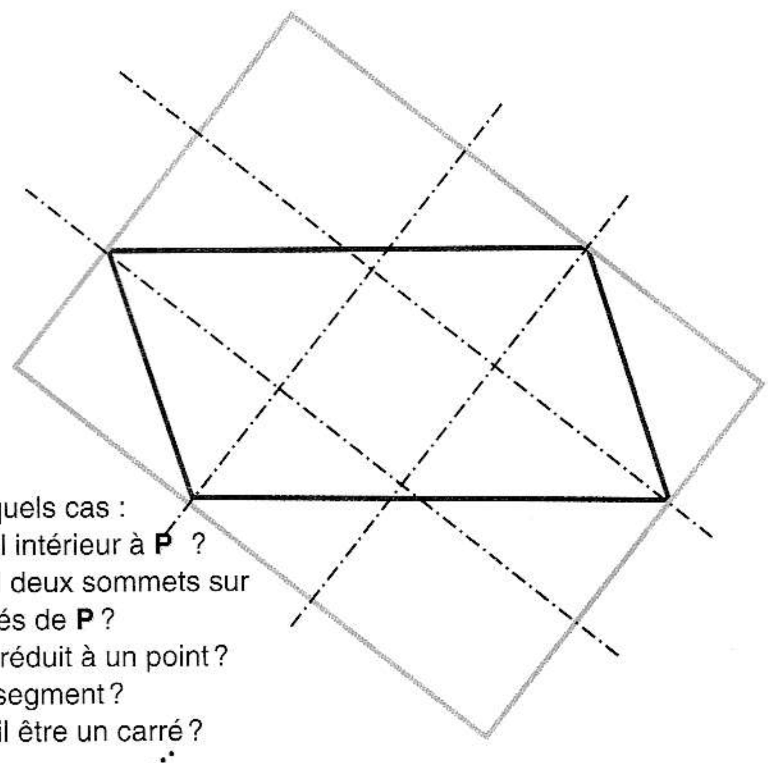
Que peut-on dire des quadrilatères formés par les bissectrices des angles du parallélogramme ?

Cette situation est élémentaire et peut être aisément étudiée dès le collège.

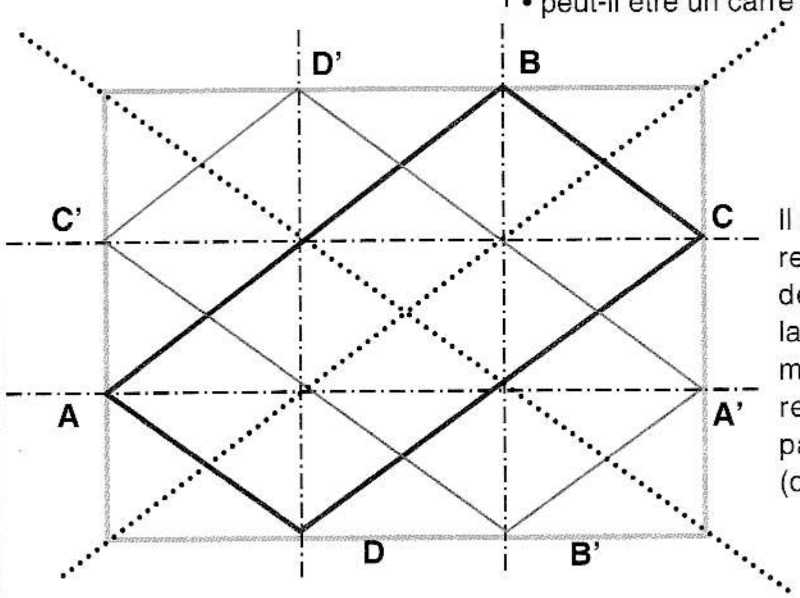
Appelons **I** le quadrilatère formé par les bissectrices intérieures et **J** celui formé par les bissectrices extérieures, on montre successivement que :

- **I** et **J** sont des rectangles dont les côtés sont parallèles.
- leurs éléments de symétrie sont :
  - le centre du parallélogramme,
  - les parallèles aux bissectrices passant par ce centre.
- le parallélogramme A'B'C'D' a ses côtés parallèles à ceux de **P**, les mêmes bissectrices intérieures et extérieures que **P**, le même périmètre et la même aire.
  - Les diagonales de **I** et **J** sont les médianes communes de **P** et **P'**.
  - la longueur des segments diagonaux de **I** (resp. **J**) est la différence (resp. la somme) des longueurs de deux côtés consécutifs d'un parallélogramme.
  - dans le cas où **I** est intérieur à **P** :

Aire (**J**) - Aire (**I**) = 2 Aire(**P**)



Dans quels cas :
- **I** est-il intérieur à **P** ?
- **I** a-t-il deux sommets sur les côtés de **P** ?
- est-il réduit à un point ? à un segment ?
- peut-il être un carré ?



Il serait enfin intéressant d'étudier des groupes qui laissent (globalement invariants les rectangles et un parallélogramme (ou les deux).

Réabonnez-vous au PLOT 2000

Autres remarques :

• Si a et b sont les longueurs des côtés du parallélogramme ABCD (avec a > b), alors :

- les longueurs des côtés du petit rectangle sont :
$(a - b)\cdot\cos \widehat{BAC}/2$ et $(a - b)\cdot\sin\widehat{BAC}/2$
- celles des côtés du grand rectangle sont :
$(a + b)\cdot\cos\widehat{BAC}/2$ et $(a + b)\cdot\sin\widehat{BAC}/2$,
- celles des diagonales des rectangles (médianes des parallélogrammes) sont a - b et a + b.

Nous invitons le lecteur à poursuivre l'étude avec un parallélogramme articulé (a, b fixés et $\widehat{BAC}$ variable).

Ces dernières remarques s'inspirent largement d'une étude fouillée de Raymond MILLON de Montigny-le-Bretonneux.

Plot 87 - Situation 2

Et si l'on décidait qu'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ était divisible par un autre $\frac{c}{d}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que :

$$\frac{a}{b} = k \times \frac{c}{d}$$

Dans l'ensemble des rationnels strictement positifs, cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre partiel !

Notons que si les deux rationnels (positifs) sont irréductibles alors :

$\frac{c}{d}$ divise $\frac{a}{b}$ <===> $b \mid d$ et $c \mid a$

On peut introduire les notions de PGCD et de ppcm ;

en notant $a \Delta c$ (resp. $a \vee c$) et $b \Delta d$ (resp. $b \vee d$) les PGCD (resp. ppcm) de a, c et de b, d, on établit que :

$$\frac{a}{b} \,\Delta\, \frac{c}{d} = \frac{a \Delta c}{b \vee d}$$

et

$$\frac{a}{b} \vee \frac{c}{d} = \frac{a \vee c}{b \Delta d}$$

C'est un cas particulier d'un résultat plus général relevant de la théorie des treillis.

• 0 est un élément maximal $(\mathbf{Q}+, \mid)$, comme dans $(\mathbf{IN}, \mid)$.

• Notons qu'un rationnel non nul est toujours "divisible" par une infinité d'autres ($a/b = n \times a/nb$).

• Si on se limite à l'ensemble $\mathbf{Q}_n$ ($n \in \mathbf{IN}^*$ fixé) des rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme a/n ($a \in \mathbf{Z}$), alors on peut définir une division euclidienne :

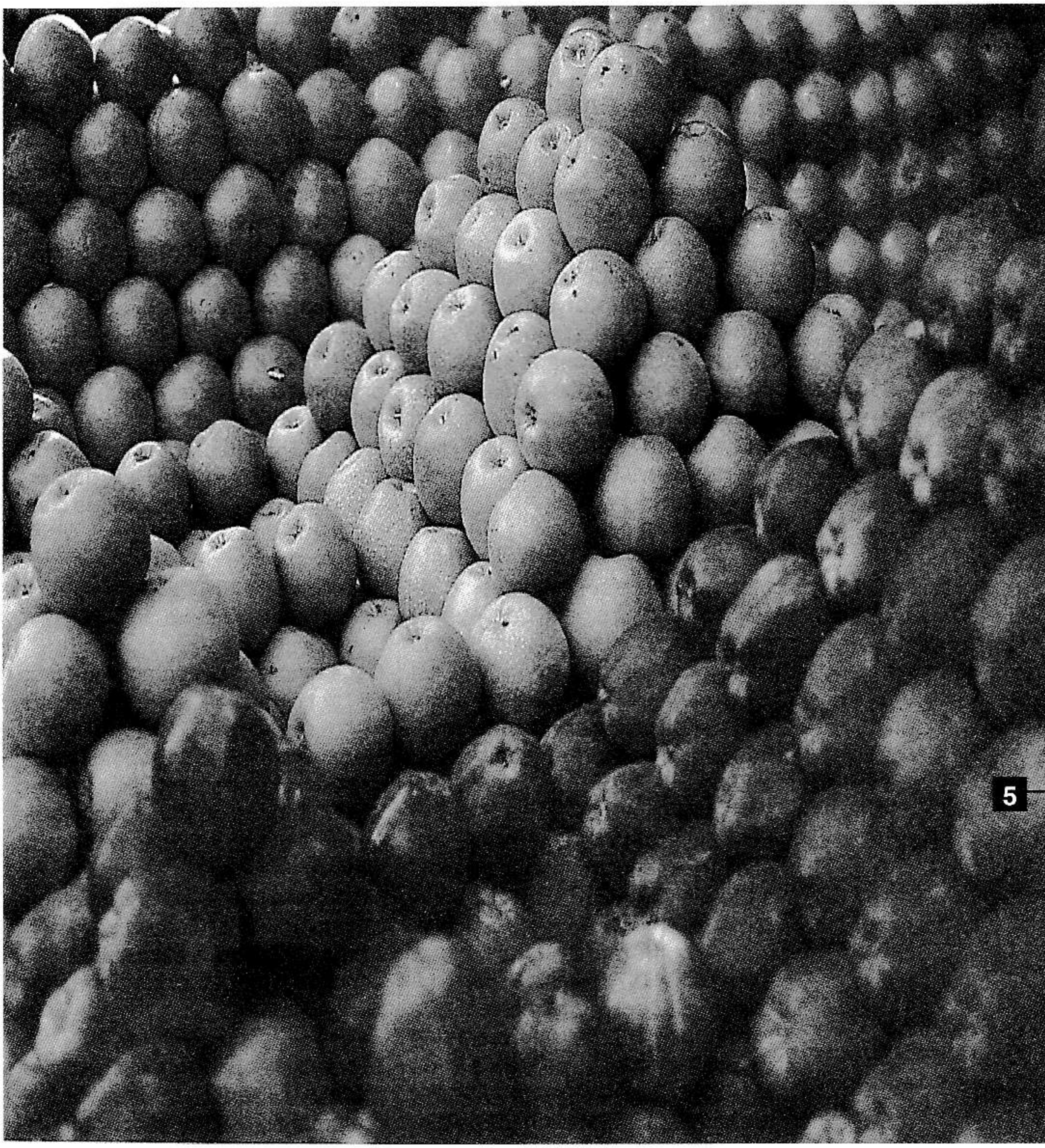
$$\frac{a}{b} = q \times \frac{b}{n} + \frac{r}{n}$$

(avec $0 \leq r < b$) et donc développer une arithmétique dans $\mathbf{Q}_n$ analogue à celle de $\mathbf{Z}$.

N'hésitez pas à nous envoyer vos commentaires et remarques et, bien sûr, toute idée de solution.

Nous sommes également ouverts à toute proposition de texte et idée permettant d'allumer nos mathématiques !

Posé par Képler en 1611 reposé par Hilbert en 1900 un problème résolu en ... 1998



Problème posé par Johannes Kepler en 1611

Comment empiler, de la façon la plus dense possible, des sphères de même rayon dans l'espace ? Cette question est apparue il y a près de quatre siècles, à la suite de travaux de Thomas Harriot - l'assistant mathématicien de Walter Raleigh - concernant les empilements de boulets de canon.

Dans un livret publié en 1611, Johannes Kepler énonce que l'empilement de sphères le plus dense possible dans l'espace est l'empilement cubique à face centré, c'est-à-dire celui qui correspond aux empilements de fruits que l'on peut apercevoir communément sur les étals des marchés.

Cet énoncé, maintenant appelé conjecture de Kepler, a traversé les siècles sans connaître de preuve rigoureuse. 11 figures parmi la liste des problèmes que David Hilbert proposa A la communauté des mathématiciens au congrès international des mathématiciens de 1900.

En fait, à partir de l'empilement cubique à face centrée, il est possible de construire une infinité d'autres empilements de sphères ayant la même densité, égale à :$\pi/\sqrt{18} \neq 0{,}7404\ 8049$. Le problème est donc de démontrer que tout empilement de sphères a une densité inférieure ou égale à ce nombre. En 1947, la meilleure borne connue était de 0,828 (Rankin), et, en 1993, le record était de 0,7731 (Muder), jusqu'à ce que Thomas C. Hales, de l'université du Michigan, rende publique sa solution du problème de Kepler, au début de l'année 1999.

L'approche de Hales diffère significativement des approches antérieures par un usage intensif de l'ordinateur. La preuve complète est contenue dans un d'articles totalisant plus de 250 pages. Le stockage des dossiers informatiques contenant l'ensemble des codes informatiques et des données nécessaires à la preuve exige près de trois gigabits de mémoire.

Le premier progrès important sur le problème avait été effectué par Fejes Toth en 1953.

Celui-ci était parvenu, en utilisant une construction géométrique classique, la décomposition de Voronoi, à ramener le problème à une question d'optimisation d'une fonctionnelle non linéaire.

Cette fonctionnelle comportant près de cent cinquante variables, ce problème d'optimisation échappe complètement à ce qu'il est possible de calculer actuellement, même avec les ordinateurs les plus puissants. Le point de départ de la preuve de Hales utilise des constructions voisines de celles de Toth. Le problème d'optimisation non linéaire étant hors d'atteinte, Hales est conduit à utiliser des méthodes combinatoires plus indirectes.

Une étape importante est la classification, utilisant intensivement programmation linéaire et ordinateurs, de certains graphes planaires. ■

François Lœser
in "La science au présent"
Encyclopedia
Universalis 2000

D'empilements en empilements, de surprenantes mathématiques

Marcel Berger, Paris

Marcel Berger est Directeur de recherche honoraire du CNRS. Il a été Directeur de l'IHES, Institut des Hautes Études Scientifiques qui accueille les mathématiciens du monde entier.

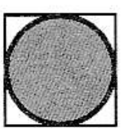
Ce texte fait suite à une conférence que Marcel Berger a donné au Muséum d'Orléans sous l'égide de l'APAC (association populaire Art et Culture) cette année.

Premier problème : Comment empilez des disques en dimension 2

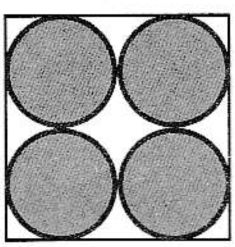
Ce premier problème, bien empiler des disques ou disposer régulièrement des points sur un plan est un problème dont on connaît la réponse depuis longtemps.

Pour les disques, il s'agit en fait d'essayer d'empiler le maximum de disques dans un carré ou un cercle donnés.

Ainsi, combien de disques de diamètre unité peut-on placer dans un carré de côté 1 ? (réponse 1 !),



de côté 2 ? (réponse 4 !),



de côté 3 ? (réponse 9 !) ... de côté 10 ? (réponse ... en bas de page !).

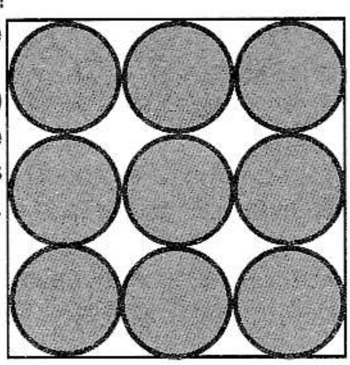


fig. 1

Si l'on prend des empilements qui ne sont pas réguliers, le problème se complique.

Si vous empilez des pièces de monnaie, de façon aléatoire, vous perdez beaucoup d'espace. L'empilement régulier, en quinconce, que l'on appelle empilement hexagonal, permet de perdre le moins d'espace : il occupe 98,7 % du plan !

Est-il le meilleur ?

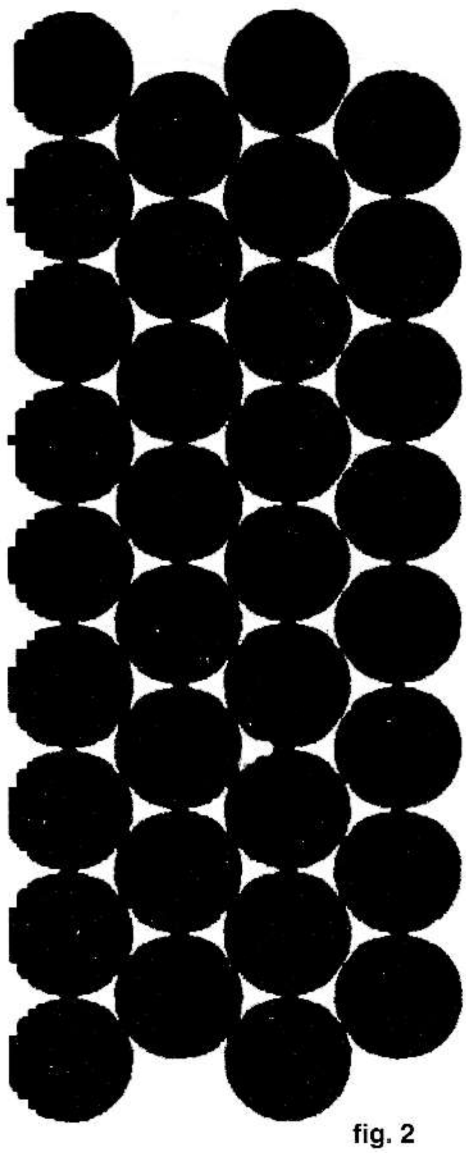


fig. 2

"Populariser, vulgariser les mathématiques est un des exercices les plus difficile.

Odile Jacob disait à Pierre Chartier que chaque formule dans un livre lui faisait perdre 5 000 lecteurs ! Si c'est vrai, Hawkins, l'homme des trous noirs, l'astrophysicien, à perdu avec chaque formule plus d'un million de dollars !!

Du coup, ou coût, il n'y en a aucune dans son dernier livre sur l'origine de l'Univers !!!"

Réponse à la question : dans un carré de côté 10, on peut placer 105 disques unités. Question : à partir de quel carré peut-on en mettre plus ??

Comment se convaincre qu'il n'est pas du tout évident de se convaincre que la meilleure façon d'empiler des disques est bien celle-là?

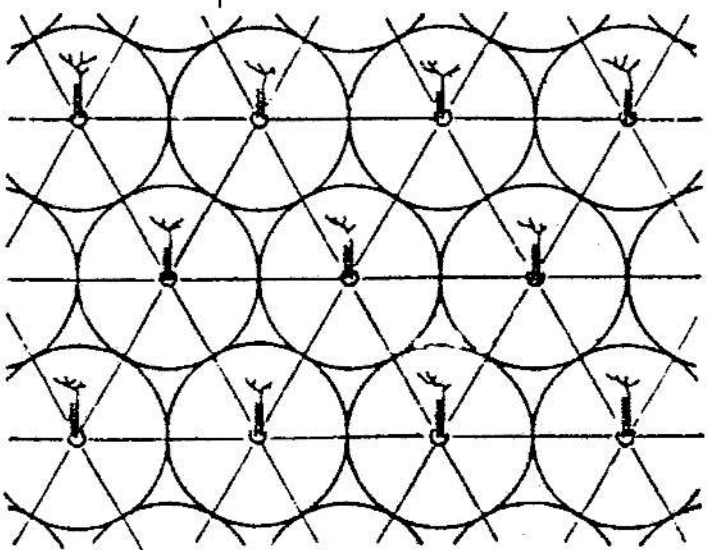


Fig. 3

$$\frac{\text{Périmètre}}{\text{Surface}} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} \longrightarrow 0$$

tend vers zéro quand R tend vers l'infini

Vous avez vu que pour empiler au mieux 4 ou 9 disques le meilleur empilement était l'empilement "carrelage".

Le problème se complique encore lorsqu'il s'agit d'empiler dans un disque : observez l'empilement hexagonal dans un cercle (fig. 4), il contient 19 disques. Vous pouvez restreindre le diamètre du cercle et avoir toujours vos 19 disques à l'intérieur (fig. 5 et 6). Mais l'empilement n'est plus régulier.
Et pourtant c'est le meilleur possible. L'empilement hexagonal paraissait être le meilleur possible et pourtant dans ce cas, ce n'est pas lui !
Comment réagir ?

Comment sortir de cette contradiction ?

Réponse : on va à l'infini.
Dans les exemples que l'on vient d'examiner, il n'y a pas beaucoup de boules. Si on veut se convaincre que l'hexagonal est le meilleur, il faut prendre une très grande quantité de disques.

Mais au fait, qu'est-ce qu'un bon empilement ?

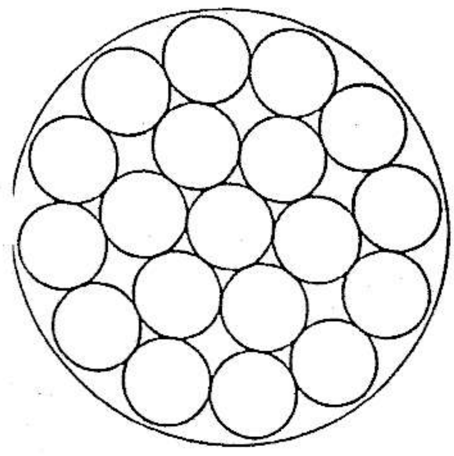
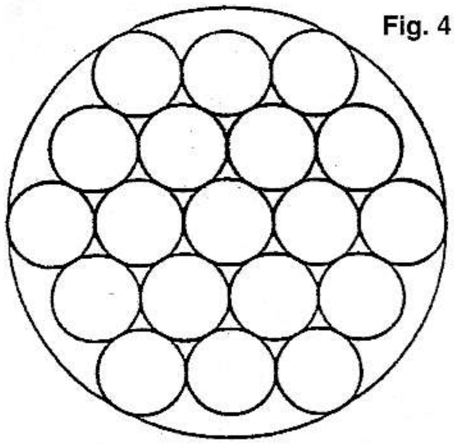
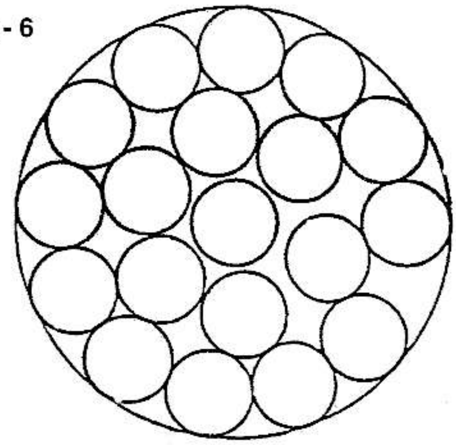


Fig. 4 - 5 - 6





Ça pourrait être le rapport des surfaces occupées par rapport à la surface totale ou à la surface perdue.
On sait montrer, mais seulement depuis 1940, grâce à M. Fejes-Toth puis par

une deuxième preuve en 1958 par Rogers que l'empilement hexagonal régulier est bien le meilleur : on dit le plus dense.

Nous allons regarder de plus cette démonstration parce qu'elle ne marche pas en dimension 3 avec des sphères.

Première démonstration : les domaines postaux

Considérez des bureaux de poste. Quels domaines vont-ils définir pour que chaque personne fasse le minimum de trajet pour se rendre à "la Poste" ?

On partage ainsi le plan en domaines "économiques". Les frontières de ces domaines ont été définies par Voronoï. Essayons d'appliquer cela à des disques.

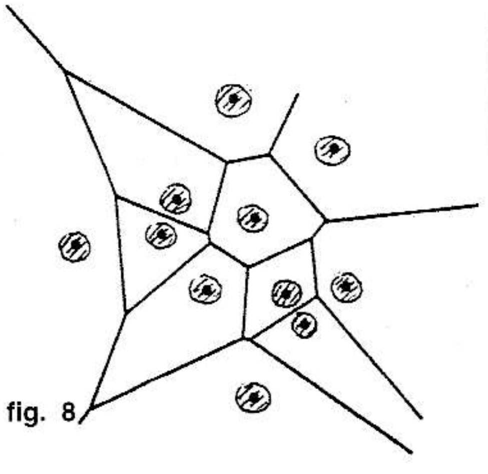


fig. 8

On voit que c'est quand on place 6 cercles tangents au 7ème que l'on perd le moins d'espace. Cela fait l'objet, seulement depuis 1940, d'une démonstration complexe même pour un mathématicien.
Si on veut en rentrer un septième on perd de la place.

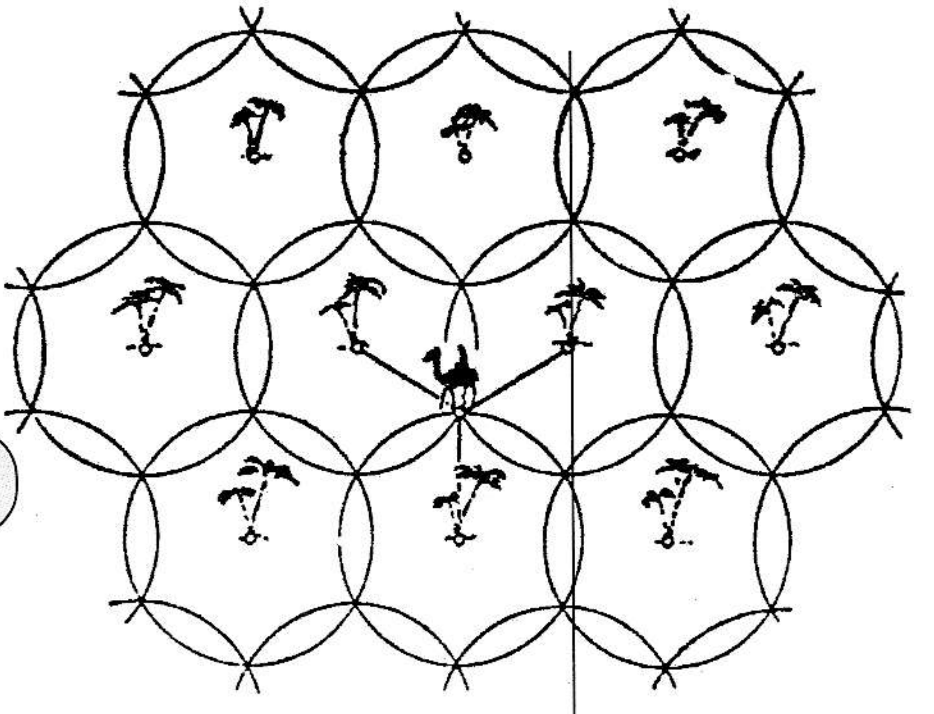


fig. 7

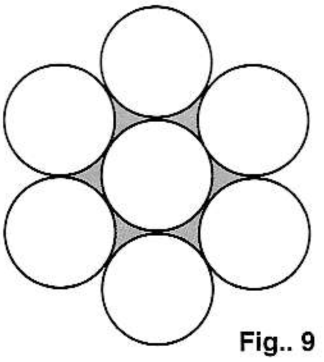


Fig.. 9

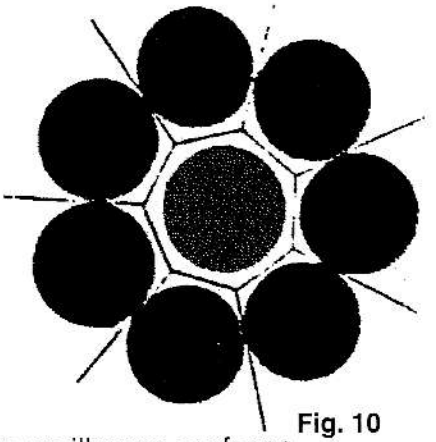


Fig. 10

Les meilleures surfaces pour un pavage régulier, ce sont les hexagones que vous connaissez tous : c'est celui du pavage avec des tomettes (cf. fig. 11).

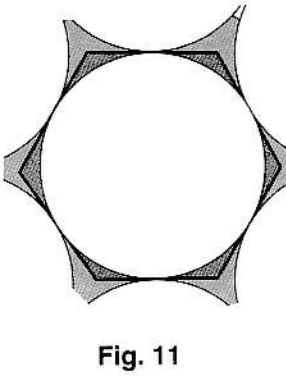


Fig. 11

«Même en géométrie, il n'y a pas de mathématique sans aller à l'infini, sans quitter la dimension 3. Il faut aller au delà et même à l'infini.»

Donc d'une part je sais que ce pavage "marche" bien et d'autre part que je ne peux pas faire mieux.
Mais je ne suis pas encore allé à l'infini. Il me manque encore la notion de frontière. Vous avez vu tout à l'heure qu'avec une frontière sous forme de disque ça n'est pas aussi simple.

Comment opérer? On prend un très grand cercle dans lequel il y a une très grande quantité de billes. On passe à l'infini et on regarde les domaines postaux définis comme tout à l'heure. Il y a des bons domaines, ceux qui sont bien à l'intérieur du cercle et des mauvais.
Ces derniers qui sortent en partie du domaine sont accrochés sur le périmètre du cercle.

Combien y en a-t-il?
A l'infini, des mauvais domaines, il y en a autant que le périmètre du cercle et des bons, il y en a autant que la surface du cercle!

L'aire du cercle est $\pi . R^2$, alors que le périmètre est $2\pi . R$.
Si l'on fait le rapport des mauvais aux bons domaines, on voit que lorsque R tend vers l'infini i (à "disques constants"), ce rapport tend vers zéro.

Deuxième méthode : la triangulation

On prend les enveloppes de Voronoï (des bureaux de poste) et on joint les "centres postaux" deux à deux. On passe ainsi du diagramme de Voronoï à la triangulation de Delaunay.

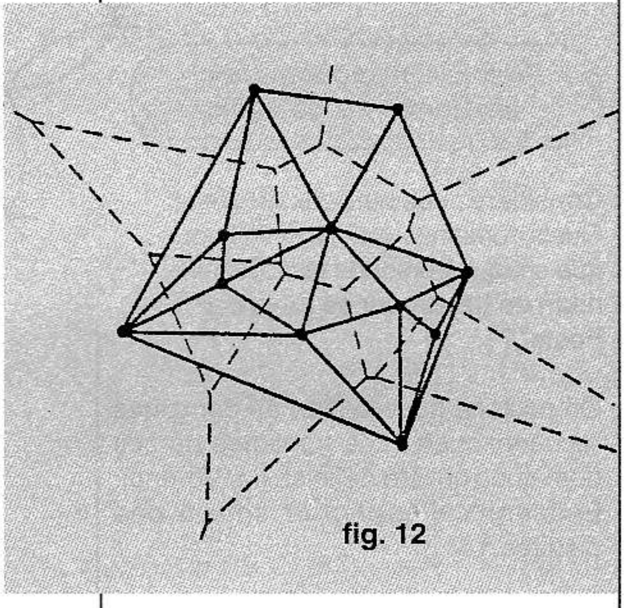


fig. 12

On obtient une partition du plan en triangles. Plaçons maintenant trois cercles aux trois sommets du triangle pour qu'ils remplissent le plus d'espace dans le triangle.
Le meilleur triangle, celui qui laisse le moins de place perdue, est alors le triangle équilatéral.

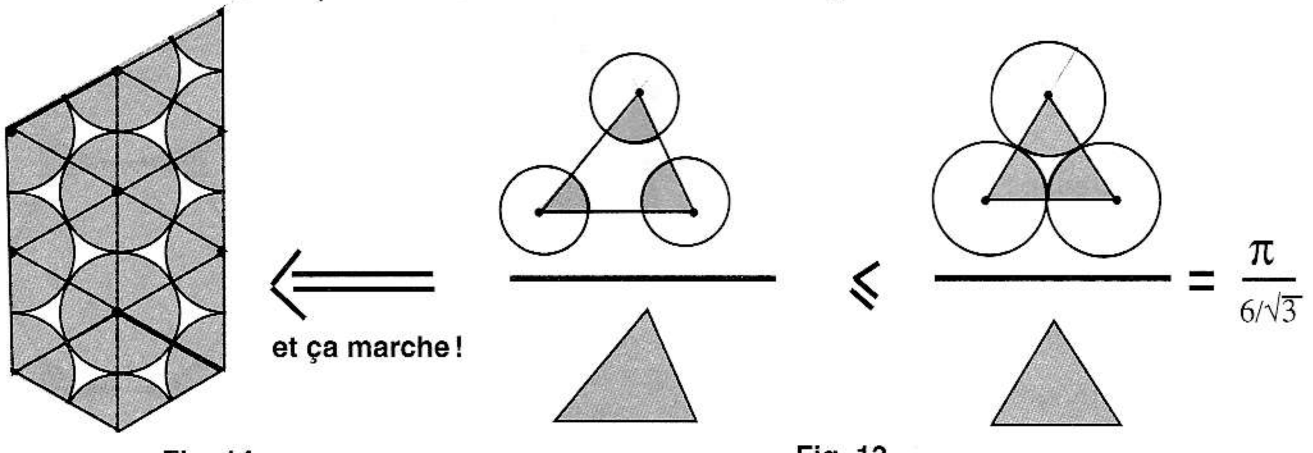


Fig. 14

Fig. 13

Ce problème est assez facile mais c'est le seul qui soit résolu.

Un problème ouvert

Pour le mathématicien, l'existence d'un problème ouvert est toujours source d'émerveillement et bien sûr de curiosité infinie.

Voici un exemple de problème du plan non résolu à ce jour, bien qu'on en connaisse la solution depuis longtemps, les abeilles en particulier :
Comment découper le plan en domaines qui aient tous la même aire de façon à ce que la frontière soit la moins longue possible ?
Les abeilles savent le faire avec des hexagones réguliers. Mais les mathématiciens ne savent pas prouver que c'est la solution la meilleure.

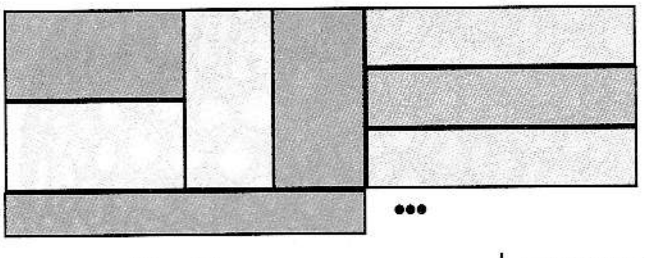


Fig. 15

Deuxième problème : Comment disposer au mieux des points sur la sphère ?

Imaginez la Terre et un problème très actuel : combien faut-il disposer de satellites géostationnaires pour qu'ils couvrent bien toute la surface de la Terre en communication GSM ?
Il y a bien d'autres applications pratiques à ce problème :
- quand on fait des échographies ou des scanners, il faut savoir où il faut mettre les points,
- si vous êtes chimiste, vous voulez savoir comment mettre les électrons autour du noyau,
- sur une balle de golf, il fallait jusqu'à dernièrement, mettre des trous bien disposés,
- en architecture, la construction de dômes géodésiques nécessite une triangulation qui nécessite elle-même de bien répartir certains points. Observez la Géode à la Cité des Sciences et vous verrez apparaître des points d'ordre 5 (avec 5 arêtes) qui sont les sommets d'un icosaèdre.
- les pores des grains de pollen,
- Comment mesurer la quantité d'ozone sur la planète ? Là encore, il faut savoir placer convenablement un certain nombre de satellites pour couvrir la planète.

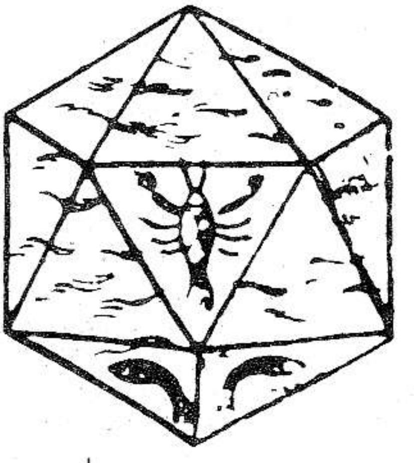


Fig. 16 : l'icosaèdre, symbole de l'eau

<u>Les cas les plus simples :</u>
1- placer 12 points autour d'une sphère. Il suffit de faire appel à l'un des 5 polyèdres réguliers : l'icosaèdre.

2- On a découvert récemment un nouveau carbone, le C 60 où les 60 atomes de carbone sont placés au sommet d'un polyèdre semi-régulier qui est en fait le ballon de football, d'où l'autre nom de ces carbones : les fullerènes.

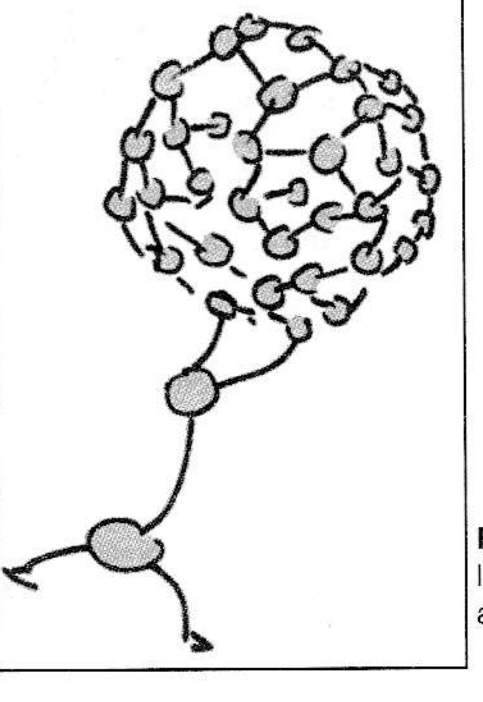


Fig. 17 : le carbone C60, appelé Fullerène

En fait, on ne peut pas mettre correctement un certain nombre de points sur la sphère.

Voyons cela de plus près.

Dans le plan, on sait placer des points au mieux en utilisant une grille d'hexagones réguliers. Vous savez que vous ne pourrez pas appliquer cette feuille sur la sphère. Cette dernière est en effet non développable sur le plan.

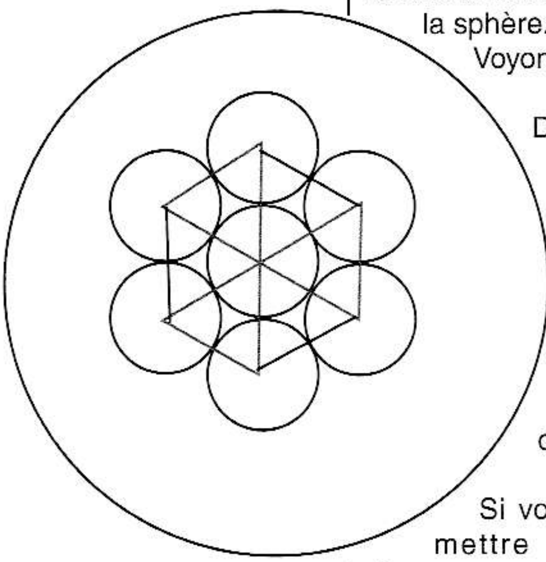


Fig. 18
6 disques sur une sphère

Si vous voulez mettre 6 disques autour d'un autre sur une sphère comme on le fait facilement dans le plan, vous vous apercevrez que le sixième doit avoir un rayon plus petit pour venir se caser entre les autres.

Si vous observez une géode ou un radiolaire, vous remarquerez que presque tout est en hexagone mais il y a toujours quelques pentagones, 12 exactement.

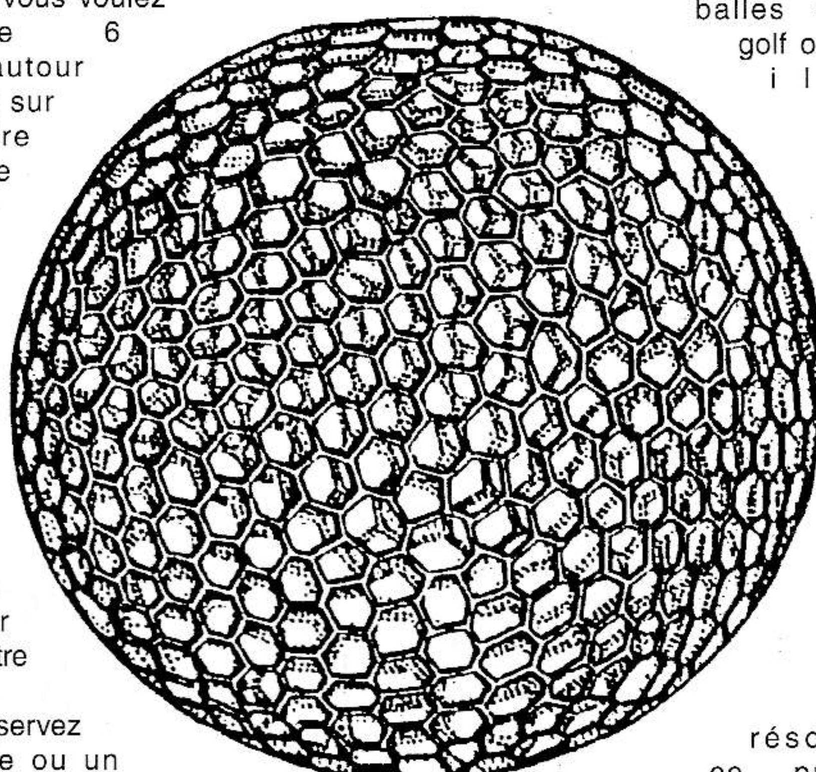


Fig. 19
Un radiolaire "hexagonal", *Aulonia hexagona*. Il est impossible que le squelette de cet animal soit uniquement constitué d'hexagones (on distingue des pentagones).

C'est assez facile à démonter pour le mathématicien. Cela est dû à la formule d'Euler qui lie les points, les frontières et les domaines de toute carte dessinée sur une surface plane ou sphérique.

Le brevet Slazenger

Comment répartir régulièrement les trous sur une balle de golf ? Vous placez 12 points avec 5 voisins et ensuite vous remplissez les faces triangulaires d'un pavage hexagonal de trous tous identiques.

Mais vous ne pourrez pas commercialiser ces balles car la maison Slazenger a breveté cette solution il y a 30 ans. Comment les autres fabricants (Salomon, Nassault-flotter ou Tepflight) de balles de golf ont-ils résolu ce problème de brevet ?

Tout simplement en prenant les points de l'icosaèdre régulier mais en en décalant juste un et ainsi le brevet est détourné.

Si l'on veut mettre beaucoup de points sur une sphère, on fait appel à la physique :

On place des petits aimants qui ont

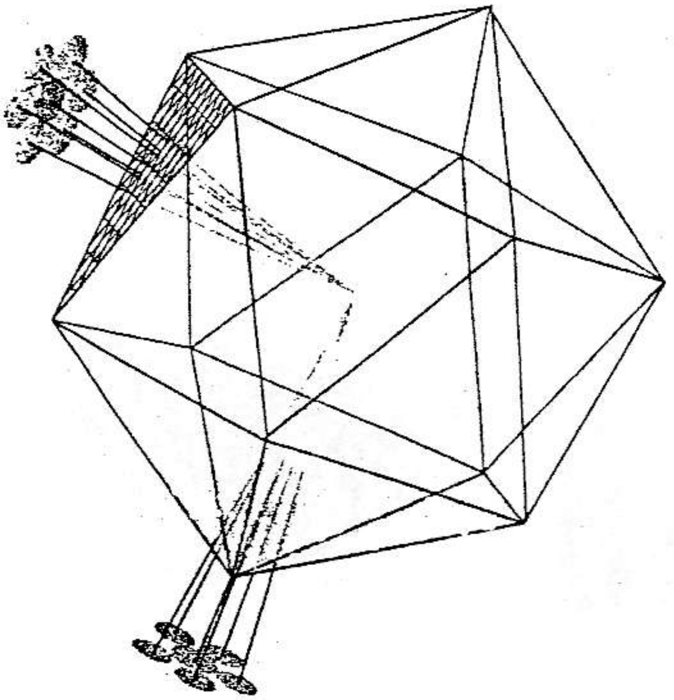


Fig. 20
Une balle de golf comporte au moins 12 trous qui n'ont que 5 voisins si tous les trous sont de même rayon.
La Société *Slazenger* dispose ces 12 trous d'ordre 5 aux sommets d'un icosaèdre et projette sur la surface de la balle des réseaux hexagonaux de trous qui occuperaient les faces de l'icosaèdre ayant ces sommets.
D'autres marques contournent le brevet en décalant ces 12 exceptions.

tous le même signe sur la sphère. Ils vont se repousser et s'équilibrer sur la sphère. On a un problème d'énergie minimum. Une modélisation sur ordinateur donnera la répartition.
Mais ces solutions ne conviennent pas.

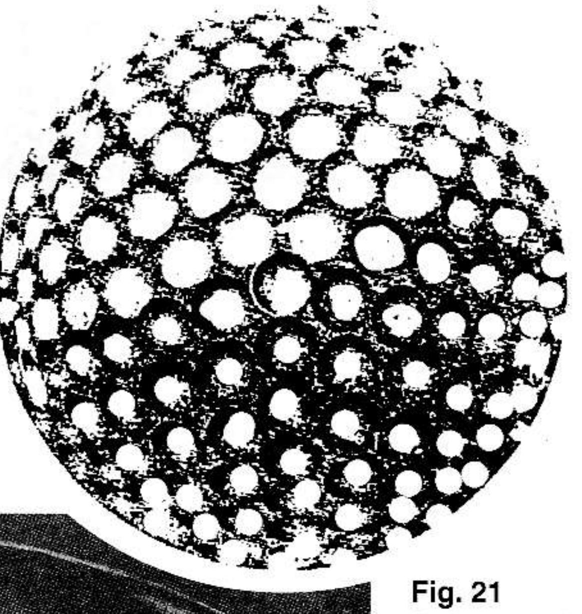


Fig. 21
Balle de golf

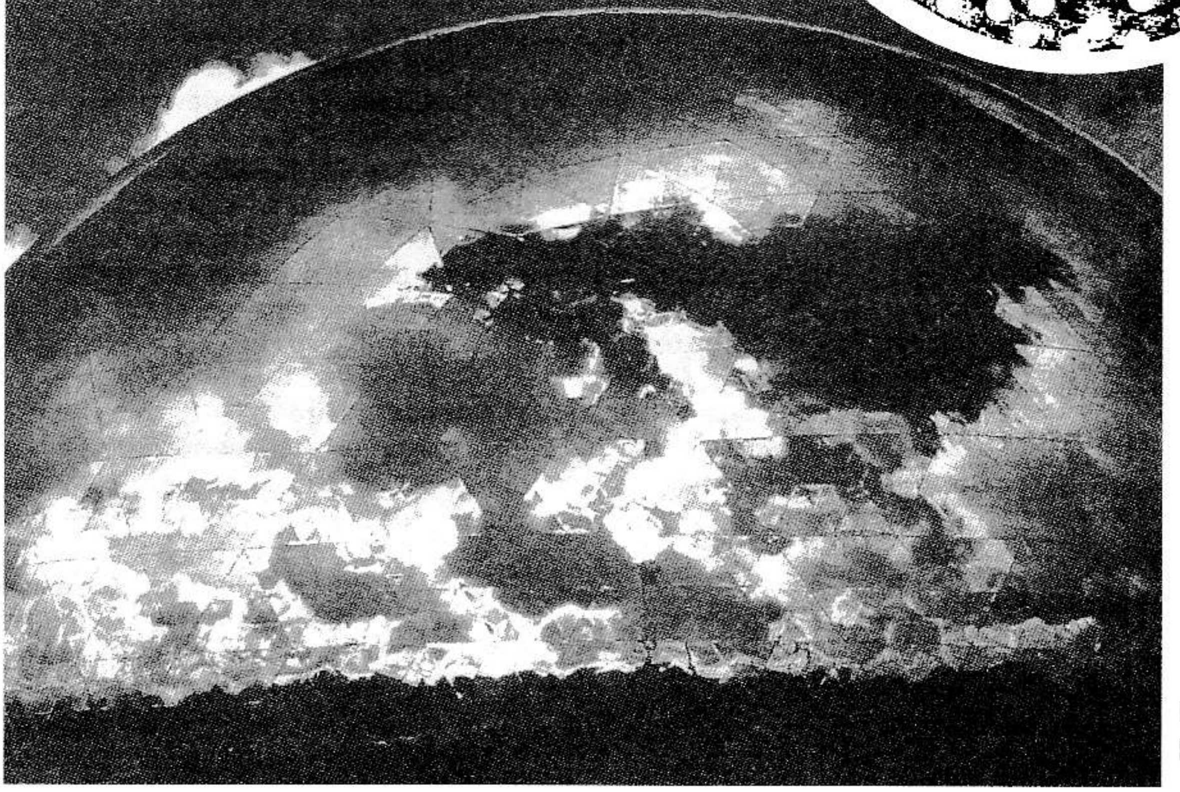
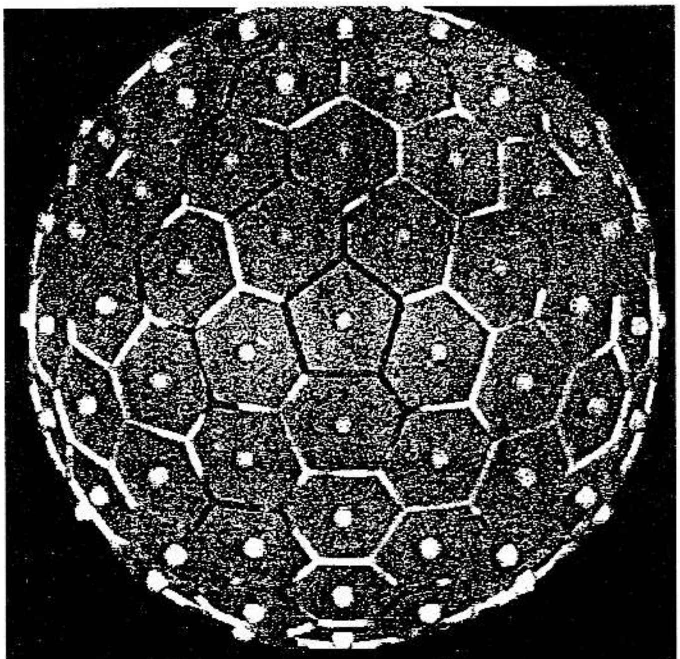


Fig. 22
La Géode

Fig. 24 : 700 points "bien" répartis(1995)



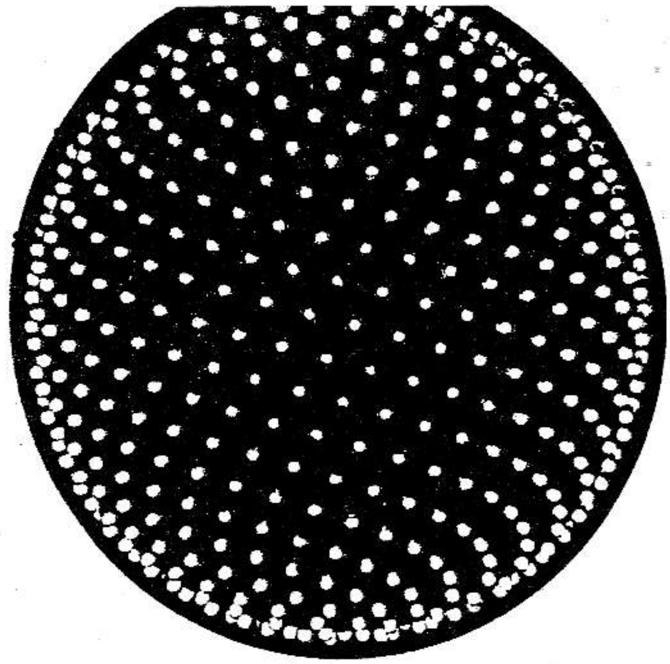


Fig. 23
122 électrons en équilibre et leurs cellules de Dirichlet.

Par exemple pour le problème d'ozone, les 12 points d'ordre 5 vont fausser la moyenne.

Actuellement, ce problème "impossible par nature" puisqu'il n'existe que 5 polyèdres réguliers, n'a pas de solution satisfaisante.
Beaucoup s'y essaient encore.

Ainsi la figure 24 dispose 122 points, en 1995, on a réussi à en placer 700, à diviser la sphère en 400 domaines d'aires égales !

Il existe une façon théorique pour mettre un grand nombre de points sur une sphère :
Cette méthode est assez récente ; elle nous vient de la théorie des nombres.
Combien y a-t-il de façons d'écrire un nombre entier comme sommes de 24 carrés.

$$n = n_1^2 + ... + n_{24}^2$$

La solution de cette "conjecture de Ramanujan" a été résolue en 1973 par Deligne (médaille Fields) puis Lebobky-Phillips-Sarnak.

Troisième problème : Comment bien empiler des boules dans l'espace ?

Ce problème qui a donné lieu à de nombreux travaux depuis des plus de trois siècles vient d'être résolu en 1998.

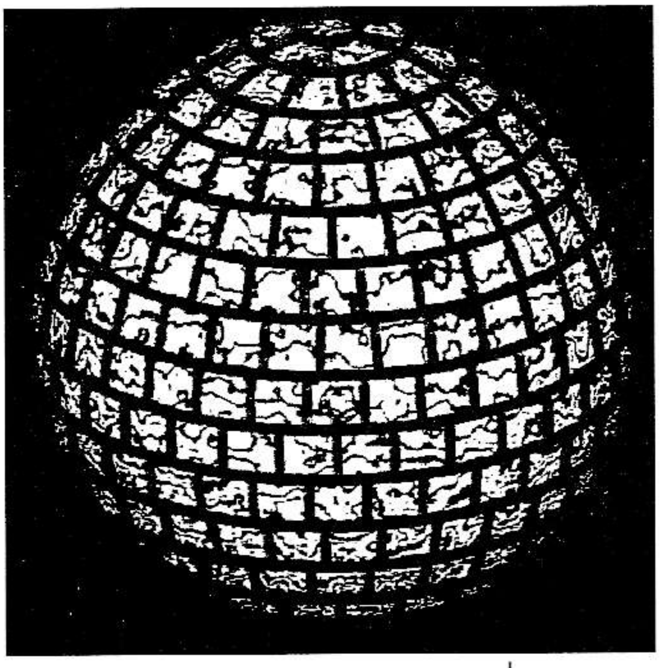
Il ne suffit pas de tasser fort pour empiler au mieux des boules dans une boîte. Si vous marcher sur le sable, au bord d'une plage, le sable devient sec.

Autrement dit : le sable sous le pied ne descend pas mais s'élève légèrement ! La densité du sable a diminué, les grains de sable se sont écartés les uns des autres. Donc tasser ne permet pas de mettre plus de boules, au contraire !

Comment faire ?
Il suffit de faire comme sur les étales de fruits et légumes ou encore comme faisaient les artilleurs pour empiler les boulets de canons.
Et l'on vient de démontrer que c'est le meilleur empilement, ce qui n'était qu'une hypothèse depuis 3 siècles !

Ce résultat a des conséquences pratiques énormes. La répartition des

Fig. 25 : Partition de la sphère en 400 surfaces de même aire avec un diamètre ≤ 7/400. (1995)



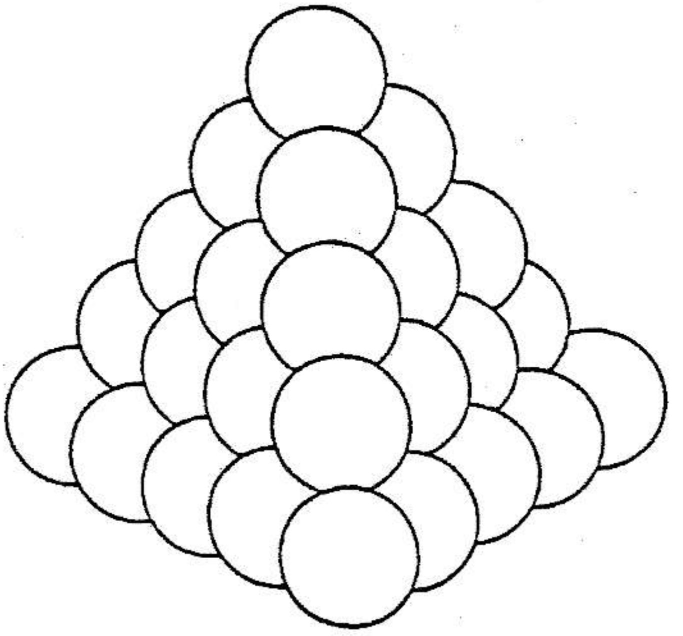


Fig. 27 : Seconde méthode d'empilement des fruits. Est-ce la même ?

grains de sable ou de granulats est très étudiée par les laboratoires des Ponts et Chaussées.
Par exemple pour stopper les barquints dans le désert, pour étudier les nappes phréatiques.

Revenons à l'empilement maximum. **Comment l'obtenir ?**

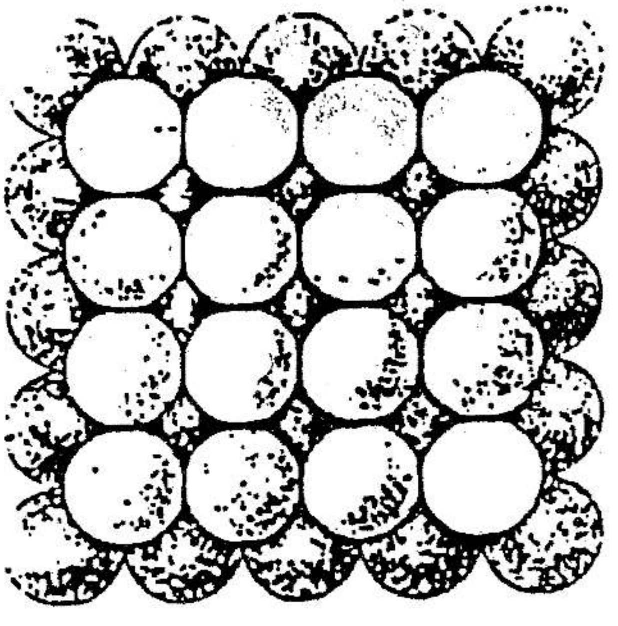


Fig. 26 : première méthode d'empilement des fruits

Vous pouvez faire vibrer la boîte et espérer voir l'empilement idéal se réaliser.
Pas du tout ! Si vous mettez les boules en vrac dans la boîte, vous occupez 60 % de l'espace, si vous faites vibrer la boîte en même temps, vous obtenez 64 % !
Alors que l'empilement idéal, appelé cubique à faces centrées par les géologues, occupe 74 %.
Ce résultat a été prouvé en juillet 1998 par **Thomas Hales** après plus de 10 ans de recherche. Il lui a fallu plus de 500 pages de démonstration et de très nombreux calculs sur ordinateur à la limite de la puissance actuelle.

Pourquoi avoir attendu si longtemps pour obtenir ce résultat alors que cet empilement est connu depuis toujours?

Harriot en 1591, Képler en 1 607 et de nombreux mathématiciens depuis s'y étaient attaqué sans succès.

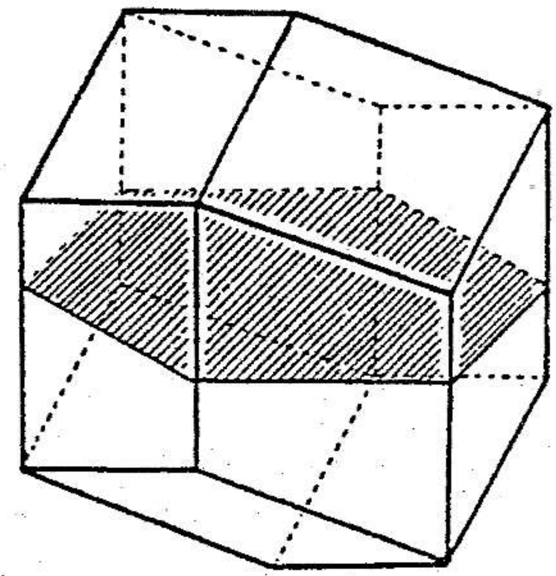


Fig. 29 : position du plan de symétrie dans le dodécaèdre rhombique

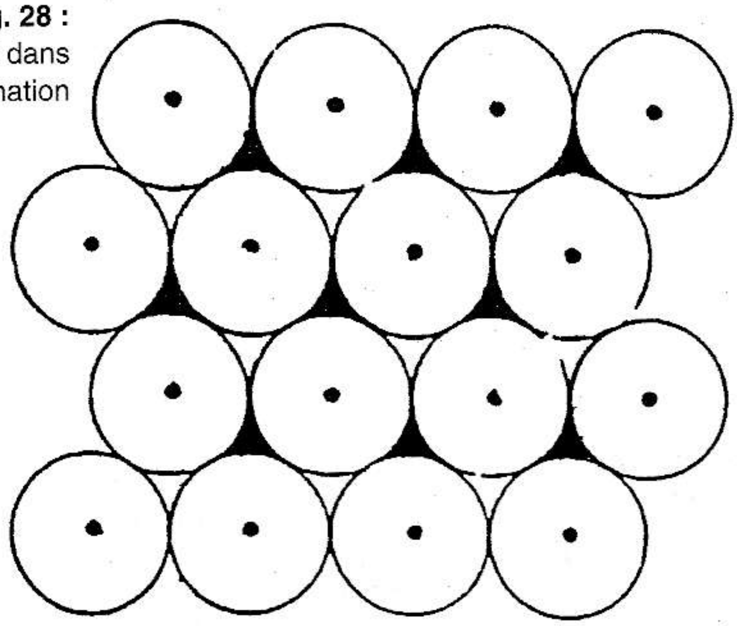
Première difficulté : le problème du choix

Vous pouvez sans difficulté placer la première couche en quinconce comme dans le plan.
Mais ensuite, si vous essayez de placer la seconde couche, vous vous apercevrez qu'il y a deux possibilités de disposer les boules dans les trous.
Et de même pour la troisième couche.

Je peux obtenir l'empilement des oranges mais je peux aussi obtenir un autre empilement qui est aussi bon que le premier.
Il y a donc, à l'infini, une infinité de choix. Et comme l'âne de Buridan (qui n'était d'ailleurs pas un âne mais un chien !), qui meurt de faim parce qu'il ne sait pas choisir entre deux propositions.
La nature, elle aussi, n'aime pas hésiter.

On peut aussi faire comme dans le plan et construire des enveloppes de Voronoï en dimension 3.
Dans le plan il y avait un seul "domaine postal" régulier, l'hexagone. Ici, si l'on change les couches on obtient deux types d'enveloppes.

Fig. 28 : L'ambiguïté dans la lamination



Seconde difficulté : le "kissing number"

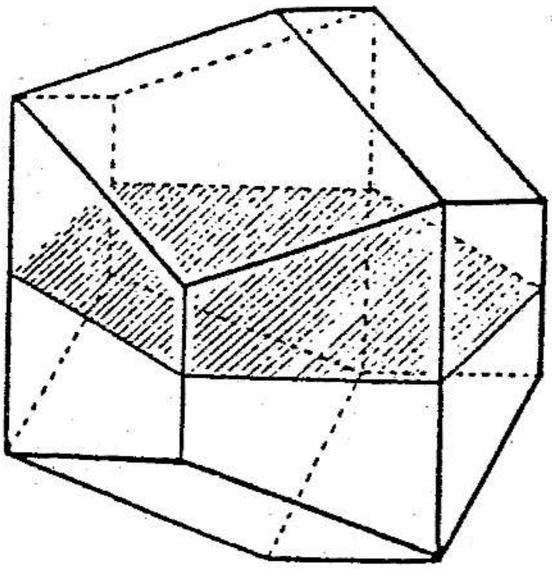
Dans le plan on a vu que l'on pouvait placer 6 disques autour d'un disque donné (cf. fig. 28).

Dans l'espace, vous pouvez essayer, vous verrez que l'on peut toujours en mettre douze. Mais on peut montrer qu'il reste des espaces vides qui, additionnés, permettraient de placer une treizième boule au contact de celle du milieu.

Ce résultat est à l'origine d'une vieille controverse en 1 694 entre Newton et Grégory. Grégory pensait que l'on pouvait mettre 13 sphères et Newton n'y croyait pas.

Ce problème n'a été totalement résolu qu'en 1952 par Schütte et Van der Waerden. La réponse est 12.

Pourquoi tant d'attente ? Les calculs sur une sphère, la trigonométrie sphérique sont des domaines très difficiles des mathématiques.



3ème problème : les dodécaèdres !

Vous vous rappelez que lorsqu'on met 6 disques autour d'un septième, on obtient un hexagone régulier.
Si on en met sept, on perd de la place.
Si je mets 12 sphères autour d'une treizième, quel est le volume le plus petit possible ? Il serait bon de montrer que ces domaines postaux, les enveloppes de Voronoï, sont des dodécaèdres réguliers (douze faces pentagonales). Je pourrais alors remplir l'espace avec ces dodécaèdres et le tour est joué !
Hélas, ça ne marche pas ! Les dodécaèdres réguliers sont des "mauvais coucheurs" : ils ne remplissent pas l'espace comme les hexagones remplissent le plan.
Si vous placez trois dodécaèdres réguliers l'un à côté de l'autre, ils laissent un petit angle de 12° environ.
La méthode des "domaines postaux" ne marche donc pas ici.

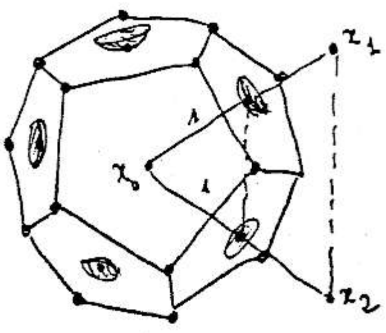


Fig. 30 : les dodécaèdres !

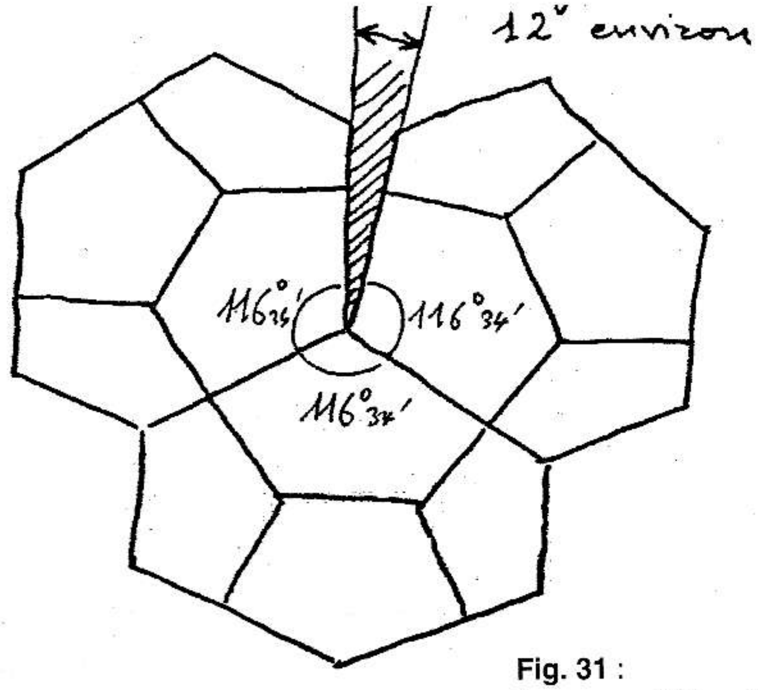


Fig. 31 : Il manque 12° environ pour faire 360° !

4ème essai : les triangles de Rogers (1954)

Cette méthode marche très bien pour les tétraèdres. On place des boules de rayon un en chacun des sommets (avec des arêtes plus grandes que un) et on cherche quel est le tétraèdre qui est le mieux rempli par les boules de rayon unité. On trouve assez facilement que c'est le tétraèdre régulier.

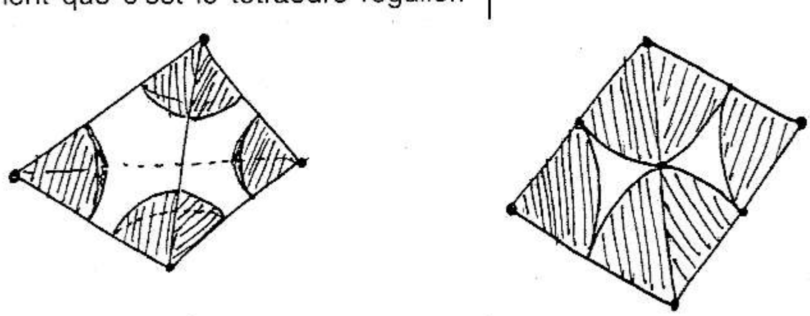


Fig. 32 : C'est trop bon !

Mais malheureusement, les tétraèdres réguliers ne remplissent pas plus l'espace que les dodécaèdres.

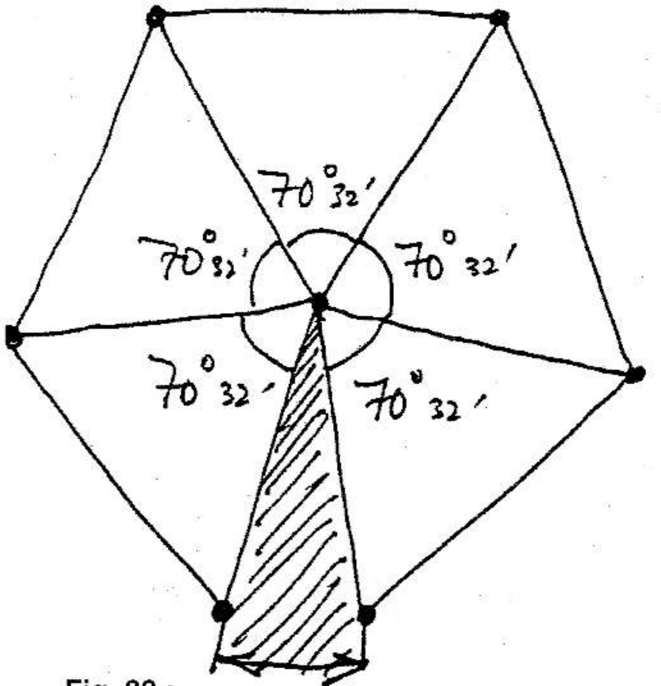


Fig. 33 : On a un creux de 7°20' environ

Ils laissent un creux de 7°20' environ.

Il y a bien le cube qui remplit l'espace mais il fait perdre beaucoup d'espace aux boules.

Hales, pour arriver à sa démonstration, a en fait, fait un mélange entre les domaines postaux et les tétraèdres. Mais pratiquement, pour arriver à ce résultat, il faut faire des calculs sur ordinateur avec 150 à 300 paramètres, 1 000 à 1 500 conditions sous formes d'équations linéaires.
Hales a pour résoudre ce problème utilisé des heures et des heures de calculs d'ordinateurs Cray 4 et 5.

Encore un problème ouvert :
Vous prenez une boule de rayon 5. Combien de boules de rayon 1 pouvez-vous placer à l'intérieur ?
On sait que l'on peut en mettre 67 mais on ne sait pas si l'on peut en mettre plus ! A vous de chercher.

En voici un autre pour amorcer le sujet suivant et qui concerne les radio-transmissions :
Combien de sphère de rayon 1 peut-on mettre dans une sphère de rayon 4 ... en dimension 100 ???

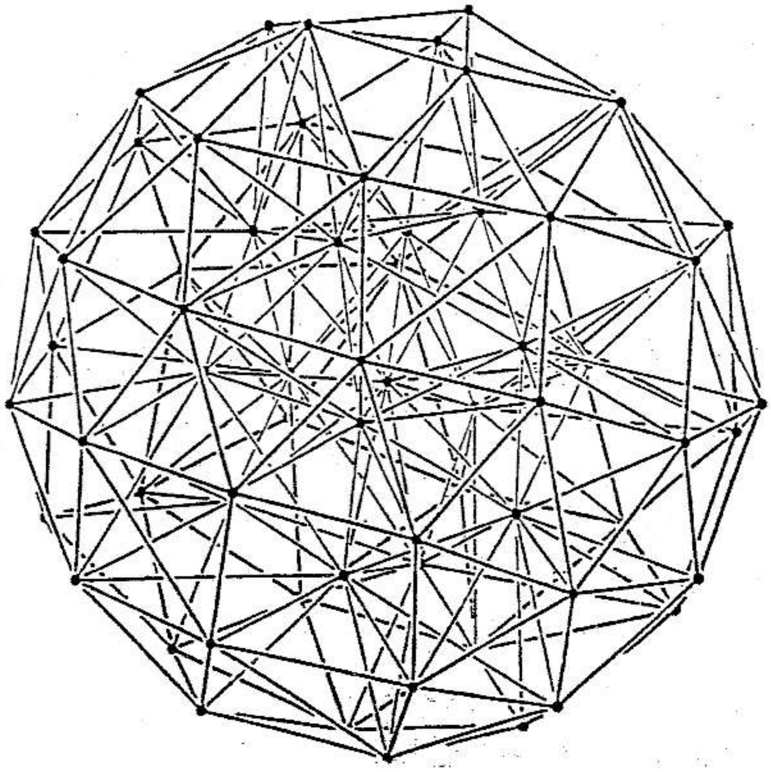


Fig. 34 : Les centres des 67 sphères qui remplissent une boule de rayon 5 fois plus grand. Pour voir la structure, nous avons tracé les lignes entre toute paire de centres distants de moins de 1,4.

Les codes correcteurs d'erreurs

Un sujet qui apparemment n'a aucun lien avec le précédent et qui pourtant lui est intimement associé sans qu'on sache trop pourquoi ! Mais on sait comment !
Il est étroitement lié au problème d'empilement de sphères mais dans des espaces de grandes dimensions.

Qu'est-ce qu'un code correcteur d'erreurs ? A quoi sert-il ?

Pratiquement tout aujourd'hui passe par le numérique et est donc codé et dispose de moyens de détections d'erreurs (à condition qu'il n'y en ait pas trop).
Vous avez des données par exemple celles tapées sur votre ordinateur, ou celles venant d'un satellite ou celles d'un Cédérom ou encore d'un téléphone portable. Ces données sont lues et donc passent par un appareil qui les code.

Où se trouvent les erreurs ?

Dans votre ordinateur, vous tapez vos données, elles sont codées (en code ASCII) puis transmisent (là se trouvent les sources d'erreurs) puis décodées et enfin restituées (par exemple à l'écran).
Un cédé-audio ou un cédérom ou maintenant un DVD peuvent être griffés par votre chat ou une mauvaise manipulation, les informations transmises par GSM ou par satellites peuvent aussi souffrir lors de leur transmission, magnétoscopes et Télévision numérique peuvent aussi être le support d'erreurs, ...

Un exemple : vous tapez sur une touche de votre ordinateur, ça donne à chaque fois une information sous forme d'octet qui est une succession de 8 impulsions électriques sous forme de 0 et de 1.
Par exemple "a" est codé 010100001 "b" est codé 01010010, "c" : 01010011 etc.
Il y a ainsi 2x2x....x2 = 2^8 = 256 codes possibles.

Largement plus qu'il n'en faut pour coder tous les signes de votre clavier et les fonctions qui s'y trouvent.

Malheureusement, chaque "bit" est une source d'erreur, 0 peut être transmis à la place de chaque 1 et inversement. Combien y a-t-il de chance d'avoir des erreurs ? Il n'y en a pas nécessairement beaucoup. Imaginez que vous ayez une erreur sur un milliard de codes. L'ordinateur des années 95 avait déjà une vitesse de 25 mégahertz, soit 25 millions d'opérations élémentaires par seconde. Cela fait 90 erreurs par erreurs !

Il faut donc imaginer un système qui corrige les erreurs. Il ne s'agit pas seulement de les détecter ! Si vous avez un Macintosh ou un PC qui affiche une petite bombe ... 90 fois par heure, vous ne pourrez pas faire grand-chose avec votre ordinateur !

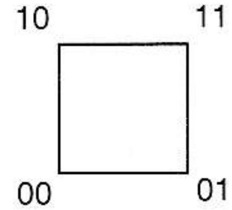
Comment corriger les erreurs ?

Voici les cas les plus simples.
L'idée de base est très simple : elle est basée sur la redondance de l'information. On envoie plus de bits que celles qui sont nécessaires mais cela de façon astucieuse pour que s'il n'y a pas trop d'erreurs et si l'information est différente à l'arrivée, je saurai le reconnaître.
Par exemple je veux envoyer un seul bit, et pour cela je triple l'information. Par exemple, au lieu d'envoyer 0 j'envoie 000, au lieu d'envoyer 1, j'envoie 111.Cela demande plus de

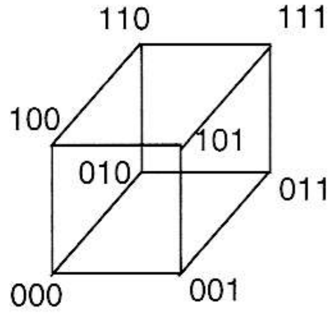
temps mais à raison de 25 millions de calculs par seconde, cela ne se voit pas tellement.

Si j'ai fait une erreur de transmission, il est facile de la voir. A l'arrivée, toute information de la forme 100, 010 ou 001 sera corrigée en 000 ; de même 011, 101 ou 110 sera corrigée en 111. Le problème est quand même que le triplement de l'information rend la transmission très lourde et peu performante.

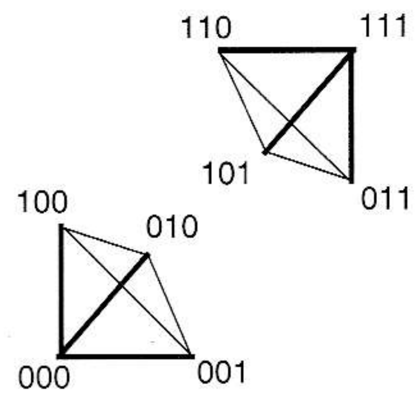
Il existe heureusement des systèmes que l'on appelle codes correcteurs d'erreurs qui sont beaucoup plus performants et qui datent de Shannon en 1940.
Malheureusement, la construction explicite de ces codes est une affaire beaucoup plus complexe. Heureusement, on peut en donner une illustration géométrique.
Envoyer des 0 et des 1 trois fois se représente visuellement avec des cubes ou des polyèdres.
0 et 1 peuvent coder les deux extrémités d'un segment : 0 •-------•1
Si j'envoie 00, 01, 10, 11, j'ai codé les sommets d'un carré :



Si j'envoie 3 bits, 000, 001, 010, ..., 111 j'envoie les codes des sommets d'un cube.



Si j'envoie plus de bits, on se trouve dans des espaces de dimensions supérieures. Par exemple avec 4 bits, on aura l'hypercube, cube à 4 dimensions, avec ses 16 sommets.
Sur le cube en trois dimensions, on voit apparaître la méthode de codage. J'ai placé les deux codes extrêmes 000 et 111 aux deux sommets opposés du cube. J'ai ainsi partagé le cube en deux parties : la partie qui a pour sommet 000 et qui comporte au plus un 1 et la partie de sommet 111 qui comprend au moins deux 1.



En dimension 4, on place 0000 et 1111 aux sommets opposés du Cube(4D) et on partitionne ce cube en étoiles. Un bon code en dimension n sera obtenu sur Cube(nD) en choisissant une disposition de sommets dont les étoiles ne se rencontrent pas 2 à 2. C'est un peu comme si l'on voulait empiler des disques sur une sphère de dimension n.

Avec plus de bits, on peut faire de même dans des espaces supérieurs. Mais ici plus je prends de bits, moins j'aurai besoin de rajouter d'informations et plus je pourrai corriger d'erreurs !
Et ceci parce que dans les espaces de plus grandes dimensions, la sphère, c'est-à-dire l'ensemble des nombres dont la somme des carrés est plus

petite que un a un volume de plus en plus petit et même un volume qui tend très vite vers zéro.

Quel est le volume d'une sphère?
En dimension 2, le disque a pour surface $\pi.R^2$ soit 3,14, pour la sphère le volume est $4.\pi R^3$ soit 4,188.
En dimension supérieure, les formules donnent le tableau ci-contre.
On pense que, pareil au cube, le volume de la sphère croit de plus en plus vite.
C'est exactement le contraire, le volume de la sphère décroit de façon plus qu'exponentielle.
En dimension 100 on est très en deçà de la taille des atomes ! $2 \cdot 10^{-40}$!

Pour les probabilistes, prenez 100 nombres au hasard entre -1 et 1. La probabilité pour que la somme de leurs carrés soit inférieure à 1 est de $2 \cdot 10^{-40}$.

Dimension	Volume boule unité
2	3,14
3	4,188
4	4,93
5	5,263
6	5,1677
7	4,724
8	4,0587
9	3,298
10	2,550
11	1,884
14	0,56
16	0,235
18	0,08
20	0,02
100	$2 \cdot 10^{-40}$
?	?

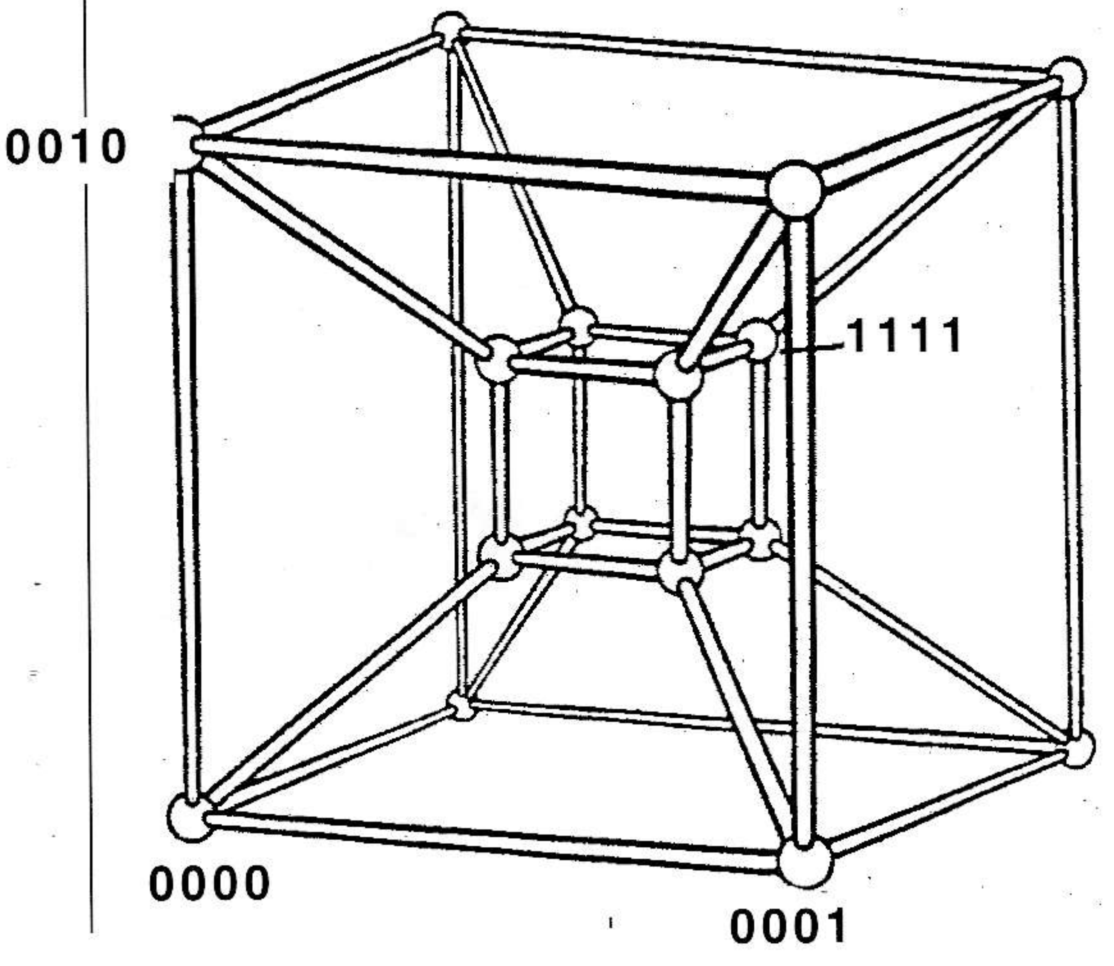


Fig. 35 : Codage de l'hypercube

Le premier code correcteur d'erreurs est dû à Hamming en 1950. C'est un code qui corrige une erreur en remplaçant 4 bits par 7. On ne double donc même pas la longueur.

Ce code consiste à faire simplement un test de parité en faisant la somme pour les coordonnées. En dimension 3, il fait 3 tests de parité à 3 groupes différents "demi-octets" (cf. tableau).

Position 1234 567	**Valeur décimale**
0000 000	0
1101 001	1
0101 010	2
1000 011	3
1001 100	4
0100 110	5
1100 110	6
0001 111	7
1110 000	8
0011 001	9
1011 010	10
0110 011	11
0111 100	12
1010 101	13
0010 110	14
1111 111	15

Code de Hammings pour R = 3

Hamming a dit "ce qui est important dans les calculs, ce n'est pas les chiffres mais la vision qu'on en a" ("What is important in computation is insight, not numbers").

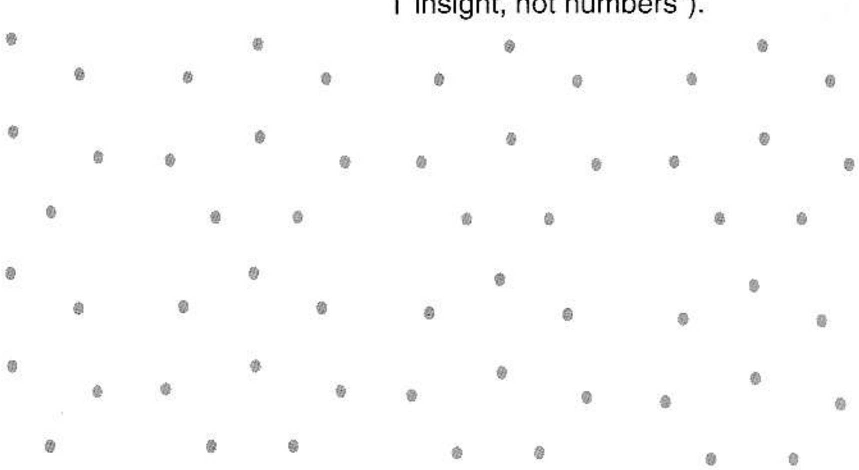


Fig. 36 : le code de Hamming comme code parfait

Les codes correcteurs d'erreurs ont été utilisés pour la première fois avec les sondes Mariners 6 et 7 envoyées pour photographier Mars en 1969.

Comme la distance Mars-Terre est très grande, lorsque le satellite envoie ses signaux, ils sont tellement faibles qu'on ne sait même pas si c'est 0 ou 1 que l'on reçoit.

Une photographie, c'est 5 millions de bits, coupés en morceaux et qui nous parvenait très correctement grâce aux codes correcteurs d'erreurs.

Le code utilisé était le code de Golay, inventé en 1954.

On prend 12 bits, et on en rajoute 11 soigneusement associés pour que l'on puisse corriger 3 erreurs.

Il existe de nombreux codes correcteurs d'erreurs. les chercheurs en mathématiques appliquées y consacrent beaucoup de leurs travaux.

Ainsi, pour les CD audio, vous n'entendrez pas les rayures comme on pouvait le faire sur nos vieux disques "noirs". Les codes correcteurs d'erreurs travaillent ici sur des paquets de 6 bits.

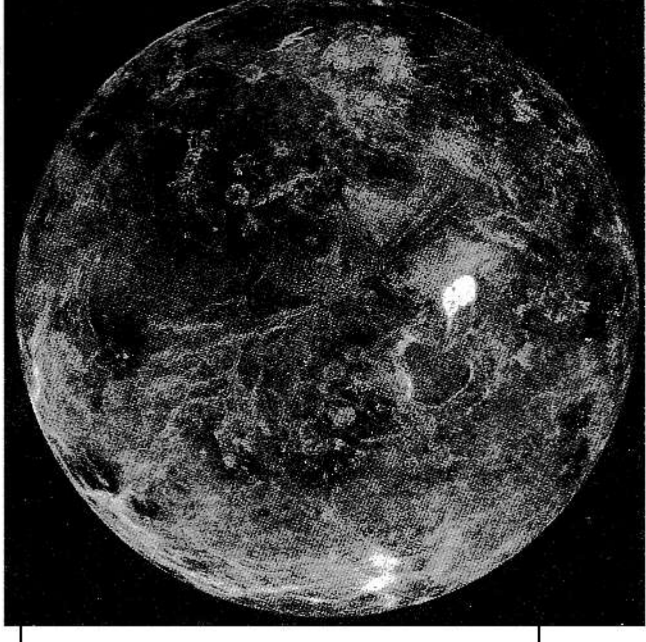


Fig 37 : photo de Vénus

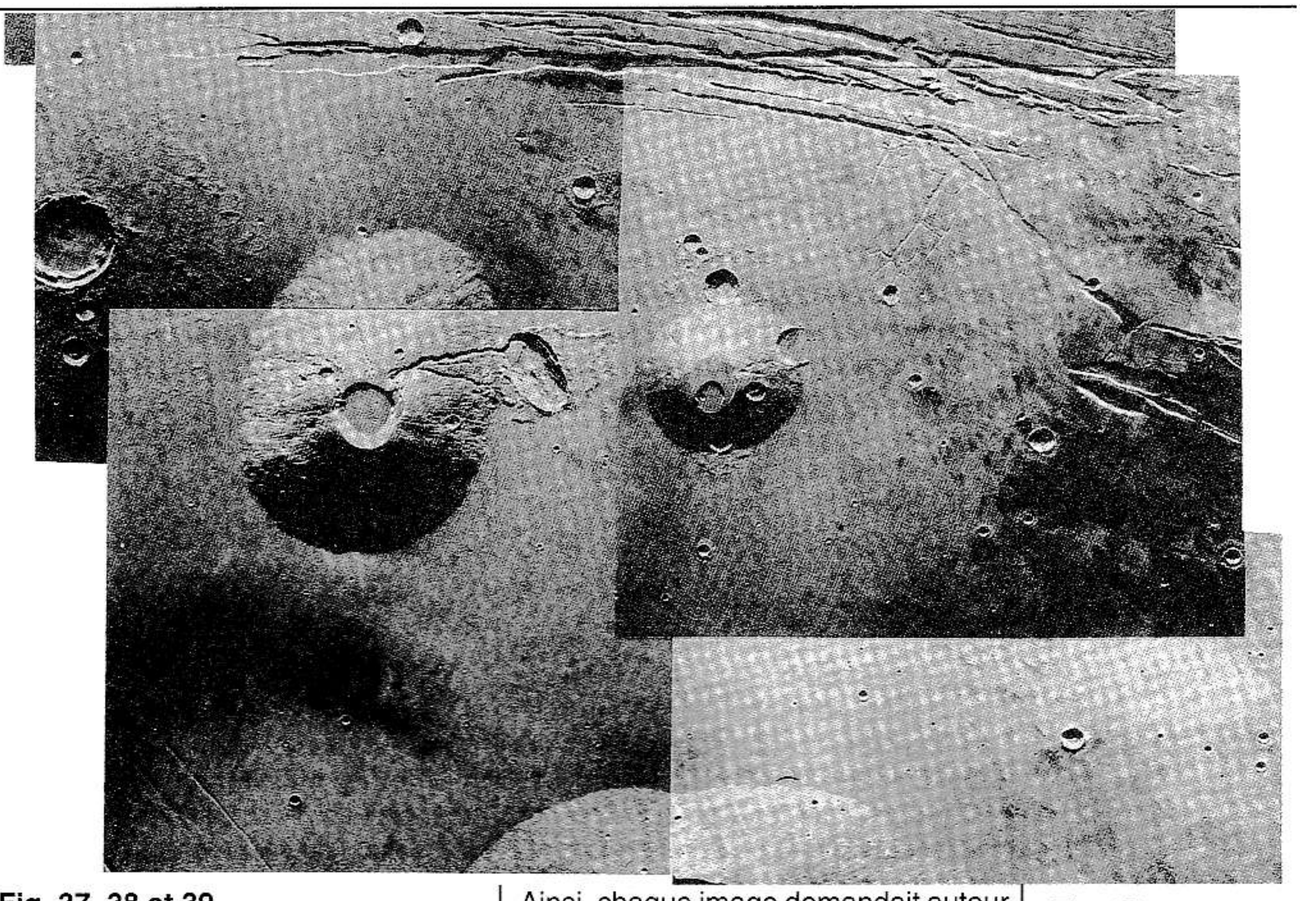
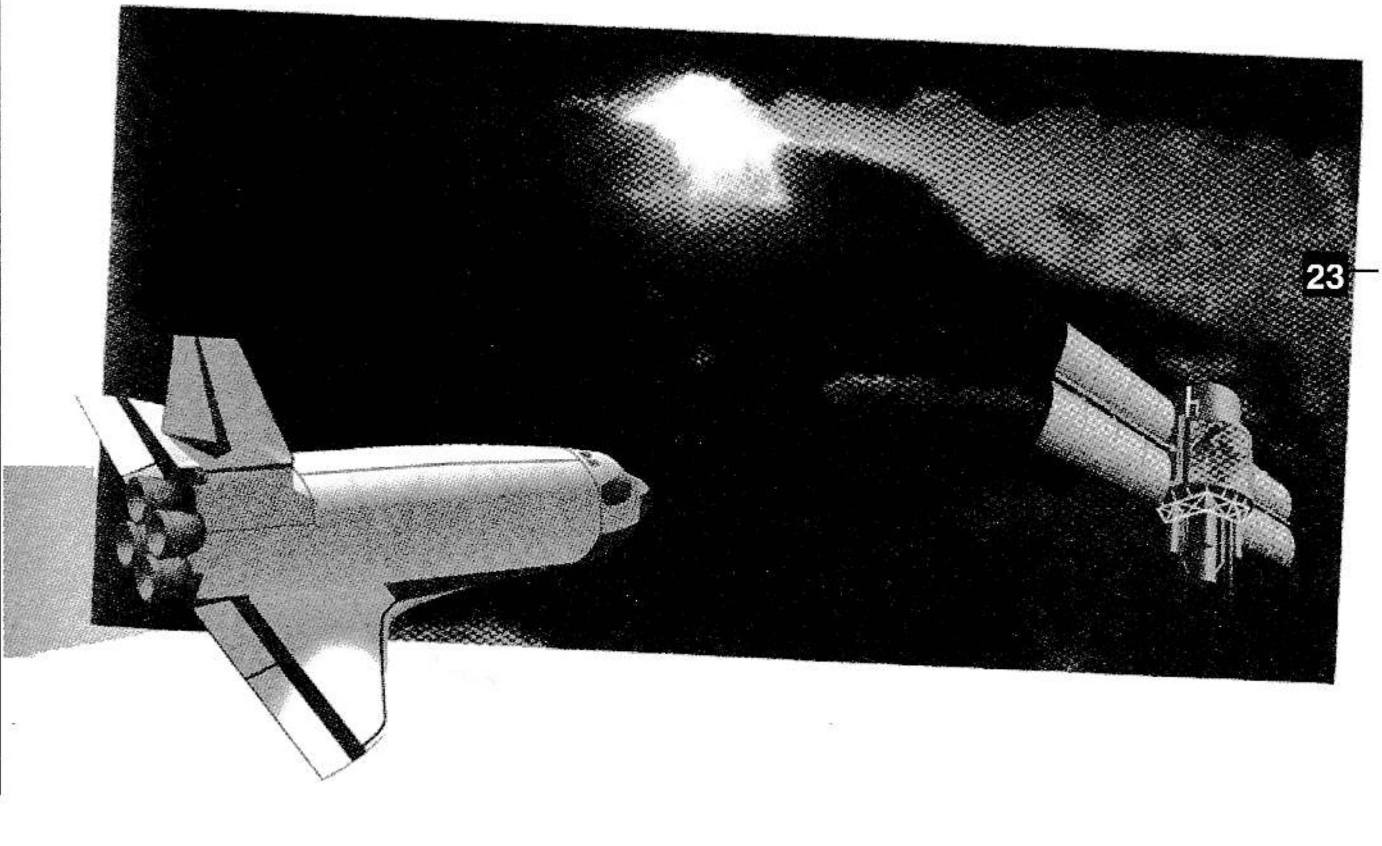


Fig. 37, 38 et 39
En 1969, les satellites Mariner 6 et 7 ont envoyé plus de 200 photographies de Mars.
Chaque photographie était divisée en 658.240 points et, à chaque point était attachée un niveau de brillance codé entre 1 et 28.

Ainsi, chaque image demandait autour de 5 millions d'informations unités (bits). Ces bits étaient codés, en utilisant un code auto correcteur, et transmis sur la Terre à la vitesse de 16.200 bits par seconde. Elles étaient ensuite réceptionnées, décodées, corrigées et transformées en image photographique.

Fig. 38 :
photos de Mars



En grandes dimensions, Elkies et Shiod ont trouvé en 1990 des codes très performants. Pour les diophantiens, mentionnons qu'il y a un lien entre les codes d'Elkies-Shiod et le théorème de Wiles-Fermat.
Ce sont les cubiques du plan. Les courbes les plus simples du plan sont les coniques, les ellipses, les hyperboles, les paraboles et ensuite on trouve les cubiques.
On peut avec les cubiques résoudre de très beaux problèmes de points qui s'alignent, de tangentes. Et c'est en étudiant ces configurations sur les cubiques, de façon bien sûr un peu plus compliqué, on trouve des codes détecteurs d'erreurs très performants et à démontrer le théorème de Fermat.

En dimension 24, en utilisant le code de Golay, on peut fabriquer un empilement de sphères extrêmement dense et à fabriquer un "kissing number" très large.
En dimension 4, on ne sait pas si l'on peut mettre plus de 24 sphères.
En dimension 8 on sait qu'on peut mettre 240 sphères (n'oubliez pas que leur volume diminue) et en dimension 24 on peut en mettre près de ... 200 000 !

Il se peut, grâce au kissing number, que l'on puisse démontrer que les meilleurs empilements que l'on connaîsse sont en dimension 8 et 24 ! Sans que l'on sache pourquoi.

C'est le mystère de la dimension 24 !!! ■

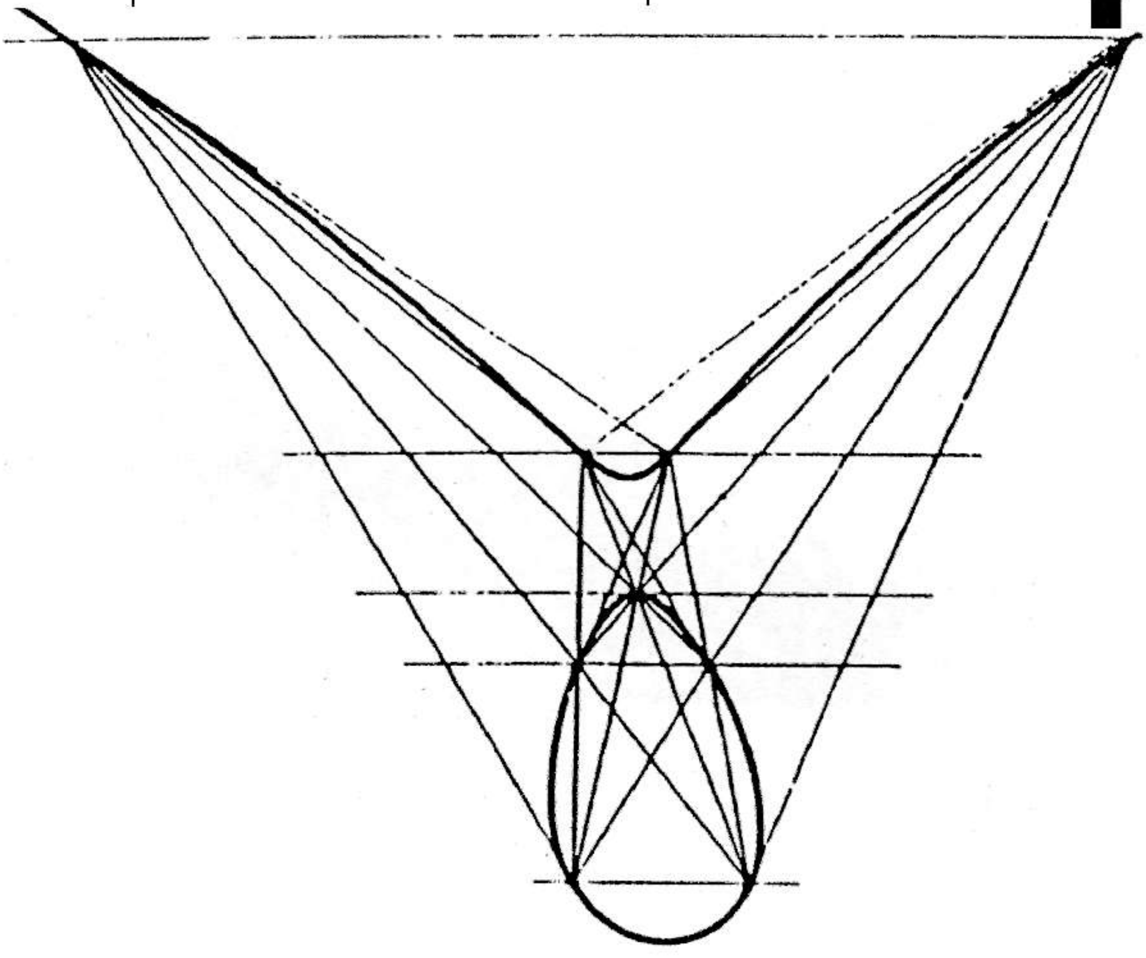
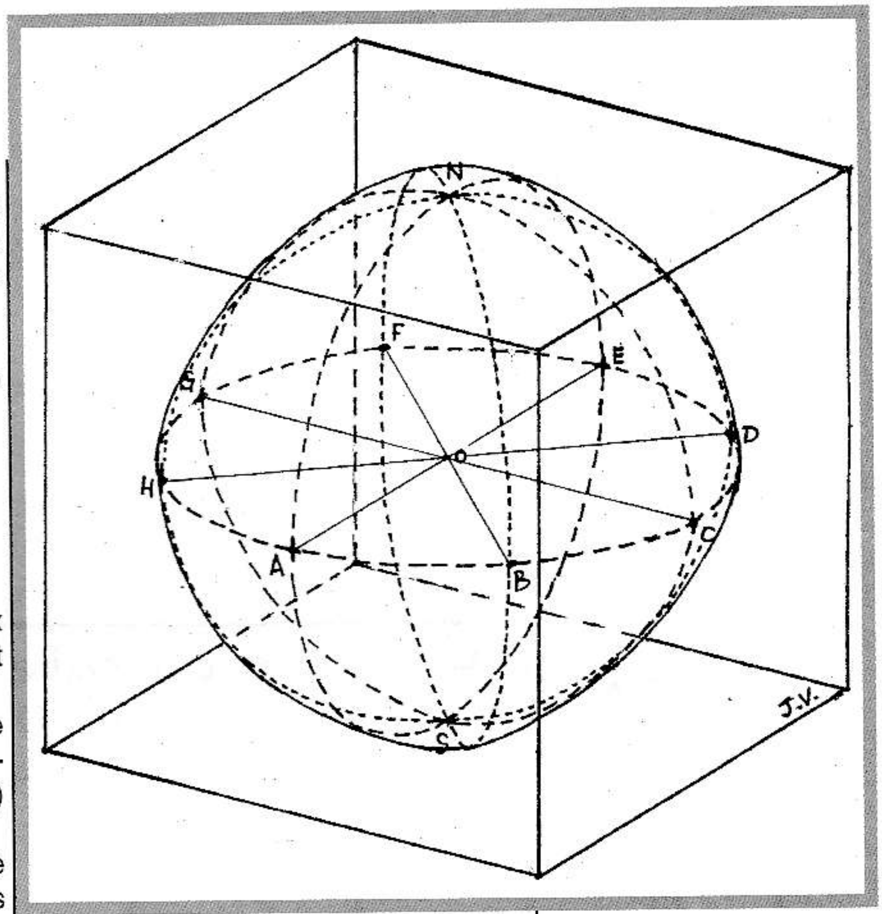


Fig. 40 : courbe d'équation y2 = $(x - a^p).(x - b^p).(x - c^p)$

Sphère en perspective !

Jacques Verdier - Nançy



Le Petit Vert, bulletin de la régionale Apmep de Lorraine, nous apporte régulièrement de petites perles mathématiques.
En voici une étonnante :
Sauriez-vous dessiner une sphère en perspective ?

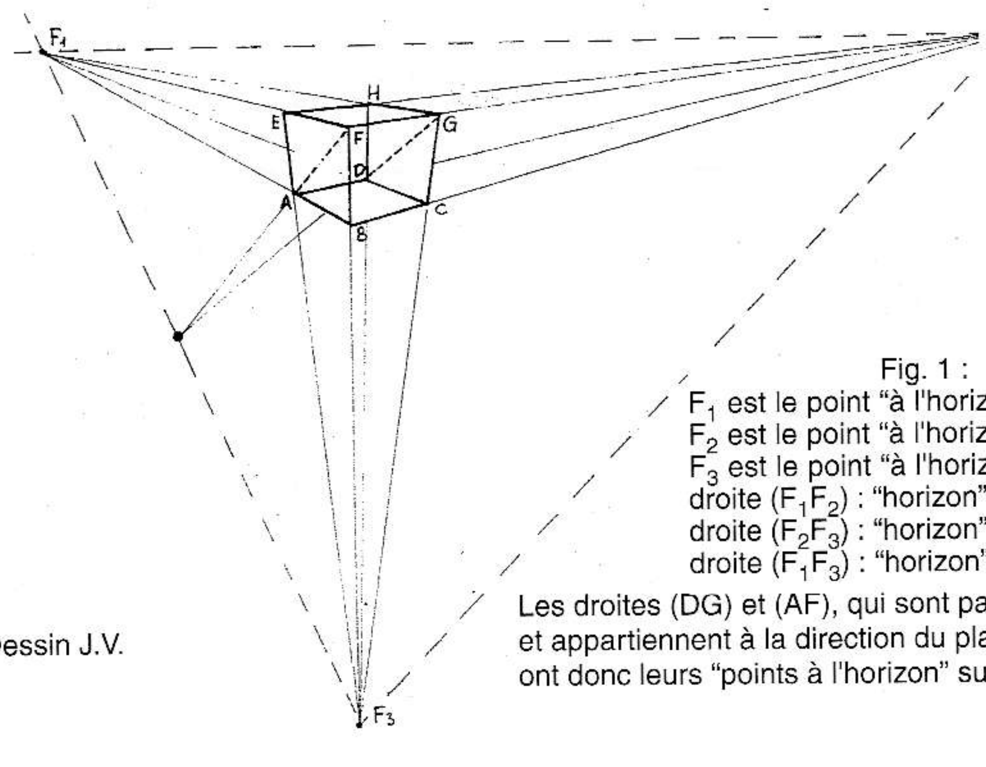
Le cube en perspective

On utilise couramment deux types de perspective qui correspondent à deux types de projection :

• L'une appelée "perspective à points de fuite", est mathématiquement une projection centrale (ou projection conique) de l'espace sur un plan.

Elle est assez proche de la vision de l'œil, mais a de gros inconvénients "pédagogiques" : elle ne conserve ni le parallélisme, ni les milieux ; son emploi en classe est donc quasiment impossible.

Voici, ci-dessous, un cube en perspective conique. On trouvera dans [Lombard], pages 59 à 104, une étude théorique assez complète.



Dessin J.V.

Fig. 1 :
F_1 est le point "à l'horizon" dans la direction de (BA)
F_2 est le point "à l'horizon" dans la direction de (BC)
F_3 est le point "à l'horizon" dans la direction de (BF)
droite (F_1F_2) : "horizon" de la direction de plan (BAC)
droite (F_2F_3) : "horizon" de la direction de plan (BCF)
droite (F_1F_3) : "horizon" de la direction de plan (BFA)

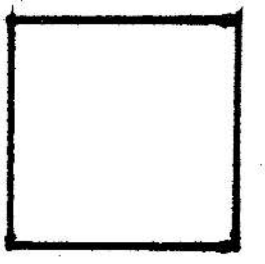
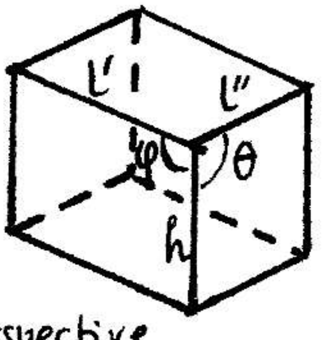
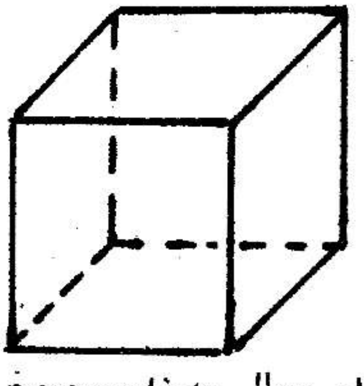
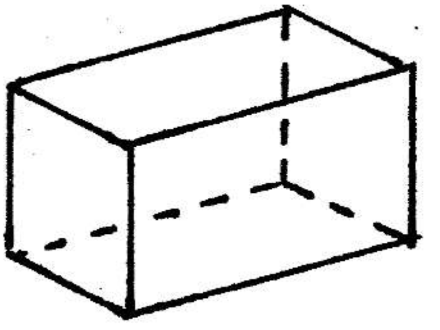
Les droites (DG) et (AF), qui sont parallèles en réalité, et appartiennent à la direction du plan (BFA), ont donc leurs "points à l'horizon" sur (F_1F_3).

• Le second type correspond mathématiquement à une projection parallèle (ou projection cylindrique) de l'espace sur un plan.
Elle correspond à l'ombre d'un objet éclairé par le Soleil.
Énorme avantage : elle conserve le parallélisme et les milieux (et, par conséquent, les rapports de longueurs dans une direction donnée).

Pour représenter ce qui peut “arriver” quand on utilise une telle perspective, le plus facile est de représenter la projection d'un cube de référence (ce qui équivaut à un triplet i, j, k orthonormé) sur le plan.

Plusieurs cas sont alors à envisager (cf. [Parzysz]) :
- ou bien la direction de projection est orthogonale au plan de projection (ex : projection verticale sur le plan horizontal), ou bien elle ne l'est pas !
- d'autre part, ou bien le cube de référence a une de ses faces parallèle au plan de projection (cette face sera donc projetée “en vraie grandeur”), ou bien ça n'est pas le cas !

Ce qui nous amène à quatre possibilités, résumées dans ce tableau (D est la direction de projection, P le plan sur lequel on projette) :

CUBE	Une face du cube est parallèle à $\mathcal{P}$	Aucune face du cube n'est parallèle à $\mathcal{P}$
D orthogonal à $\mathcal{P}$	 ("vue" du dessin industriel)	 (perspective axonométrique)
D non-orthogonal à $\mathcal{P}$	 (perspective "cavalière")	 (cas général)

Dans la perspective axonométrique (D orthogonal à P), la connaissance de h et des angles f et Ω détermine entièrement l' et l" (les "formules" sont assez complexes, on les trouve dans [Audibert] pages 118 à 125 ou dans [Mosaïques mathématiques].

En classe, on utilise le plus souvent soit la perspective cavalière, soit une perspective parallèle quelconque (en s'arrangeant pour "qu'à l'œil", le cube ressemble effectivement à un cube, contrairement au schéma ci-contre).

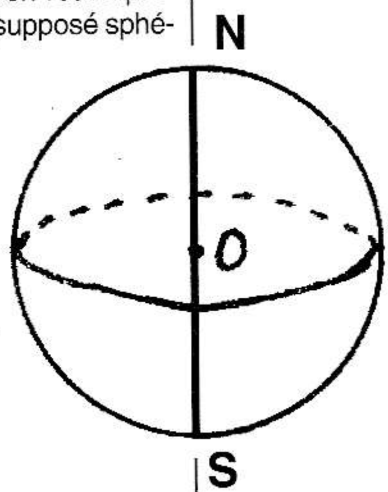
Et la sphère ?

Tout d'abord, le distinguo "faces parallèles ou non à P" n'a plus lieu d'être : il existe toujours un plan équatorial parallèle à P.
Mais restent les deux cas :
- D perpendiculaire à P ou non !

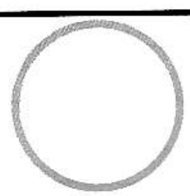
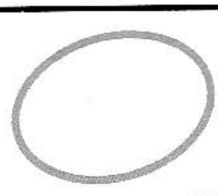
vouloir mettre ensemble un cube **et** une sphère (ou d'autres objets du même type) : voir dessin page 25.

Où placer les pôles sur le globe terrestre ?

J'en viens à une erreur fréquemment rencontrée : si on veut représenter le globe terrestre (supposé sphérique) avec ses deux pôles et son équateur, on obtient le plus souvent ceci :



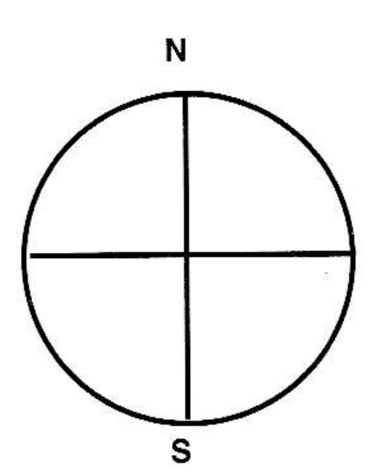
Il y a là une ... contradiction ! Trouvez-la.

D orthogonal à P		La sphère se projette suivant un cercle
D non-orthogonal à P		La sphère se projette suivant une ellipse (Ex : ombre du ballon au soleil)

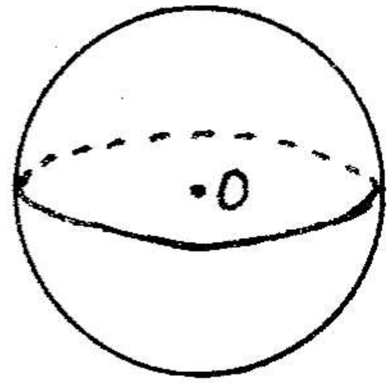
Pédagogiquement, vu la difficulté de tracer les ellipses (sauf sur ordinateur), on sera amené à se placer le plus souvent dans le premier cas.

Mais on aboutit alors à **un paradoxe** : on n'utilise pas en classe le même type de perspective selon que l'on veut dessiner des corps "ronds" (sphères, cônes, œufs ...) ou des corps "droits" (pavés, tétraèdres, prismes, ...).
Le comble de la difficulté consistant à

En effet : la figure tracée étant un cercle (et non une ellipse), on est dans le cas où la projection est orthogonale.
Si l'axe (NS) est vu comme un diamètre, c'est qu'il est parallèle au plan de projection ; comme le plan de l'équateur lui est orthogonal, il est orthogonal au plan de projection.
Et on devrait avoir ceci :



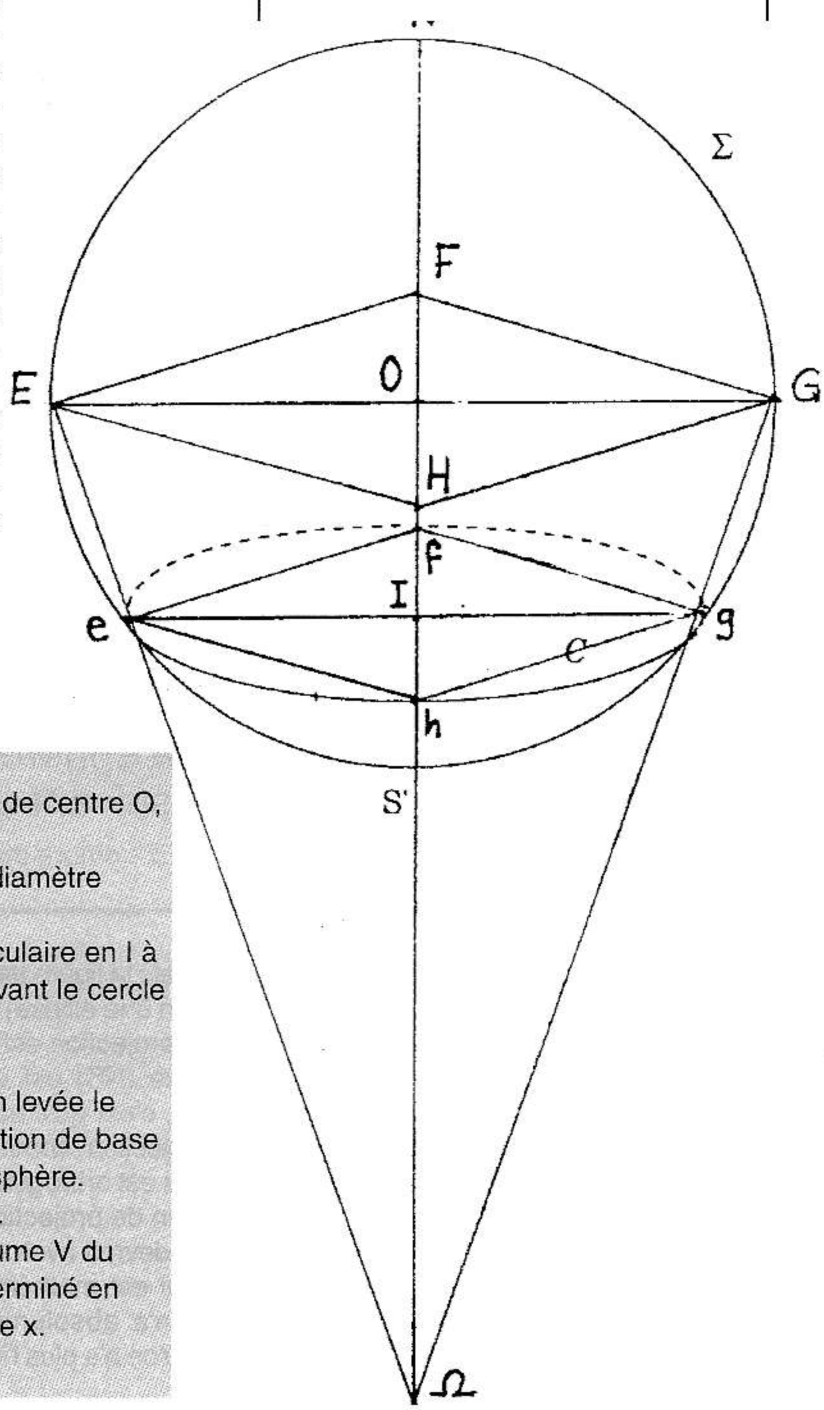
Ce qui est mathématiquement exact, mais n'a absolument aucun intérêt, puisqu'on n'a plus l'impression du relief.



Si on veut conserver la configuration ci-contre, on ne sait plus où placer les pôles (en tout cas pas sur les bords !).

Peut-on les placer correctement ?

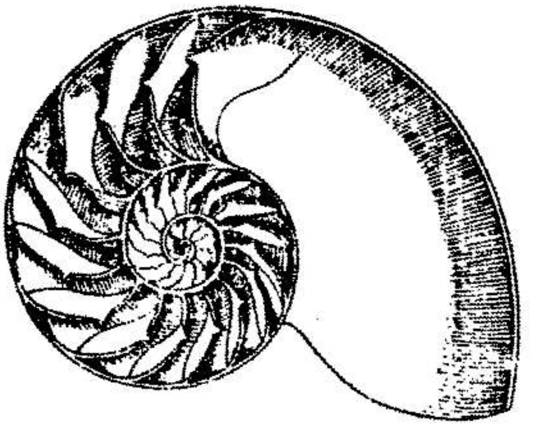
La réponse à cette question est bien sûr OUI !!!
Je prends comme support, pour l'expliquer, une fiche de l'excellente brochure IREM que je recommande vivement à tous (aux professeurs de première pour l'utiliser en classe, aux autres pour "s'amuser" un peu après les cours à quelques exercices de perspective). Mais malheureusement, cette erreur y a été commise (sûrement involontairement!) dans la fiche n°S17 :



Fiche :
Σ est une sphère de centre O, de rayon R.
I est un point du diamètre [NS].
Le plan perpendiculaire en I à (NS) coupe Σ suivant le cercle C de rayon r.

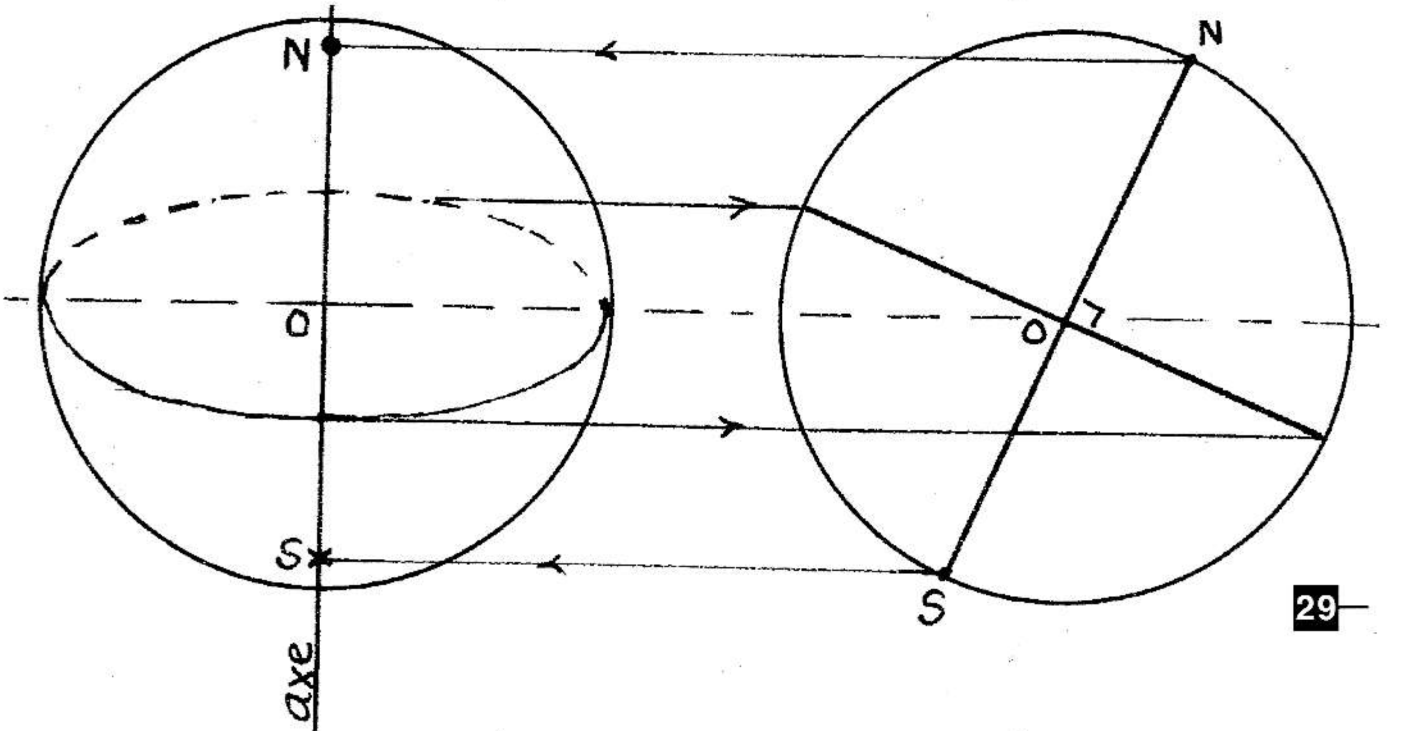
1• Dessine à main levée le cylindre de révolution de base C inscrit dans la sphère.
2• on pose OI = x.
a) Exprime le volume V du cylindre ainsi déterminé en fonction de R et de x.
etc.

Le cercle (C) tracé est un "parallèle" (en langage géographique) ; il est donc image de l'équateur dans une homothétie dont le centre Ω est situé sur l'axe des pôles.



En projection (donc sur le dessin), cette homothétie se conserve, ce qui permet de déterminer les points E, F, G et H (aux quatre "coins" de l'équateur !).

Attention : I étant le centre de l'ellipse, les extrémités **e** et **g** du grand axe ne se trouvent pas sur le contour apparent (représenté ici par le cercle Σ) : **e** et **g** sont sur le "méridien 90°" (en admettant que la sphère soit vue face au "méridien 0°").



Imaginons maintenant la vue de côté de cette sphère (c'est-à-dire avec l'œil à l'infini sur (EG)).

Le pôle Nord est visible, le pôle Sud est caché. Et la partie du "méridien 90°" situé dans l'hémisphère Nord est visible, alors que sa partie située dans l'hémisphère Sud est cachée.

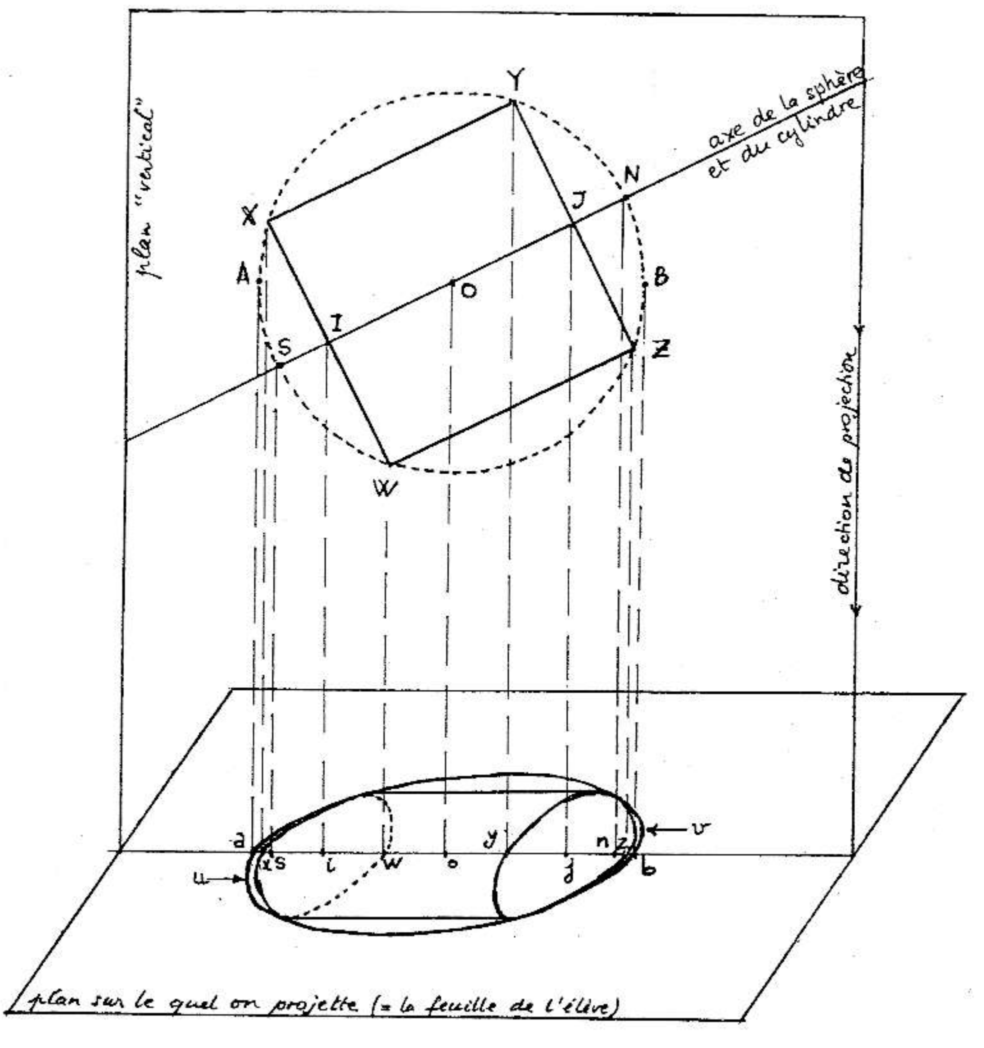
Sur la page suivante, j'ai essayé de représenter une vision de l'espace de l'exercice proposé sur cette fiche (on demande à l'élève de tracer le cylindre de base (C) inscrit dans la sphère (Σ)). La feuille de papier de l'élève est donc représentée en bas, horizontalement (mais vue en perspective cavalière) ; au dessus, j'ai représenté la coupe de l'en-

semble sphère/cylindre par le plan de projection contenant l'axe des pôles.
Avec la convention de notation suivante :

- majuscules pour les points de l'espace,
- minuscules pour les points du plan où on projette.

Attention : je n'ai pas représenté le solide sphère/cylindre, et le cercle en pointillés **n'est pas** le contour externe de la sphère dans l'espace (voir figure page 25).

Le problème pédagogique reste entier : que faire avec les élèves ???
Au premier cycle, comme au cours de géographie, je pense qu'il n'y pas à hésiter : utilisez cette perspective "erronée", mais si pratique !!
En première, par contre, je pense que l'on peut faire prendre conscience aux élèves de cette erreur de représentation, et les amener à la construction exacte des pôles à partir de l'équateur représenté par une ellipse.
Cet exercice constitue un "véritable" problème de géométrie dans l'espace.



Petite bibliographie

[Audibert], Gérard :
la perspective cavalière
Publication Apmep n° 75 (1990)

[IREM] de Lorraine :
Géométrie dans l'espace
Classes de première (76 fiches)

[Lombard], Philippe :
Géométrie élémentaire
Calcul vectoriel (tome I - 1985)
Ed : Irem de Lorraine)

[Mosaïque Mathématique]
Collectif (cf. bon de commande ci-joint)
Catalogue d'accompagnement de l'expo Maths 2ooo.

[Parzysz], Bernard : **La perspective : cavalière ou parallèle ?**
Article du Plot n° 57 (1991)

Quelques représentations dans l'espace

Les élèves ont certaines difficultés pour représenter correctement les solides de l'espace.

Leurs professeurs pensent que les élèves ne "voient" pas dans l'espace, et ne peuvent donc pas "ponctuer" les représentations.

Je pense, au contraire, que lorsque la ponctuation est mise on peut mieux se représenter un objet.

Voici (fig. 1) l'exemple d'un solide dessiné sur un cahier d'élève.

Le même dessin, ponctué d'une autre façon (fig. 2) semble être vu sous un autre angle.

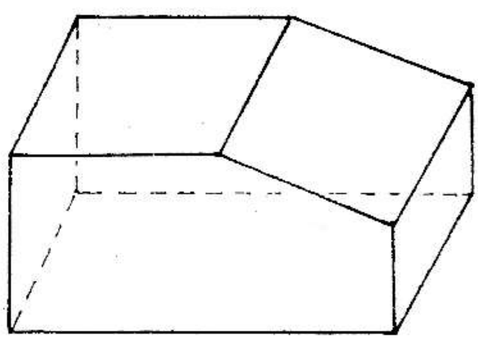


fig 1

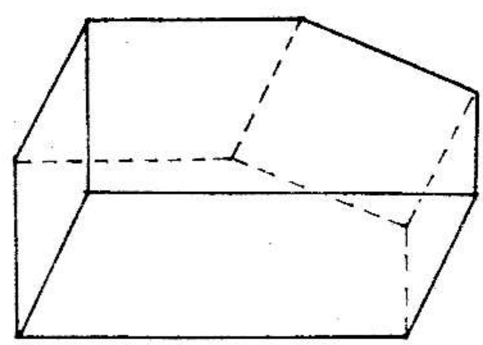


fig 2

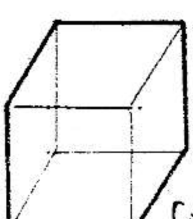


fig 3

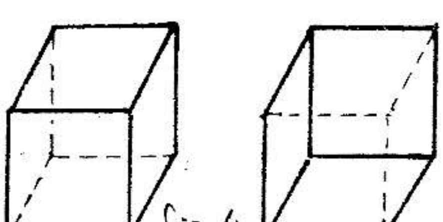


fig 4

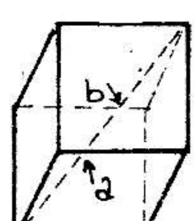


fig 5

Quelques règles très simples sont applicables dans tous les cas :

- Le contour apparent est toujours vu en entier (fig. 1, 2 et 3).

- Si un sommet n'appartient pas au contour apparent, toutes les arêtes qui en partent sont soit vues, soit cachées (fig. 1, 2, 4).

- Si, sur le dessin, deux droites se coupent, mais que leur point d'intersection n'est qu'un point de concours apparent (c'est-à-dire que les droites ne sont pas sécantes dans l'espace) : si une droite est vue, l'autre est alors cachée (fig. 5, point a).

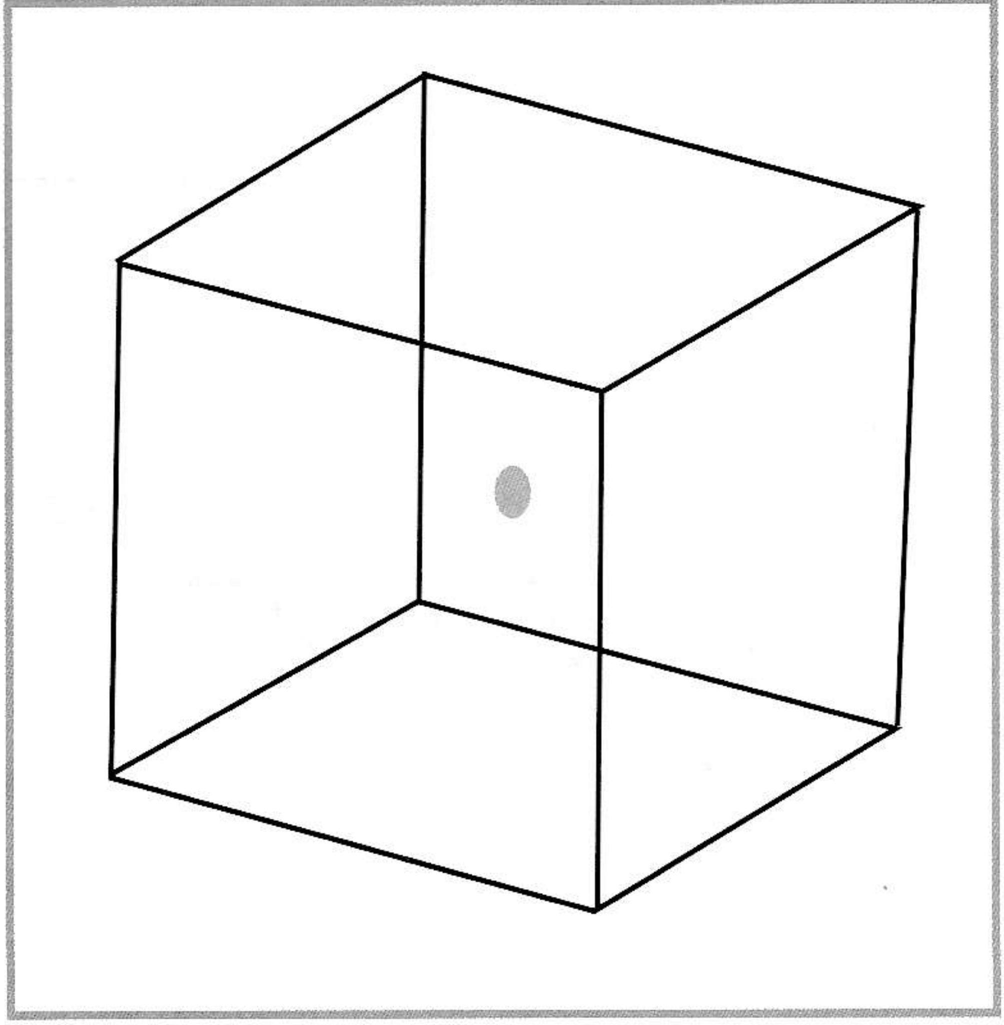
Attention : les droites peuvent être cachées toutes les deux (Fig. 5, point b).

Problème final
(Vu dans l'exposition "Maths 2ooo")

Imaginez que le dessin ci-dessous représente un cube dont toutes les faces sont en plexiglas transparent.
On ne voit et on n'a représenté que les arêtes de ce cube.

Un trou a été fait au milieu de l'une des faces de ce cube. Pouvez-vous nous dire quelle est cette face ?
Combien y a-t-il de réponse possible ?
D'autres façons de voir un cube !

Dans quelle face est le trou ?



Babylone et les mathématiques

Livia Giacardi - Turin

À l'occasion de la présentation de l'exposition "Le ciel de Babylone" à ... Bagdad, nous avons voulu faire un retour sur les premières mathématiques. Un article de Livia Giacardi paru dans les actes de l'Université d'été de la commission inter-irem épistémologie à Toulouse en 1986 nous le permet ici.

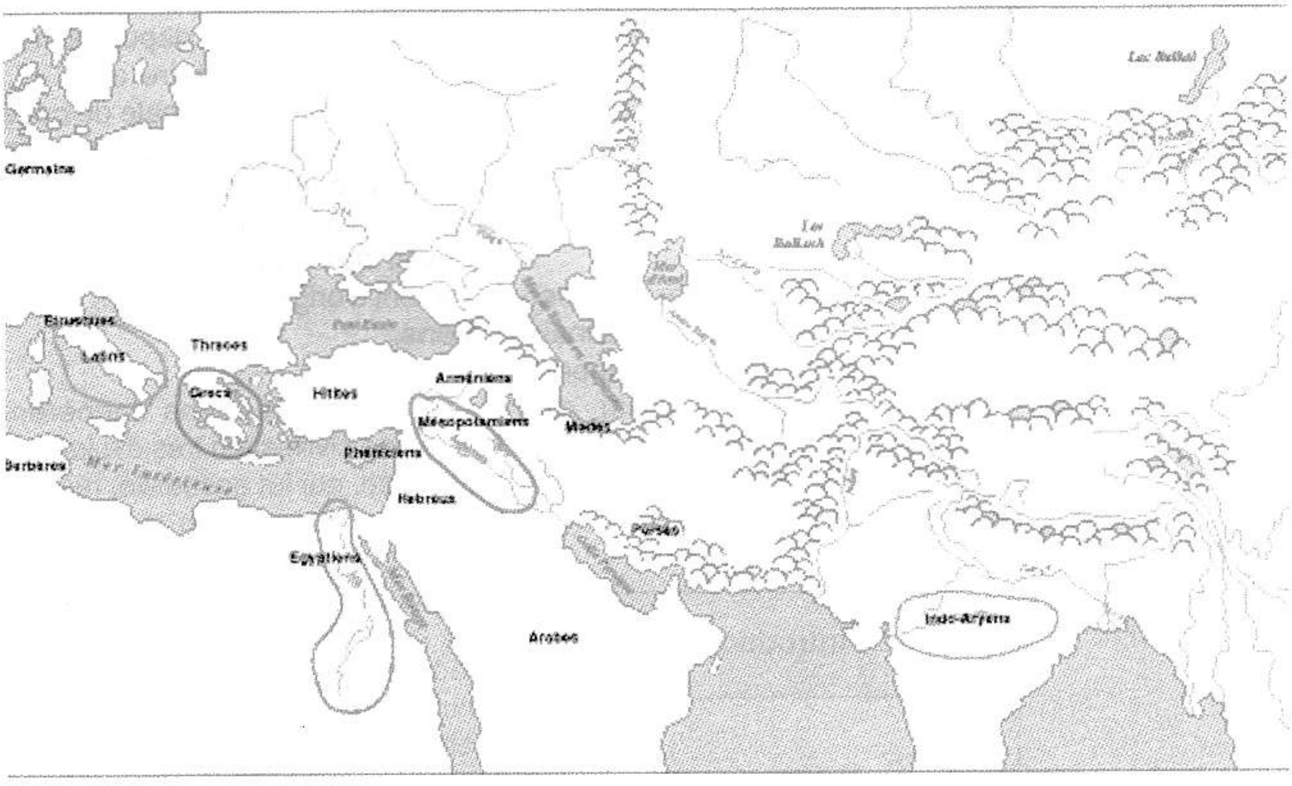


Fig. I
--- Sumer et Akkad
et extension du Premier Empire Babylonien

Les études sur les mathématiques babyloniennes sont très nombreuses.
Jorän Friberg a récemment édité un volume de plus de cent pages sur la bibliographie consacrée à ces mathématiques (1).

Outre l'aspect strictement mathématique, l'examen de textes babyloniens comporte d'autres problèmes, qui sont surtout d'ordre philologique, de datation, d'interprétation et d'emplacement dans le domaine plus vaste de la culture mésopotamienne.
Pour avoir une vision complète, il faudrait donc aussi prendre en considération ces aspects culturels qui, bien qu'en marge des mathématiques, interfèrent sous certains aspects avec : celle-ci et parfois la déterminent comme par exemple, l'art, l'astronomie, l'urbanisme et la technique.
Compte tenu du temps dont nous disposons, je me limiterai à traiter

(1) Friberg J. : À survey of publications on Sumero-Akkadian mathematic, metrology and related matters (1854-1952), Chalmers University of Technology and University of Göteborg, Sweden, 1982.

rapidement certains facteurs géographiques et historiques qui ont joué un rôle important quant au développement et aux caractéristiques des mathématiques babyloniennes. J'examinerai ensuite certains textes dont je ferai un commentaire et donnerai une interprétation.

Je chercherai, de plus, à mettre en évidence, à travers ces textes, les caractéristiques de la mathématique mésopotamienne en m'arrêtant plus particulièrement sur l'algèbre.

J'espère, ainsi, donner aux personnes qui me lisent une connaissance de base sur ces mathématiques et fournir aussi des arguments didactiques et des suggestions pour une éventuelle application interdisciplinaire.

Introduction

La fertilité du terrain fut l'un des principaux facteurs qui favorisèrent la naissance de communautés stables et, par conséquent, la formation d'une civilisation. Ce n'est pas un hasard si les plus grandes civilisations du passé se sont développées dans les vallées du Nil, du Tigre et de l'Euphrate ainsi que de l'Indus où le débordement naturel des fleuves déposait chaque année une nouvelle couche de terrain fertile.

Les caractéristiques du milieu ambiant de la plaine située entre le Tigre et l'Euphrate et appelée Mésopotamie (étymologiquement : pays entre les fleuves) (cf. fig. ci-contre) eurent certainement une forte influence dans la formation de la civilisation mésopotamienne.

L'origine des Sumériens, qui furent parmi les premiers habitants de la Mésopotamie, est encore aujourd'hui un problème à résoudre. Ils s'étaient installés, depuis la moitié du IVème millénaire av. J.-C., dans la partie méridionale de cette région appelée ensuite **Babylonie,** alors que dans la partie septentrionale, appelée plus tard **Assyrie,** il y avait des communautés probablement d'origine sémite : les **Akkadiens.**

Les Sumériens donnèrent vie à une civilisation très évoluée et élaborée, qui fut accueillie, réinterprétée et enrichie par les peuples qui se succédèrent au pouvoir dans cette région.
Ce phénomène nous permet de déceler un processus historique plutôt homogène qui peut, dans l'ensemble, être indiqué comme civilisation mésopotamienne.
Chacun des peuples qui se succédèrent au pouvoir en Mésopotamie tenta de réaliser un empire solide et unifié mais sans jamais obtenir un résultat définitif. Ce fait est dû à l'emplacement géographique de la région, ouverte dans toute direction et donc continuellement exposée aux invasions.
La superposition des peuples et les contacts entre gens de différentes races favorisèrent le développement d'une civilisation plus vive que celle de l'Egypte, moins monolithique mais plus articulée et plus riche de curiosités scientifiques et

d'intérêts techniques.

La puissance sumérienne survécut, malgré la parenthèse de la domination akkadienne (2.400-2.150 av. J.-C.), jusqu'en 1850 environ, lorsque les invasions des peuples pour la plupart d'origine sémite, en déterminèrent la crise et ensuite la ruine.

Durant le IVéme millénaire, les Sumériens élaborèrent une écriture rudimentaire. Cette écriture fut peu à peu perfectionnée jusqu'à subir en 2.500 av. J.-C. un processus de simplification et d'abstraction qui eut une certaine importance pour l'élaboration du système de numération sexagésimale en usage dans la mathématique suméro-babylonienne.

Vers 1 700 av. J.-C., Hammourabi, souverain de Babylone, parvint à étendre son contrôle sur toute la Mésopotamie et fonda ainsi le premier empire babylonien.
Son règne fut caractérisé par un programme grandiose d'œuvres publiques, par une administration correcte de la justice et, par conséquent, par un épanouissement culturel et scientifique remarquable. Des écoles pour l'éducation des fonctionnaires d'état furent fondées en annexe des temples : l'énorme importance donnée à la géométrie, à l'arithmétique et à l'algèbre, ainsi que les surprenants résultats obtenus, sont la conséquence directe des nouvelles exigences culturelles et sociales.
Presque tous les textes mathématiques que nous examinerons appartiennent à L'ancien Âge Babylonien, c'est-à-dire à la période entre

Fig. 2 :
vue rapprochée

1900 et 1660 av. J.-C..

A cette époque, de plus, la nécessité de matières premières dont la Mésopotamie était dépourvue, pierres, bois, métaux et le perfectionnement des moyens de transports favorisèrent la création de voies de communication commerciale (cf. Fig. 2) entre cette région et L'iran actuel, L'asie Mineure, la Syrie, l'Egypte et l'Inde. La circulation s'effectuait par mer, par fleuve ou sur les nombreux canaux existants. Les contacts commerciaux favorisèrent certainement des échanges culturels entre les différentes civilisations, échanges qui ont aussi une importance considérable pour l'Histoire des Mathématiques.
Le déclin de l'empire babylonien commença après le règne d'Ham-

mourabi soit à cause des luttes internes soit sous les pressions externes des Hittites d'abord et des Kassites ensuite.

La fin du IIème millénaire voit le début de la domination des Assyriens. Ceux-ci fondèrent un empire très vaste qui durera jusqu'en 612 av. J.-C.

Les tablettes

Les tablettes avec les inscriptions cunéiformes sont la source la plus directe où nous pouvons puiser nos connaissances sur la civilisation mésopotanienne.
G.F. Grotefend commença le déchiffrement de l'écriture cunéiforme au début du XIXème sibcle et suggéra une clé de lecture qui fut perfectionnée par H.C. Rawlinson en 1847.

Les tablettes ayant un contenu mathématique sont environ au nombre de 300 : certaines remontent à la période sumérienne (3000-2100 av. J.-C.), un groupe plus consistant appartient à la période qui va de l'époque d'Hammourabi jusqu'en 1500 av. J.-C. et d'autres encore, plutôt à caractére astronomique, remontent à l'époque séleucide (environ 311- 50 av. J.-C.).

Les études de ces tablettes sont principalement dues à 0. Neugebauer, F. Thureau-Dangin et E.M. Bruins.

Elles peuvent être essentiellement divisées en deux groupes :

- tables de calcul et
- textes de problèmes.

Les premiéres avaient certainement une fonction pratique : ce sorrt en effet des tables de multiplication et de division à l'intérieur du système sexagésimal, des listes de mesures qui comprerment les passages d1une unité d'ordre inférieur à une unité d'ordre supérieur et vice-versa.

Les textes de problèmes sont des listes d'exercices de mathématiques avec ou sans solution. Il nous semble opportun de remarquer que les solutions se réfèrent toujours à un cas particulier, sans jamais généraliser en effet, il n'y a aucune formule, aucun théorème, aucune démonstration. Toutefois les Babyloniens connaissaient de nombreuses régles générales, comme nous pourrons le constater en examinant les textes.

Caractéristiques des mathématiques babyloniennes

Les historiens ont souvent affirmé que les mathématiques suméro-babyloniennes sont essentiellement pratiques : cette affirmation n'est que partiellement exacte et mérite d'être précisée.
Les mathématiques, auprès des peuples mésopotamiens, ne furent certainement pas conçues comme une activité spéculative et abstraite, avec des exigences de logique et de rigueur.
Au contraire, elles furent un produit social, né des besoins d'une société en expansion continuelle.

Les Babyloniens n'avaient pas d'idéal démonstratif analogue à celui des Grecs ; la raison de ce fait se trouve dans le contexte dans lequel se développa la science mathématique.
A l'origine c'était un instrument de connaissance et de pouvoir. Elle est née et s'est développée dans les temples comme moyen indispensable pour l 'administration de la ville (construction d'édifices et de canaux, perception d'impôts, division des héritages, calcul des intéréts, etc.), pour le compte du temps et pour régler les activités agricoles et commerciales (v. Fig. 3, à, 5).

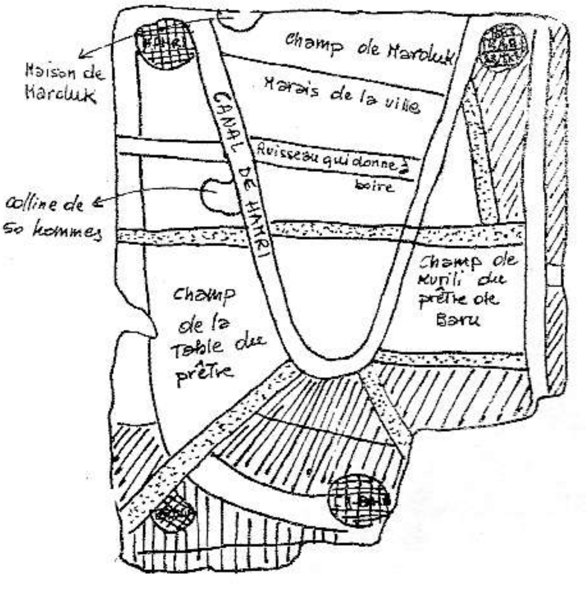


Fig. 3 :
les travaux pour l'irrigation en Mésopotamie étaient imposants.
Cette carte des champs et des canaux prés de Nippur, tirée d'une tablette qui date approximativement de 1300 av. J.-C. nous en donne une impressionnante démonstration car elle témoigne d'une technique hydraulique et agricole très évoluée.

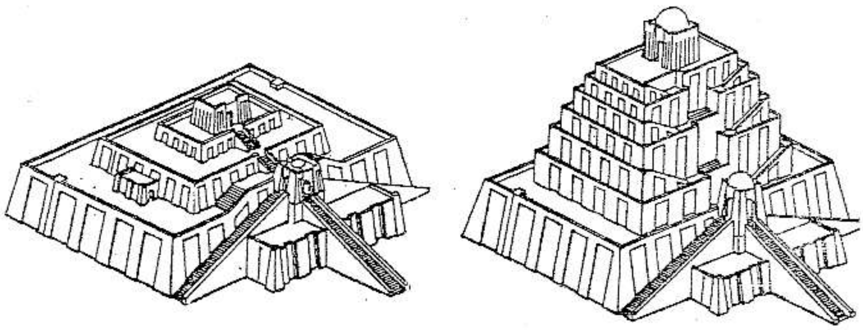


Fig. 4 :
Ziggourat de la ville de Ur en deux époques successives.
Les Ziggourats, les éléments peut-être les plus caractéristiques de l'architecture babylonienne, sont des tours à 3, 4, 5 étages ou plus, hautes de 50 à 90 m. Leur but était probablement de faciliter la descente du dieu parmi les hommes durant les cérémonies religieuses.

reproduite sur la figure. Sur la tablette est gravée le plan d'une construction ; sur les côtés sont sculptées en relief une baguette recourbée et une règle graduée. Vraisemblablement le dessin se réfère à une construction projetée par Gudea et il est probable que ce dessin soit aussi la représentation.

Un autre aspect, qui a joué un rôle non secondaire, est la numérologie.

Les textes mathématiques qui nous sont parvenus ont surtout un but pédagogique : ils servent à former les futurs fonctionnaires de l'état.

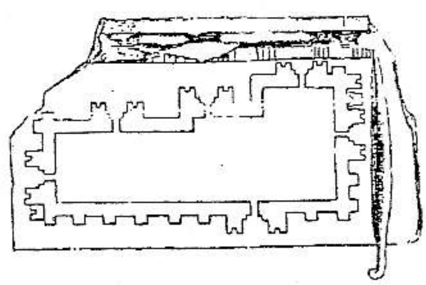
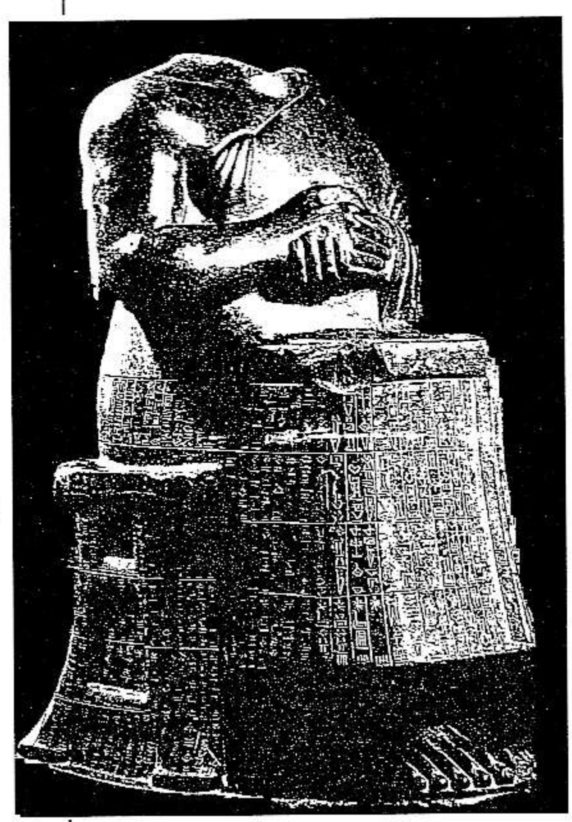


fig. 5



Statue de Gudea qui se trouve au Musée du Louvre, connue comme L'architecte au plan (2.000 av. J.-C.). Sur la statue est indiquée l'unité de mesure de l'époque, la coudée sumérienne (49,5 cm) et sur les genoux du roi se trouve la tablette

Dans une telle sorte de transmission des connaissances, qui a des fins politiques de pouvoir, le secret et le ritualisme tendent à prévaloir sur la libre discussion. (cf. Guillemot & Plane : l'algèbre au fil des ages. Irem de Toulouse p 274 à 279).

En outre les Babyloniens ne faisaient pas de nette différence entre les trois branches des mathématiques : arithmétique, algèbre et géométrie, même si certains textes nous font penser le contraire comme par exemple la tablette BM 13901 que nous examinerons ensuite.

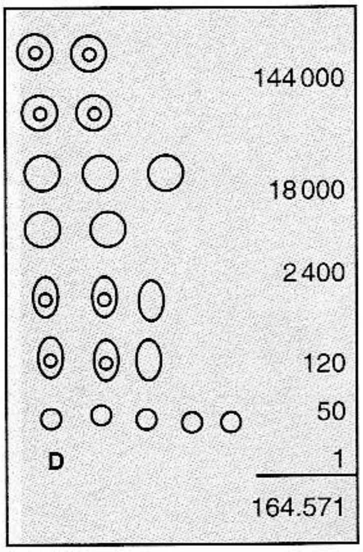
Malgré tout, il me semble opportun de donner les précisions suivantes :

- la présentation concrète des problèmes est due, le plus souvent, à la fonction didactique de ces textes,

- le classement des problèmes selon le type de solution dénote une certaine conscience de la généralité,

- très souvent, des problèmes qui semblent, lors d'une première lecture, inspirés de situations pratiques, comprennent des données qui n'auraient aucune utilisation dans la vie réelle. Ce fait peut indiquer tout autant un aspect ludique qu'un intérêt théorique.

À mon avis, et en examinant les textes nous pourrons le vérifier, de nombreux résultats des mathématique babylonienne ont une portée théorique, même s'il n'existe ni le symbolisme, ni la démonstration des théorèmes, ni la justification théorique des procédés de résolution utilisés.



L'arithmétique babylonienne

L'évolution du système de numérotation et de l'arithmétique babylonienne est étroitement liée à celle de l'écriture. A partir du IVe millénaire av. J.-C., les Sumériens inventèrent une forme rudimentaire d'écriture qui, à travers les siècles, se transforma de simple pictographie, perfectionnée ensuite par le phonétisme, en un système purement abstrait.

Durant l'époque paléosumérienne le système de numération était sexagésimal fondé sur un compromis entre les bases 10 et 6. Les symboles employés étaient les suivants :

D ges : 1 **O** u : 10

D ges (ta) : 60

Ð ges-u : 600 (60 x 10)

O sar : 3600 (60^2)

⊙ sar-u : 36000(60^2x10).

Ils étaient obtenus en imprimant dans l'argile une canne petite pour les unités et les dizaines ou grande pour les soixantaines, tenue obliquement ou verticalement.

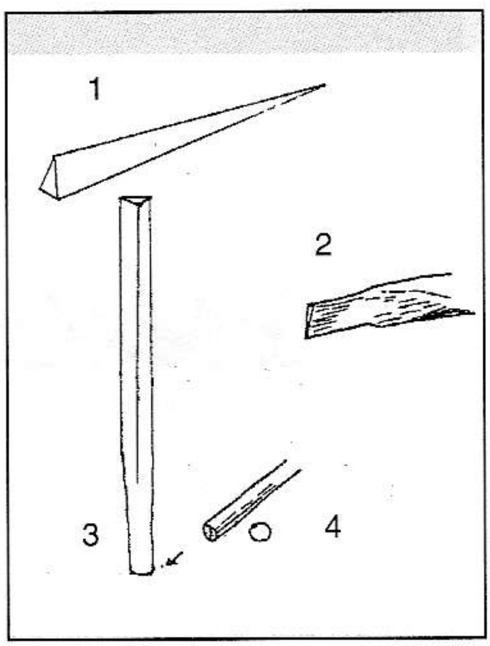
Le système de numérotation était additif -. un nombre très élevé de signes était donc nécessaire pour représenter certains nombres il fallait, par exemple utiliser 28 signes pour écrire 3 599.

Vérifiez que l'écriture en marge est bien celle du nombre 164.571, comme il apparaît sur une tablette de 2 650 av. J.-C.

Durant l'époque archaïque, il y avait une différence essentielle entre la façon de tracer les signes de L'écriture sumérienne et celle de tracer les symboles numériques. Dès le début les derniers étaient obtenus par impression, alors que les signes de l'écriture étaient incisés.

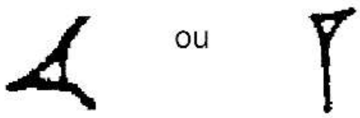
Vers 2 700 on passa de l'écriture par incision sur l'argile à celle par impression au moyen d'une petite canne taillée de façon à présenter en section un triangle isocèle

Fig. 6 Reconstitution de calames pour l'écriture cunéiforme



1- Les calames, en roseau ou en bois, matières périssables, ne se sont pas conservés. Il nous faut les reconstituer. Leur forme a pu changer au cours du temps, et selon les graphies utilisées.
2- Calames à bout triangulaire pour former des coins sur l'argile fraîche.
3- Roseau à bout creusé en forme de clou, permettant son impression dans l'argile.
4- Bout rond pour imprimer les chiffres de l'époque archaïque.

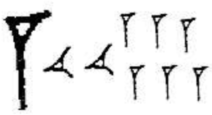
Selon la façon dont elle était saisie on obtenait les signes :



C'est-à-dire les caractères dits cunéiformes.

Évidemment, de cette façon, le dessin des objets perdit son instantanéité et apparut d'une manière géométrique et schématique.

Après l'apparition de 1'écriture cunéiforme, les chiffres sumériens prirent un aspect différent, mais la structure mathématique du système ne fut pas modifiée, comme on peut le voir dans l'exemple suivant, tiré d'une tablette de 2000 av. J.-C. :

 = 60 + 20 +6 = 86,

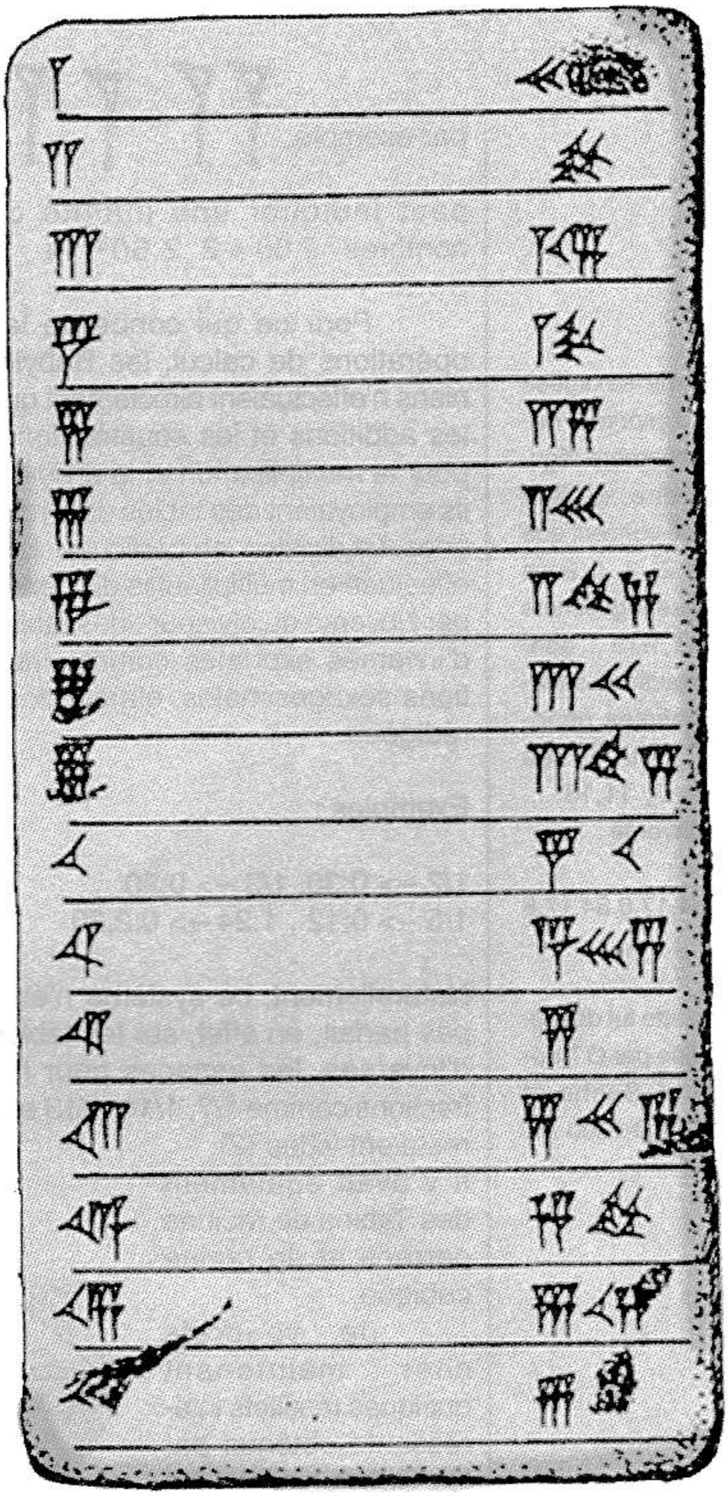
où le symbole indique 60, indique 10, indique 1.

Le système de numération sexagésimale de position parut chez les mathématiciens et les astronomes babyloniens probablement au début du IIè millénaire av. J.-C.
Ce système n'utilise que deux signes (et non 59 comme on pourrait s'y attendre) : le symbole unité **T** et le symbole pour indiquer la dizaine.

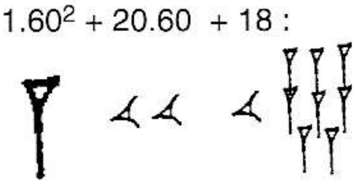
Les nombres de 1 à 59 étaient écrits de façon additive ; pour les nombres à partir de 60, on employait le système de position.

Exemple : 

42 :



$4818 = 1.60^2 + 20.60 + 18$:



L'absence d'un symbole pour le zéro et pour la virgule donnait lieu à une certaine ambiguïté ;

par exemple, 

peut indiquer une infinité de nombres : $2.60 + 2$, $2.60^2 + 2$ ....

Pour ce qui concerne les opérations de calcul, les Babyloniens n'effectuaient directement que les additions et les soustractions ; pour la multiplication et la division, ils employaient des tables déjà rédigées. La division, en particulier était effectuée en multipliant le dividende par l'inverse du diviseur : des tables d'inverses exprimés comme fractions sexagésimales, étaient donc rédigées.

Exemples :

1/2 --> 0;30, 1/3 --> 0;20 ,
1/5 --> 0;12 , 1:24 --> 0;2,30

Naturellement, ce système n'était pas parfait, en effet, sur les tables d'inverses, les espaces pour les fractions comme 1/7, 1/11, 1/13 etc. restaient vides (2).
Il y avait également des Tables de racines carrées et de racine cubique.

Je voudrais citer maintenant quelques résultats intéressants obtenus par les Babyloniens dans le domaine de l'arithmétique.

La tablette connue sous le nom de Plimpton 322 (3), de la Plimpton Collection de la Columbia University, est un admirable témoignage de leur habilité de calculateurs.

Cette tablette contient une liste bien ordonnée de mesures relatives à 15 triplets pythagoriciens, c'est-à-dire relatives aux longueurs (rationnelles) des côtés a, b et de l'hypoténuse : c d'autant de triangles rectangles.

Plus précisément la tablette Plimpton 322 présente des colonnes de nombres b^2/a^2 , b et c tels que $a^2 + b^2 = c^2$
où a et b sont choisis de telle sorte que leur rapport b/a soit décroissant de la première à la quinzième ligne. Le scribe ne donne pas d'explications. Un approfondissement des problèmes que cette tablette nous pose serait trop long et, en outre, les hypothèses des historiens concernant le procédé utilisé par le scribe pour obtenir les 15 triplets sont très nombreuses.

Les Babyloniens furent aussi très habiles à obtenir **les approximations de certains nombres**.
Pour indications bibliographiques voir (J. Fribey)

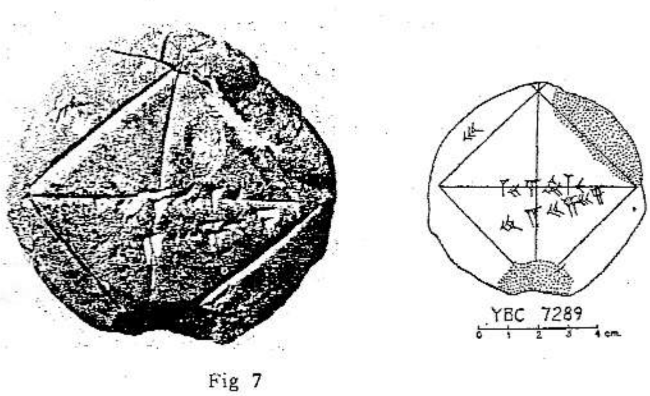


Fig 7

Citons, à titre d'exemple, la tablette YBC 7289 (cf. Neugebauer & Sachs) de la Yale Babylonian Collection de la Yale University, sur laquelle est représenté un carré avec ses deux diagonales tracées

(3) Le système sexagésimal permet d'exprimer l'inverse de tout nombre régulier, c'est-à-dire, de tout nombre qui ne contient que les facteurs 2, 3, 5 avec une fraction sexagésimale finie. 1/7,1/11,1/13 ... donnent lieu à fractions sexagésimales infinies périodiques ; pour les Babyloniens 7, 11,13 .... n'ont pas d'inverse .
Par exemple :
1/7--> 0;8,34,17,8,34,17,8 ......

(4) Cette tablette fut découverte et publiée par O.Neugebauer et A.Sachs et remonte à -1900-1600 av. J.-C..

(fig 7) :
Les données reproduites sur la figure amènent à une approximation très bonne de $\sqrt{2}$,
c'est-à-dire 1 ; 24 ; 51 ; 10 ; qui, en notation décimale correspond à 1,414213 au lieu du nôtre 1,414214 .....

Dans ce cas aussi le procédé qui a amené le scribe à une telle approximation n'est pas indiqué. Ceci est significatif, comme nous l'avons déjà dit plus haut, du fait que le mathématicien babylonien était plus intéressé par les résultats que par les moyens pour les obtenir ou pour les justifier.

Naturellement ceci conduit ceux qui s'intéressent aux mathématiques babyloniennes à avancer des hypothèses pour comprendre les procédés mentaux qui ont amené aux résultats connus dans les tablettes d'argile.

Dans le cas de l'approximation de V2 cité ci-dessus, la méthode suivie par les Babyloniens pourrait être la suivante :
partant de l'identité

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.ab$$

qu'ils connaissaient, pour b petit par rapport à a, nous pouvons écrire :

(1) $\quad (a+b)^2 - a^2 \sim 2.ab$

Posons alors $a + b = \sqrt{2}$
et considérons une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$ soit $a_1 = 1$.

De (1) on déduit :

$$(r_1 =)\ 2\text{-}1 \sim 2b \text{ ou } b \sim 1/2.$$

Nous pouvons donc considérer une seconde approximation, par excès, de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire :

$$a_2 = 1 + 1/2 = 3/2 = 1;\ 30$$

De (1) on a :

$$(r_2 =)\ 2 - 9/4 \sim 3b \text{ ou } b \sim -1/12.$$

Une troisième valeur approchée de $\sqrt{2}$, par excès sera :

$$a_3 = 3/2 - 1/12 = 17/12 = 1\ ;\ 25$$

valeur que l'on trouve dans d'autres tablettes. Procédant comme ci-dessus on obtiendra une quatrième

valeur approchée de $\sqrt{2}$, par défaut,
$a_4 = 577/408 = 1 ; 24,51,10$ ....

qui correspond à la valeur lue sur la tablette. La formule générale d'approximation peut s'exprimer ainsi :

$$a_{n+1} = a_n \pm r_n / 2a_n$$

Il est intéressant de faire à ce sujet la remarque suivante.
Le scribe s'arrêtera à la valeur a_4 peut-être parce qu'elle est la première à ne pas avoir d'expression sexagésimale finie : en effet 408 contient le facteur 17, qui n'est pas diviseur de la base 60 (voir note 3)

Les Babyloniens étaient aussi à même de calculer la somme de progressions aussi bien arithmétiques que géométriques et plus encore ; en effet sur la tablette AO 6484 on peut trouver la recette pour calculer la somme des carrés de 1 à 10. Le texte est le suivant :

Carré depuis 1 fois 1:1
jusqu'au 10 : 1,40.
Comme quoi est le nombre ?
Tu multiplieras 1 par 0,20
(ou un tiers) : 0;20.
Tu multiplieras 10 par 0,40
ou deux tiers : 6;40. 6;40 et 0;20 : 7.
Tu multiplieras 7 par 55 : 6,25.
Le nombre est 6,25 (7)

Le problème n'est donc pas résolu en calculant les carrés successifs et en les additionnant ensuite, mais avec le schéma de calcul suivant :

$$(1.\ 1/3 + 10.2/3)\ .\ 55 = 385$$
$$(= 6.60 + 25)$$

qui correspond à :
$(1/3 + 2n/3)\ .\ n\ (n+1)/2$ pour $n = 10$

et donc à notre formule :

$$\sum_{i=1 \text{ à } n} i^2 = n\ (n+1)\ (2n+1)/6.$$

Cette tablette se trouve au Louvre et remonte à l'époque Séleucide. Pour avoir une notation uniforme nous avons introduit le point virgule dans l'écriture des nombres.

De nombreux historiens ont avancé des hypothèses à propos du procédé par lequel les Babyloniens ont obtenu ce résultat. Nous aimerions citer celle de S.J. Lurje ("Archimedes") parce qu'elle est beaucoup plus simple que les autres et peut-être plus conforme à la mentalité babylonienne.
Cette hypothèse de reconstruction du raisonnement du scribe est la suivante :
Compter, en les associant de façon adéquate, les cubes qui forment une construction dans l'espace (on dirait presque un bâtiment semblable aux Ziggourats typiques de l'architecture babylonienne) formée par un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont n, n, n+1 avec l'adjonction d'un escalier de $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n\ (n+1)/2$ cubes (cf. fig. 8c).

Lurje prend en considération un escalier comme celui de la figure 8a, dont n = 5. La plus haute marche de l'escalier est constituée par un petit cube unitaire, la deuxième marche par 4 petits cubes unitaires, la troisième par 9, la quatrième par 16 et pour finir, la cinquième par 25.

* Le Prisme AO 8862 se trouve au Musée du Louvre, il date de l'époque d'Hemourabi (environ 1 700 av. J.-C.) et contient 8 problèmes. Il fut étudié par O.Neugebauer (1 937) et par F.Thureau-Dangin (1 938).

Kuddouru du Musée du Louvre. In exposition 'Le ciel de Babylone" de Centre•Sciences

Par conséquent, le nombre total des petits cubes qui forment l'escalier est égal à la somme des carrés des nombres de 1 à 5.

En associant trois constructions comme celle qui est décrite, il obtient un parallélépipède rectangle de dimensions n, n, n+l, avec l'adjonction d'un escalier qui, comme on peut voir sur la figure, est la moitié d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont l, n, n+l.

De l'observation d'ensemble de ce solide nous pouvons tirer la formule suivante :

$$3\sum_{i=1 \text{ à } n} i^2 = n.n.(n+l) + n\,(n+l)\,/\,2,$$

dont suit, avec de très simples passages connus par les Babyloniens, le schéma de calcul qu'ils ont utilisé sur la tablette en question.

Les résultats, que nous venons d'examiner, sont certainement remarquables et intéressants,

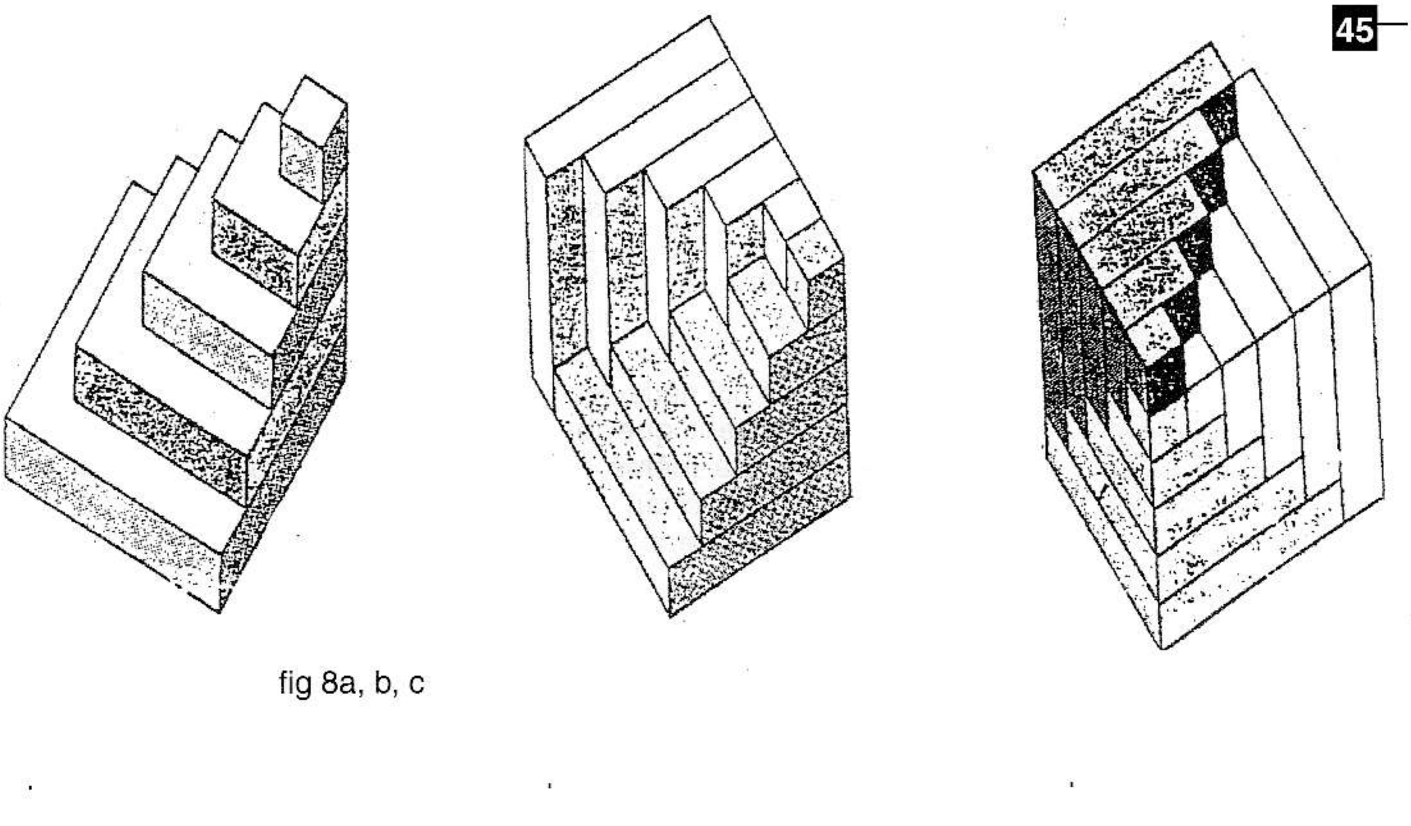


fig 8a, b, c

mais le domaine dans lequel la contribution des Babyloniens fut la plus originale et la plus féconde est celui du calcul algébrique.

Le calcul algébrique

Le symbolisme algébrique, comme nous l'entendons, est totalement absent dans les textes cunéiformes qui nous sont parvenus. Les inconnues du problème sont indiquées par des termes tirés de la géométrie tels longueur **(us)**, largeur **(sag)**, aire **(a-sa)**, volume **(sahar)**.

Ces termes sont, cependant, utilisés de façon tout à fait abstraite; en effet les Babyloniens additionnaient sans aucun scrupule aires et longueurs ou aires et volumes, ils ne se souciaient donc pas du sens géométrique.

Il ne faut pas se laisser détourner par la terminologie géométrique des problèmes parce que les procédés mentaux des Babyloniens étaient essentiellement algébriques et la géométrie n'avait qu'un rôle auxiliaire.

Les tablettes qui nous sont parvenues démontrent que les Babyloniens étaient à même de résoudre des problèmes qui, formulés de façon moderne, correspondent aux différentes sortes d'équations qui suivent :
- équations du premier degré,
- équations du second degré,
- certaines équations du troisième degré,
- équations de degré supérieur, mais qui peuvent être ramenées à celles du second ou du troisième degré.

Les solutions se réfèrent toujours à un cas particulier, on ne généralise jamais : les Babyloniens connaissaient plusieurs règles géniales d'algèbre, mais il n'y a aucune formule, aucun théorème, simplement des recettes de calcul.

Ils appliquaient aussi ce qu'on appelle les identités remarquables :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

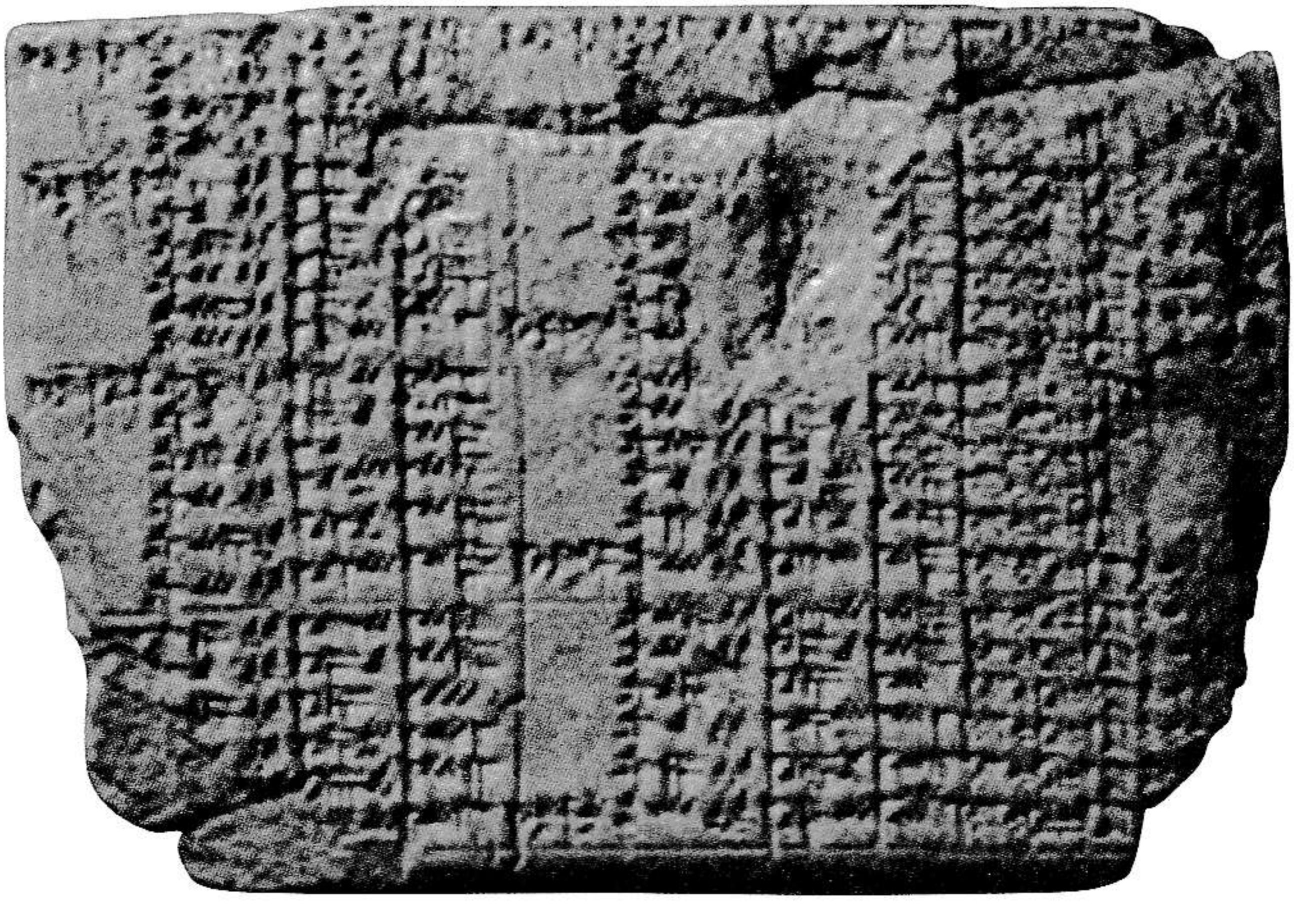
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

À partir de quelques exemples, voyons de plus près les techniques utilisées.

En particulier nous allons examiner la tablette BM 13901 (note a : Guillemot & Plane : l'algèbre au fil des âges. Irem de Toulouse. 1984) sur laquelle se trouvent 24 problèmes qui peuvent être classifiés, selon notre terminologie en trois groupes :

- étude de la méthode de résolution d'une équation du second degré à une inconnue (problèmes 1-7).

- étude de la méthode de résolution des systèmes de deux équations, où la valeur de la somme des carrés des deux inconnues figure dans la première et la somme (ou la différence ou un certain rapport ou le produit) des inconnues figure dans



la seconde (problèmes 8-14),

- exercices d'application de ces méthodes à des cas intéressants ayant un nombre quelconque d'inconnues (problèmes 15-24) (cf. Ifrah : Histoire universelle des chiffres. Ed. Seghers 1981 et note b)

Les deux premiers groupes nous fournissent un enseignement de base qui comprend deux méthodes fondamentales de résolution ; celle de la complétion du carré, dans le cas d'une seule équation, et celle de la demi-somme et la demi-différence des inconnues, dans le cas d'un système de deux

Note a
La tablette BM 13901 se trouve au British Museum, elle fut transcrite, traduite en français et commentée en 1936 par F. Thureau-Dangin. En 1937, O. Neugebauer en fit aussi une transcription, une traduction en allemand et un commentaire. Les deux auteurs s'accordent à dater cette tablette du début du 2è millénaire av.J.-C. environ.

Note 10
Nous préférons cette classification adoptée par M. Caveing, plutôt que celle de O. Neugebauer ou autres, car elle ne se fonde pas sur des critères de classement qui dérivent de la façon actuelle de raisonner, mais est cohérente avec la mentalité babylonienne.

équations.

Analyse du Problème, BM 13901

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 0; 45

Tu poseras 1, l'unité.
Tu fractionneras en deux 1 : 0; 30
Tu croiseras 0; 30 et 0; 30 : 0;15
Tu ajouteras 0; 15 à 0; 45 : 1
Tu soustrairas 0; 30, que tu as croisé, de 1 : 0; 30, le côté du carré.

L'équation du problème, formulée de façon moderne est :

$$x^2 + x = 3 / 4 \quad (= 0;\, 45)$$

Il s'agit donc de résoudre une équation du type :

$$ax^2 + bx = c \text{ avec } a, b, c > 0.$$

La méthode utilisée sur la tablette est celle de la complétion du carré, qui, étant dans ce cas a = b = l, amène à :

$$x^2 + x + (1/2)^2 = c + (1/2)^2$$

Le scribe alors ne doit plus qu'extraire une racine carrée pour obtenir $x + 1/2$ et effectuer une soustraction pour obtenir x.

Les instructions du texte amènent :

$$x = \sqrt{(0.30)^2 + 0;45} - 0;30 = 0;30$$

Ce qui équivaut donc à l'application de la formule

$$x = \sqrt{(1/2)^2 + c} - 1/2,$$

qui est notre formule pour la racine positive de l'équation.

À partir de ce texte, nous pouvons déduire que les Babyloniens devaient connaître l'identité

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

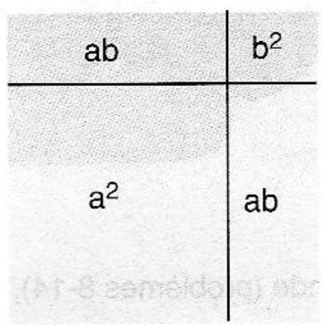
D'une manière analogue la résolution d'équation du type

$$x^2 + x = c$$

au moyen de la complétion du carré (Problème 2, BM 13901, par exemple), suppose la connaissance de l'autre identité :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

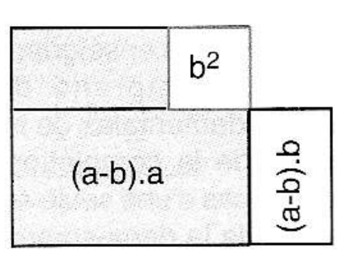
Nous ne savons pas comment ils ont pu obtenir ces identités. D'après van der Waerden, leur intuition fut facilitée par l'observation de diagrammes semblables à ceux qui se trouvent dans le second livre des Éléments d'Euclide :



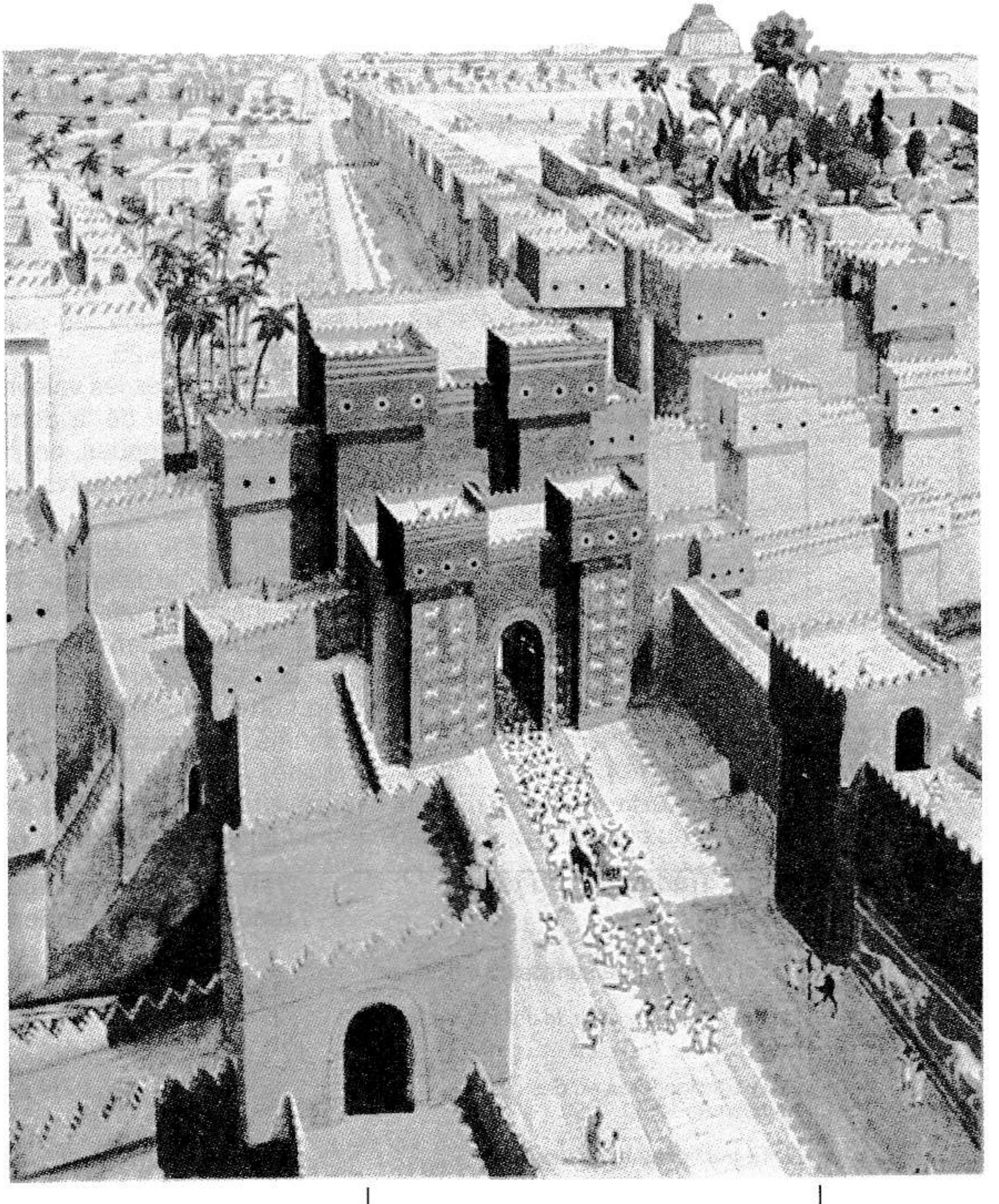
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Toutes les équations quadratiques abordées dans ce texte, sont du type suivant :

$$ax^2 \pm bx = c, \; (a, b, c > 0)$$



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



et sont résolues avec un algorithme qui équivaut à l'application de notre formule qui donne les solutions de l'équation du second degré.

Les Babyloniens ignoraient les nombres négatifs et ne tenaient donc en considération que la racine positive de l'équation.

Mais il y a des problèmes, contenus dans d'autres tablettes, qui amènent à la résolution d'une équation quadratique du type :

$$x^2 + c = bx \quad (c, b > 0),$$

qui a deux racines positives, qui sont explicitées.

Les Tablettes de Suze datent de la fin de la Première Dynastie Babylonienne, c'est-à-dire aux environ de 1 500 av. J.-C..

Le Problème III du texte IX des Tablettes de Suse, par exemple, demande la solution de l'équation

$$x^2 + 2,6 = 32;30\, x$$

En notation décimale elle correspond à :

$$x^2 - 65x/2 + 126 = 0,$$

qui a pour solutions

$$x_1 = 28 \text{ et } x_2 = 18/4 = 4 + 1/2.$$

Le scribe résout cette équation par des passages équivalents à l'application de la formule suivante :

$$x = (32 ; 30) / 2 \pm \sqrt{(32;30/2)^2 - 2,6}$$

c'est-à-dire :

$$x = 16;15 \pm 11;45 .$$

Il écrit textuellement :

Additionne 11;45 à 16;15
Tu trouves 28.
En second lieu soustrais-les :
16.45 - 11.45
Tu trouves : 4;30

Analyse du problème 9, BM 13907

Pour résoudre le problème, le scribe utilise l'identité :

$$(x^2 + y^2)/2 = [(x+y)/2]^2 - [(x-y)/2]^2$$

Que l'on obtient de :

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2\,(x^2 + y^2)$$

Puisque le problème lui fournit les valeurs de $x^2 + y^2$ et de $x - y$, en extrayant la racine, au point 6, il trouve $(x+y)/2 = 25$.
Une fois connues les valeurs de la demi-somme et de la demi-différence des inconnues, on peut en déduire ces dernières (voir points 8 et 9.).
Ce n'est pas la méthode de résolution arabe, qui détermine la valeur d'une inconnue par une équation et la substitue dans l'autre. Celle qui est utilisée par le scribe est une méthode dans laquelle la demi-somme et la demi-différence des racines jouent le rôle d'inconnues auxiliaires et permettent d'obtenir simultanément les deux racines.

Traduction du texte	**Transcription en langage mathématique moderne**
1. J'ai additionné la surface de mes deux carrés : 21,40. Le côté de l'un excède le côté de l'autre de 10.	$\left\lvert \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1.300\ (=21,40) \\ x - y = 10 \end{array}\right.$
2. Tu fractionneras en deux 21,40 : tu inscriras 10,50.	$(x^2 + y^2)/2 = 650 (=10,50)$
3. Tu fractionneras en deux 70 : 5.	$(x - y)/2 = 5,\ [(x - y)/2]^2 = 25$
4. Tu croiseras 5 et 5 : 25	
5. Tu soustrairas de 10,50 : 10,25.	$(x^2+y^2)/2 - [(x-y)/2]^2 = 625\ (=10,25)$
6. C'est le carré de 25.	$\sqrt{(x^2+y^2)/2 - [(x-y)/2]^2} = 25$ $(= (x + y)/2)$
7. Tu inscriras 25 deux fois.	
8. Tu ajouteras 5, que tu as croisé au premier 25 : 30, le côté du (premier) carré	$(x + y)/2 + (x - y)/2 = 30\ (= x)$
9. Tu soustrairas 5 du second 25 : 20 le côté du second carré.	$(x + y)/2 - (x - y)/2 = 30\ (= y)$

Une autre caractéristique de l'algèbre babylonienne est la réduction en utilisant des moyens adéquats, d'un problème quadratique au problème suivant :

"Trouver deux nombres dont on connaît la somme (ou la différence) et le produit, ce"
qui équivaut à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \cdot y = P \\ x + y = S \end{cases}$$

Par exemple, dans le Problème 1 du Prisme AO 8862 qui peut être formalisé comme suit :

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x \cdot y + (x - y) = 3{,}3. \end{cases}$$

Le scribe procède de la façon suivante : il additionne les deux équations $x \cdot (y + 2) = 3{,}30$, il opère comme s'il faisait la substitution $y + 2 = y'$ et obtient le système :

$$\begin{cases} x \cdot y' = 3{,}30 \\ x + y' = 29 \end{cases}$$

Il procède ensuite à la résolution par la méthode de la demi-somme et de la demi-différence des racines. Le schéma de résolution peut être traduit par la formule suivante :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| = (x + y')/2 \pm \sqrt{(x/2 + y'/2)^2 - xy'}$$

qui utilise l'identité :

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,ab\,;$$

on a donc sous le radical :

$$(x/2 - y'/2)^2\,,$$

c'est-à-dire le carré de la demi-somme et de la demi-différence des inconnues.

La présence de nombreux exemples de ce genre nous conduit à penser que, pour résoudre les problèmes quadratiques plus complexes, les Babyloniens ramenaient ces derniers à cette forme qui, nous venons de le voir, était pour ainsi dire, une forme normale.

Conclusion

C'est, sans aucun doute, à l'algèbre que les Babyloniens apportèrent leur contribution la plus considérable et la plus originale. Et, suite aux exemples que nous avons examinés, nous pouvons affirmer comme 0. Neugebauer que :

"Nier à l'algèbre babylonienne l'emploi d'une formule générale serait essentiellement faux !
Les séries de problèmes étroitement liés et les règles générales qui accompagnent la solution numérique constituent, en fait, un instrument qui est très proche d'une opération purement algébrique."

Par rapport aux composantes algébrique et numérique de la mathématique babylonienne, le rôle de la géométrie n'est pas très important. Les Babyloniens savaient calculer l'aire du carré, du rectangle et du triangle rectangle.
Ils connaissaient, au moins du point de vue arithmétique, le théorème de Pythagore (voir $ 4).
Ils connaissaient aussi le triangle équilatéral, l'hexagone, les polygones réguliers et savaient qu'on peut les inscrire dans un cercle. Quant au rapport entre la circonfé-

rence et le diamètre, ce qu'aujourd'hui nous appelons π, ils utilisaient en général, pour des usages pratiques, la valeur approximative 3, mais ils connaissaient aussi une approximation meilleure, c'est-à-dire 3 ; 7,30 qui correspond, en notation décimale, à 3,125.

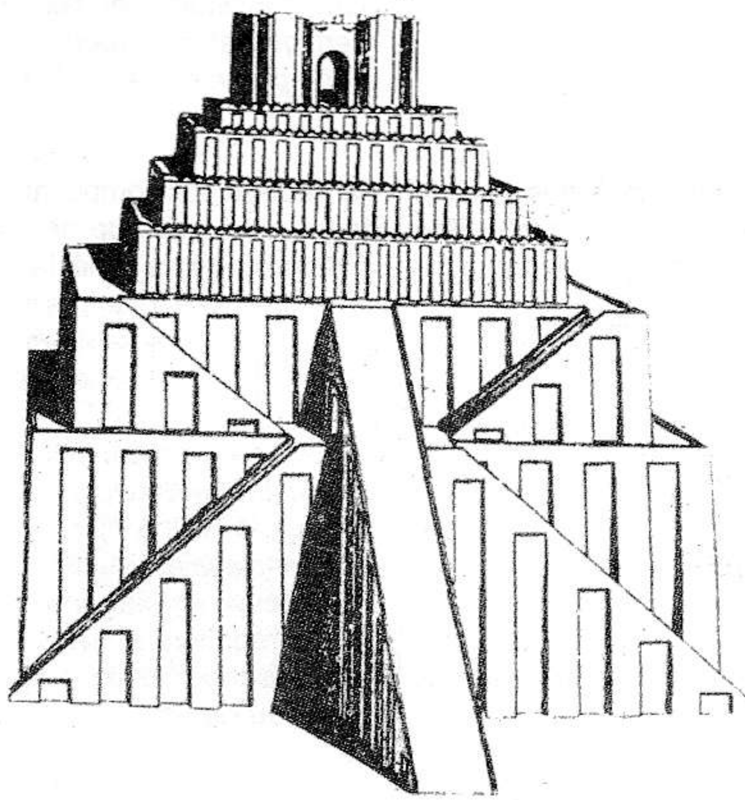
Les Babyloniens savaient aussi calculer correctement le volume de certains solides, des autres ils ne connaissaient que des formules approximatives.

Par contre, la géométrie comme science démonstrative ainsi que les notions abstraites, sont totalement absentes du moins dans l'état actuel des données que nous possédons.

Il y a encore sûrement beaucoup de tablettes à découvrir et il y en a de nombreuses dans les Musées d'Europe qui n'ont pas encore été étudiées. D'après nos connaissances actuelles nous pouvons, en suivant M. Caveing, décrire les caractères généraux des mathématiques babyloniennes comme suit :

"La distinction que nous faisons depuis les Grecs n'est pas faite à Babylone. Même les distinctions que nous venons de voir vont un peu au-delà des textes. Dans les textes, le scribe fait flèche de tout bois. Il combine des nombres, des procédures algébriques et des données géométriques ; il combine des propriétés qu'il connaît ; il ne les explicite pas. Il donne la marche à suivre à son élève sur des exemples ; la répétition des exemptes doit inscrire dans l'esprit de l'élève la marche a suivre. On a des codes, on n'a pas une théorie. Ce qu'on peut dire, c'est que, dans l'usage des codes, il y a un élément de gratuité qui apparaît à certains moments, un élément qu'on pourrait appeler ***ludique,*** *ou l'on se complique la tâche un peu par plaisir, et peut-être aussi pour le plaisir qu'il y a à discuter entre initiés de choses qu'on est seuls à comprendre !"* (Parrot : Sumer. Gallimard)

■



Satellites naturels ou artificiels

Gilbert Walusinski - Paris

Pour les Anciens, un *satellite* est le compagnon plus ou moins modeste d'un homme puissant ; le mot est pris, le plus souvent en mauvaise part ; c'est l'acceptation courante en ... géopolitique.

L'acceptation astronomique a été introduite par Copernic. Dans son ouvrage *"Des Révolutions des orbes célestes"* (1 543), il fait décrire aux planètes des orbites circulaires autour du Soleil mais il fait exception pour la Lune qui décrit son orbite autour de la Terre : la Lune est un satellite de la Terre.

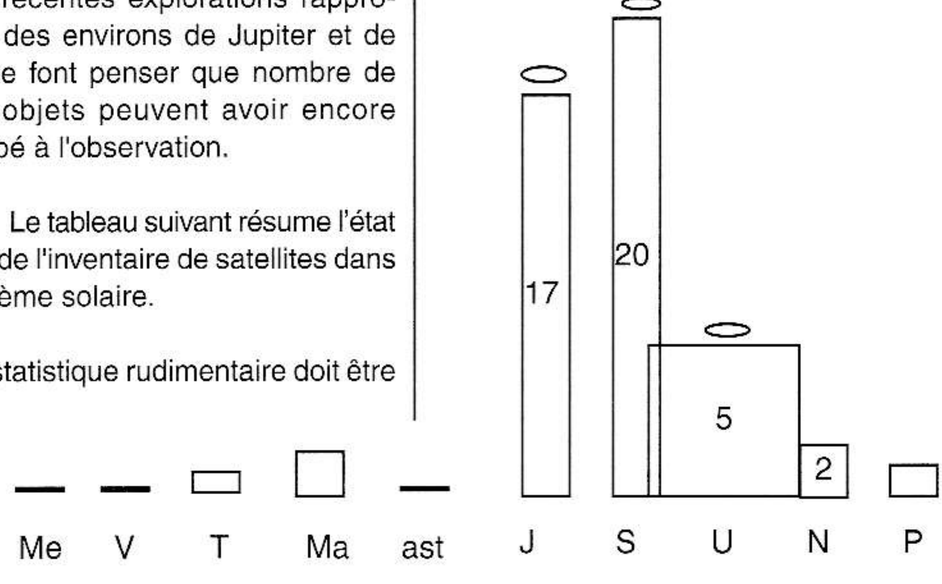
Pour les adversaires de Copernic, cette exception unique est considérée comme un des défauts de son système.
Cet argument anticopernicien perdra toute valeur lorsque Galilée, en 1610, découvrira les quatre gros satellites de Jupiter.

Aujourd'hui, on a identifié plus de 50 satellites qui gravitent autour de certaines planètes du système solaire et les récentes explorations rapprochées des environs de Jupiter et de Saturne font penser que nombre de petits objets peuvent avoir encore échappé à l'observation.

Le tableau suivant résume l'état actuel de l'inventaire de satellites dans le système solaire.

Cette statistique rudimentaire doit être corrigée en fonction des données nouvelles apportées par l'observation. L'information qu'elle apporte mérite tout de suite d'être affinée, il faut tenir compte des masses respectives des planètes et des satellites.
Par exemple, les deux petits satellites de Mars n'ont pas la même importance mécanique que l'unique et gros satellite de la Terre.

Elle suggère pourtant bien des questions :
o Pourquoi les deux planètes les plus proches du Soleil n'ont-elles aucun satellite ?
o Pourquoi les planètes ayant le plus grand nombre de satellites sont-elles justement les plus grosses ?
o Que les orbites des nombreux astéroïdes (petites planètes) soient relativement proches de celle de Jupiter, la plus grosse planète, est-ce un hasard ?
o Que les deux satellites de Neptune aient des orbites et des mouvements aussi différents, est-ce en relation avec la curieuse orbite de Pluton ? etc.



Questions de formulation simple mais réponses plus délicates car elles font appel à des connaissances de mécanique assez savantes. Nous nous limiterons ici à des indications schématiques.

C'est une mécanique également savante qui permet de comprendre le lancement *des satellites artificiels et des sondes spatiales.* Nous employons à dessein deux expressions pour distinguer :

1- les satellites artificiels, objets placés sur des orbites autour de la Terre. Satellites d'observation de la surface ou de l'atmosphère terrestre, satellites de télécommunication. Satellites géostationnaires, satellites héliosynchrones, etc.

2- les sondes spatiales, les objets lancés pour l'exploration des planètes ou de l'espace interplanétaire.

Ainsi l'appellation de satellite, sans qualificatif, sera-t-elle réservée aux objets naturels seuls recensés dans la statistique de la figure 1.

L'histoire des découvertes

L'histoire des découvertes concernant les satellites des planètes illustre de façon frappante les progrès de l'observation depuis Galilée. Le sujet se prête à des commentaires instructifs même pour des élèves ayant peu de connaissances astronomiques.

La Lune

Bien avant que Galilée braque sa lunette vers la Lune, l'observation visuelle de cet astre avait suggéré maintes réflexions aux astronomes. Aristarque de Samos, au IIIème siècle avant notre ère, savait que la Lune avance, sur le décor des étoiles fixes, de son diamètre apparent en une heure. On retrouve facilement ce résultat élémentaire quand on connaît la période sidérale de la Lune, T = 27,322 jours solaires moyens (j, s, m) :

$$360 / [27,322 \times 24] \neq 0°,5$$

En désignant R le rayon de la Terre, on a

$\mathrm{tg}\ 0°,5 = R / 2 \cdot d$
et $d = TL = 60\ R$

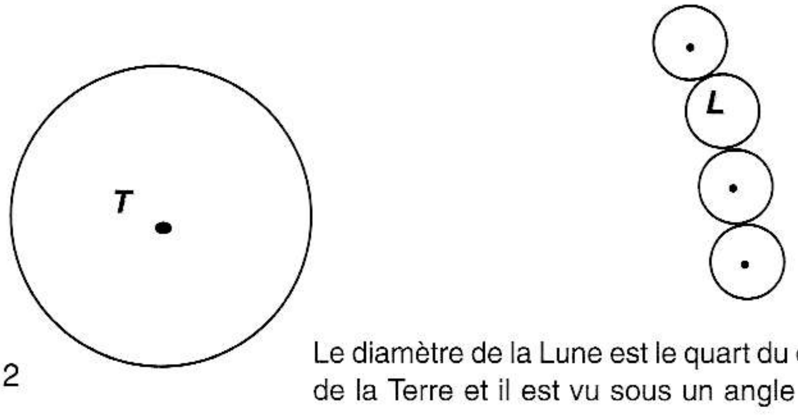


Fig. 2

Le diamètre de la Lune est le quart du diamètre de la Terre et il est vu sous un angle de 0°,5.

Ce résultat lui permit d'évaluer la première distance astronomique, celle de la Terre à la Lune, en admettant que le Soleil était beaucoup plus loin, que le cône d'ombre portée de la Terre pouvait être assimilé à un cylindre et que la totalité d'une éclipse de Lune pouvait durer jusqu'à 4 heures (fig. 2).

Les phases de la Lune

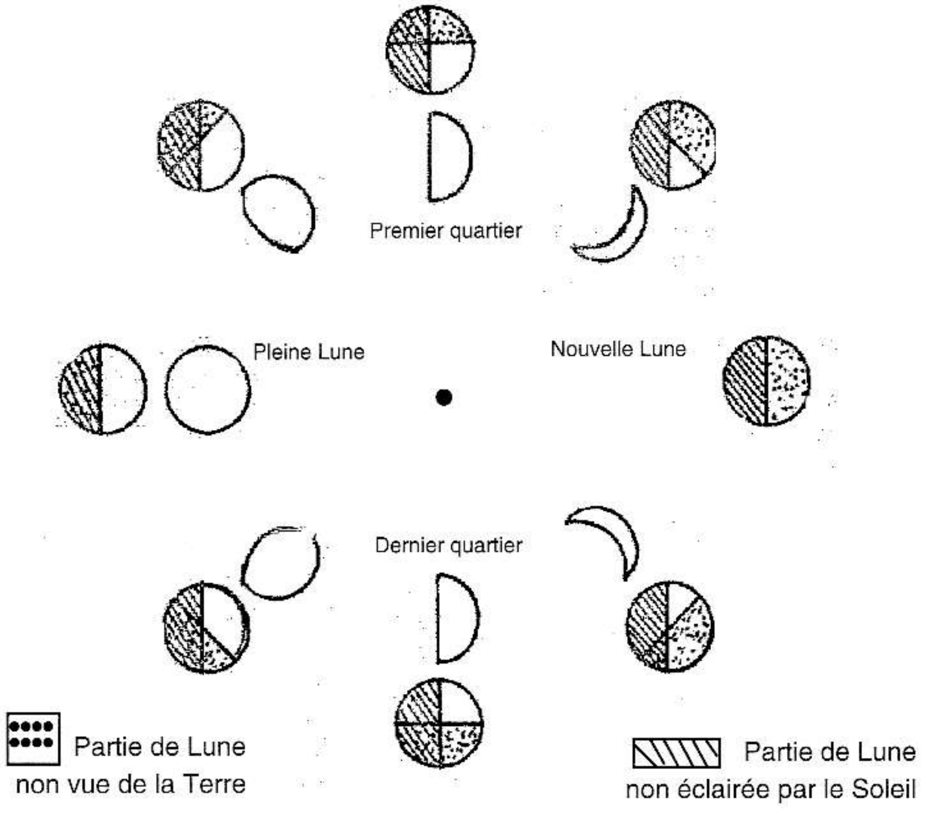
Dans le cadre du système héliocentrique de Copernic (1 543), des phénomènes tels que phases de la Lune et éclipses sont facilement expliqués. Ainsi la "nouvelle lune" correspond à la *conjonction* de la Lune et du Soleil (ces deux astres se trouvent sur le mérite cercle horaire) ; la "pleine lune" correspond à *l'opposition* des deux astres (les deux cordes horaires qui les portent ont des ascensions droites qui diffèrent de 12 heures).

Il est donc facile de faire calculer *la période sidérale* de la Lune à partir de l'observation des phases. Celle-ci permet de connaître la lunaison ou *période synodique*.

Les éphémérides montrent que c'est une durée un peu variable, dont la valeur moyenne est q = 29,531 jsm. L'année sidérale, période de révolution de la Terre autour du Soleil étant A = -365,2564 jsm, on vérifie que :

$$1 / 27{,}322 = 1 / 365{,}2564 + 1 / 29{,}531$$

Durant les phases intermédiaires de la Lune, le terminateur qui limite là partie éclairée de la partie sombre a la forme d'une demi-ellipse, un demi-grand-cercle vu en perspective. Il est intéressant de réfléchir à l'aspect de la Terre vue de la Lune en fonction de l'aspect de la Lune vue de la Terre et de montrer des photos de la Lune et de la Terre prises le même jour par les astronautes.



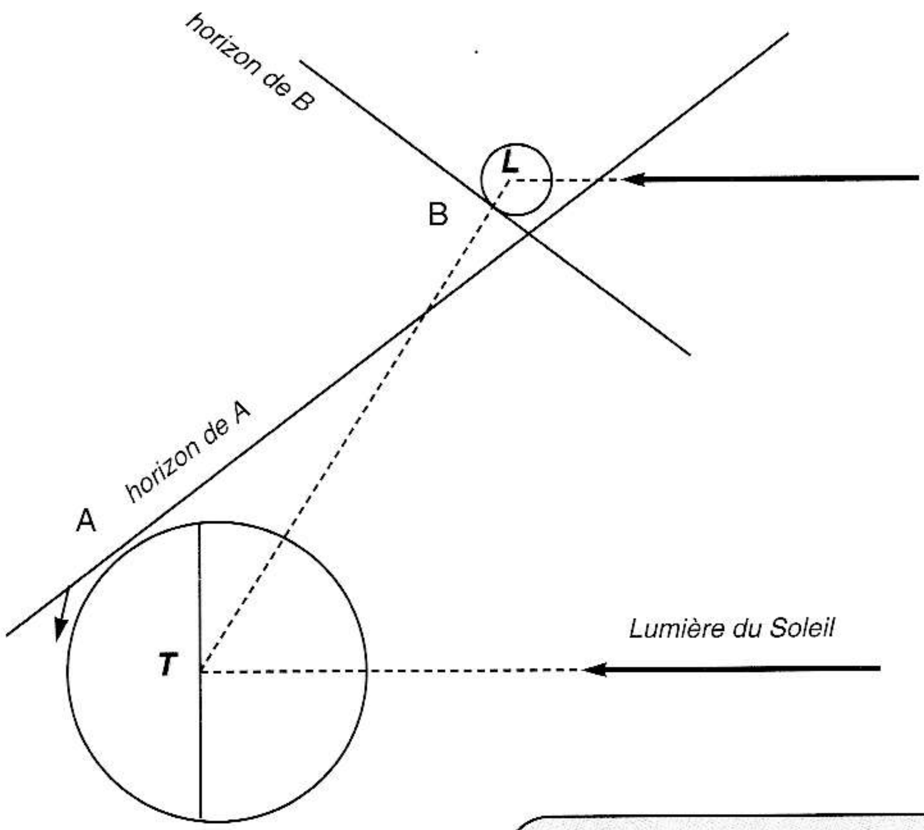


fig. 4 :
Légende de la figure :

TLS = l'angle de phase. Pour l'observateur terrestre placé en A, le Soleil est couché depuis peu, c'est le début de la nuit ; un mince croissant de Lune apparaît très bas sur l'horizon vers l'ouest, le limbe demi-cercle, la convexité tournée vers le soleil, le terminateur concave, une demi-ellipse.

Pour l'observateur placé en B sur la ligne, le spectacle serait en quelque sorte complémentaire du précédent ; pour B ce serait la fin de la nuit, la Terre apparaîtrait gibbeuse.

Le limbe demi-circulaire tourné vers le Soleil, le terminateur également convexe sous la forme d'une demi-ellipse.
En A, la lueur du "clair de lune" serait faible ; en B, la lueur du "clair de terre" serait beaucoup plus importante.

Éclipses

Le schéma de la fig. 4 présente plusieurs simplifications dont certaines peuvent être trompeuses ; on a supposé implicitement que les plans des orbites lunaire et terrestre étaient confondues avec le plan de la figure ; les observateurs A et B sont alors placés, le premier sur l'équateur terrestre le second sur l'équateur lunaire en négligeant le fait que l'axe de rotation de la Terre n'est pas perpendiculaire au plan de l'orbite terrestre.
En fait, le plan de l'orbite lunaire n'est pas confondu avec le plan de l'orbite terrestre qui coupe la sphère céleste selon le grand cercle de l'écliptique, cela explique qu'à chaque conjonction du Soleil et de la Lune, il n'y a pas éclipse du Soleil, qu'à chaque opposition, il n'y a pas éclipse de Lune.

Il n'y aura éclipse (de Soleil ou de

Lune) que si opposition (ou conjonction) se produisent alors que la Lune est assez peu éloignée des nœuds, intersection du plan de son orbite et de l'écliptique.
L'angle des deux plans est de 5°81 (variant entre 4°59' et 5°18').

Dans le cas de la figure 4, l'observateur terrestre, placé en A voit non seulement le mince croissant de Lune brillamment éclairé par le Soleil mais également la partie sombre du disque lunaire faiblement éclairée par le reflet de la plus grande partie éclairée du disque terrestre (d'autant que l'albédo de la Terre, son pouvoir diffusant, est beaucoup plus grand que celui de la Lune).
C'est le phénomène de la lumière cendrée, visible deux ou trois nuits avant ou après la nouvelle lune, C'est le "reflet d'un reflet" disait Camille Flammarion. Explication déjà donnée par Leonard de Vinci au début du XVIe siècle, formulée explicitement par Möstlin, l'astronome copernicien qui fut le maître de Kepler à l'université de Tübingen (vers 1 590).

Remarque : les exemples récents d'éclipse montrent bien qu'une éclipse n'a pas lieu n'importe quand au cours de l'année et que, d'année en année, les périodes favorables aux éclipses, distinctes l'une de l'autre à presque six mois d'intervalle, reculent progressivement.
L'étude, même schématique des mouvements de la Lune devra mettre en évidence la rétrogradation de la ligne de nœuds (un tour en moins de 19 années) ; ce phénomène est de même nature que celui de la précision des équinoxes mais d'une bien plus grande ampleur.

D'où naissent les ellipses ?

En première approximation, on néglige les perturbations et on considère le mouvement de deux corps A et B de masses m et m'. Le corps A subit, de la part de B, l'attraction :

$$F_A = k\ (mm' / |AB|^3)AB$$

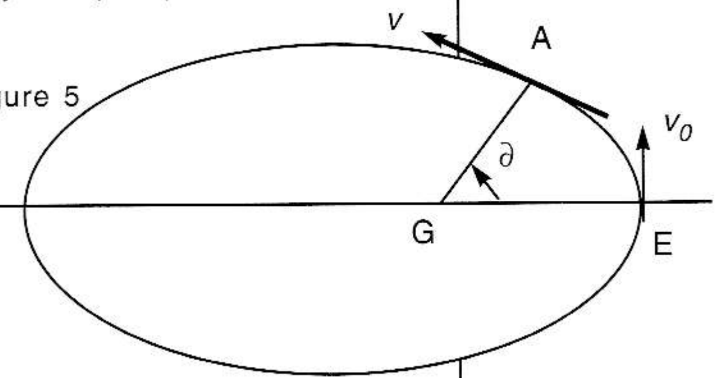
(en relation vectorielle)
alors que B subit, de la part de A, l'attraction :

$$F_B = k\ (mm' / |AB|^3)BA$$

formules dans lesquelles k est une constante la gravitation universelle (k = 6,672 X 10-11, unités S-I.).

Sur le segment AB, il existe un point G, centre des masses de A et B (ou barycentre) tel que $m\vec{GA} + m'\vec{GB} = 0$

Figure 5

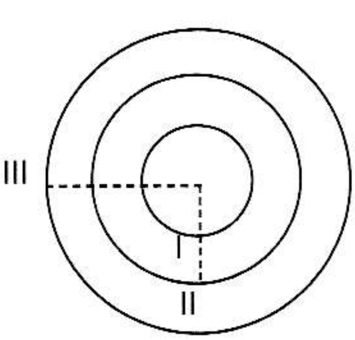


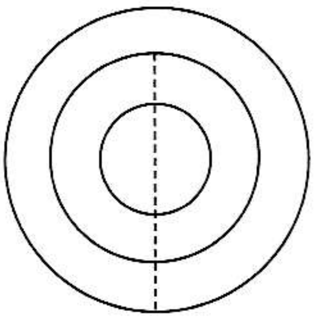
Par rapport à ce point G, le mouvement de A est alors complètement défini par l'équation différentielle

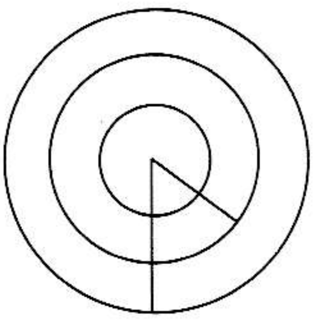
$$d^2\vec{GA}/dt^2 = -k.(m + m')\ \vec{GA}/\ |\vec{GB}|^3$$

L'accélération étant centrale, on démontre alors :
1- l'orbite de A est une ellipse ayant G pour foyer (2e loi de Kepler)
2- le rayon GA balaye une aire qui croit proportionnellement au temps (1ère loi de Képler) :

$$1 / r = (1 + e \cos \partial) / p$$







avec $\partial = 0$ lorsque A est en E, au plus près de G (ou périastre).

Le demi-grand axe de l'ellipse EF (F ou apoastre) est :

$$Z = p / (1 - e^2)$$

e = excentricité de l'orbite
p = paramètre de l'orbite.

On démontre que l'orbite est circulaire si la norme de la vitesse au périastre vérifie

$$|v_0| = \sqrt{k.\ (m + m') / GE}$$

C'est encore à partir de ces formules qu'on établit la 3ème loi de Kepler :

$$a^3 / T^2 = k\ (m + m')$$

Application :

Pour un petit satellite de Jupiter tel que Amalthée on peut considérer en première approximation que le centre des masses de Jupiter et d'Amalthée est très peu différent du centre de Jupiter.

C'est encore presque le cas pour le plus gros satellite, Ganymède, en présence de la masse considérable de Jupiter. L'orbite ainsi déterminée pour le satellite est dite orbite intermédiaire. On la corrige ensuite par les perturbations des autres corps, principalement celle du Soleil.

Dans le cas des satellites galiléens, chacun des satellites subit des perturbations non négligeables de la part des trois autres. On trouve un résultat remarquable dont les trois premiers : leurs longitudes moyennes sont liées par la formule $l_1 - 3l_2 + 2l_3 = 180°$. Il en résulte qu'il n'y a jamais de conjonction simultanée des trois satellites, jamais d'éclipses simultanées et jamais de passages simultanés.
Exemples de dispositions remarquables :

Les mouvements de la Lune

Comme il a été noté plus haut le système Terre-Lune est exceptionnel : notre satellite est relativement très gros étant donné la taille de la Terre. On a plutôt affaire à une "planète double" ce qui entraîne maintes conséquences pour l'astronomie, fondée jusqu'à maintenant sur des observations et des mesures faîtes à partir du sol de la Terre.

Masse de la Terre

Le mouvement de la Lune autour de la Terre permet une première évaluation de la masse de la Terre.
Assimilons le mouvement de la Lune à un mouvement circulaire centré sur le centre de la Terre : la force centrifuge subie par la Lune est équilibrée par l'attraction terrestre

$$m' \cdot V^2/TL = k\ mm'/TL^2$$

m = masse de la Terre

m' = masse de la Lune

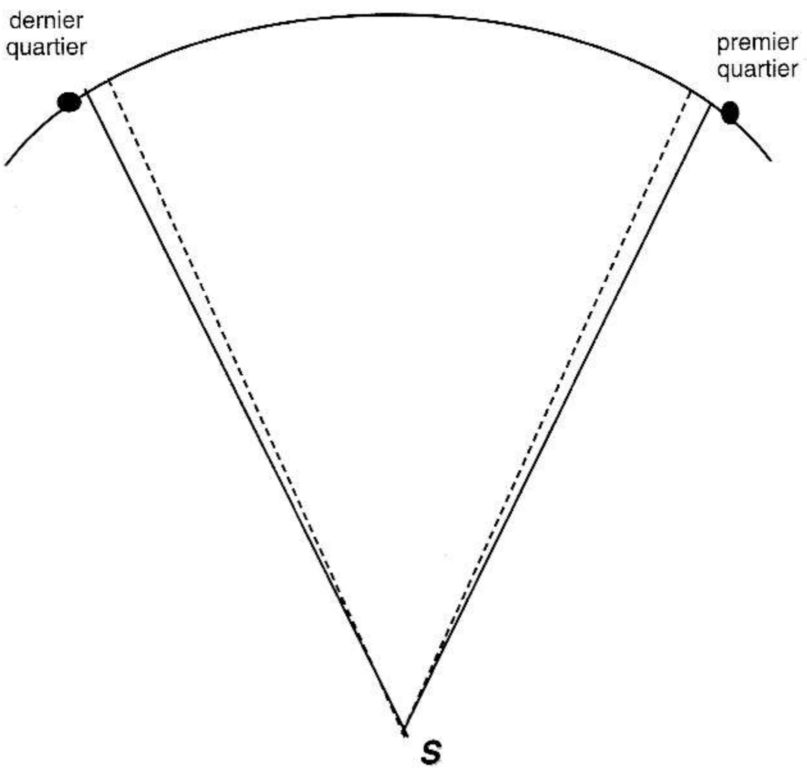
calcul de

$$V = 2\pi \times TL/27{,}322 \times 86400$$

soit

$$m = 4\pi^2 \times TL^3/k(27{,}322 \times 86400)^2$$

assez bonne approximation de la valeur $5{,}9742 \times 10^{24}$ donnée par le Bureau des Longitudes.



Inégalité lunaire

L'orbite de la Lune n'est pas décrite autour du centre de la T, erre mais autour du centre G des masses du système Terre-Lune. C'est le point G qui décrit autour du Soleil une orbite képlerienne. Quand la Lune est à son premier quartier, la Lune est en avant de G sur son orbite, quand la Lune est au dernier quartier, la Terre est en arrière de G sur son orbite (fig. 10). Comme les observations sont faites à partir de la Terre c'est le mouvement apparent du Soleil sur l'écliptique qui parait en avance ou en retard sur son Mouvement moyen de 6-,4 (on l'appelle inégalité mensuelle). -

Cet angle est celui sous lequel, de S, on voit le segment TG soit :

TG = 149,5 x 104 x sin 6",4
TG = 4.640 km

Puisque la distance moyenne Terre-Lune est 384.400 km on en déduit :

M / m' = mT/mL = 81,8

Soit enfin m' = 7.4x 1022

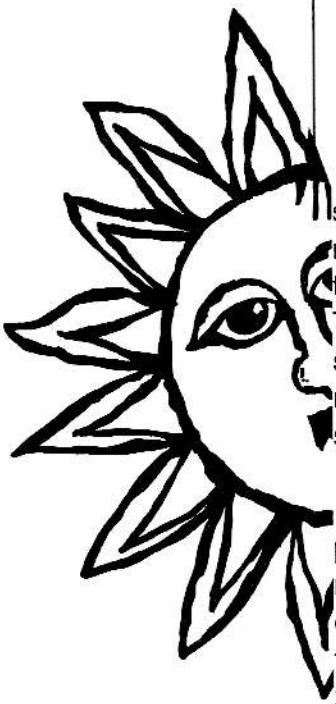
On en déduit la position du point neutre J sur le segment Terre-Lune où les attractions respectives de la Terre et de la Lune s'équilibrent.

k.m' / TL2 sachant que
JT + JL = 384.400 km.

On trouve approximativement :
JT = 9 JL JT = 345.960km
JL = 38.440 km

Il est impossible de confondre le centre des masses G qui est à 1.740 km de profondeur sous le sol de la Terre et le point neutre J qui est beaucoup plus proche de la Lune que de la Terre. On retrouvera l'importance de ce point J lorsque nous étudierons l'orbite des satellites d'exploration lunaire.

Une conséquence toute différente de la distance du centre des masses au centre de la Terre est la grande inégalité que cela entraîne pour l'année des saisons, intervalle de temps qui sépare deux équinoxes de printemps. Pour la raison déjà évoquée pour l'inégalité mensuelle, les observations astronomiques sont rapportées au centre de la Terre ; or c'est le point G qui décrit l'orbite képlerienne, indépendamment du phénomène de précession, des équinoxes qui est d'une toute autre origine, le passage apparent du Soleil sur l'équateur céleste (Passage au point g) peut être avancé ou retardé de plus de 15 minutes de temps. L'année des saisons est donc une quantité variable dont la valeur moyenne, calculée sur un très grand nombre d'années, est l'année tropique.



Librations

Un autre mouvement intéressant de la Lune donne lieu au phénomène de libration ; si la Lune tourne toujours le même hémisphère vers la Terre, a y a des petits balancements qui sont faciles à observer : l'écart entre la mer des Crises et le limbe lunaire varie selon les époques.

L'explication est simple. La période de rotation de la Lune sur elle-même est égale à la période synodique de la Lune (puisque nous voyons toujours le même hémisphère), soit 29,531 jours. On dit que la rotation de la Lune en synchrone. Cette rotation est pratiquement uniforme.

Le mouvement de la Lune sur son orbite ayant lieu selon la loi des aires, la rotation propre prend de l'avance lorsque la Lune est voisine de son périgée, du retard lorsqu'elle est voisine de son apogée. Ainsi s'explique la libration en longitude qui permet de découvrir des zones lunaires à l'est ou à l'ouest du globe lunaire. S'y ajoute une libration en latitude due au fait que le plan de l'orbite lunaire fait un angle de 6°7 avec le plan de l'équateur lunaire.

S'ajoute, à ces deux librations, une libration physique due à des oscillations de la Lune autour de son centre de gravité ; cette libration physique découverte par Bessel en 1 839 est de très faible importance.

Marées et allongement du jour

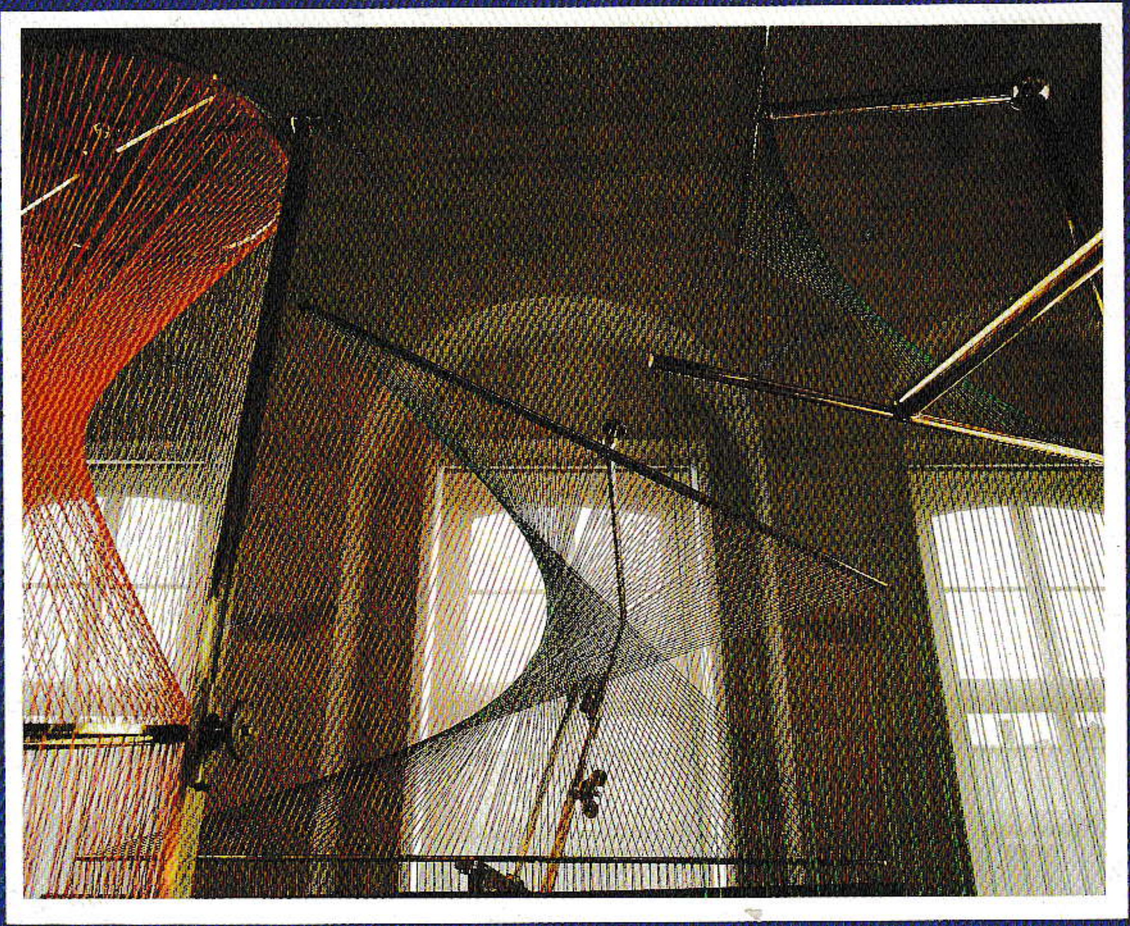
C'est la Lune qui joue le rôle principal dans le phénomène des marées, le Soleil y ajoutant son influence (ce qui entraîne des marées de niveau variable). Le mouvement des océans provoqué par les marées dissipe une grande quantité d'énergie qui est prise sur l'énergie cinétique due à la rotation de la Terre sur elle-même. La rotation de la Terre sur elle-même est freinée, le jour s'allonge. Ce qui complique la vie des astronomes et même celle de tout le monde, le jour étant pratiquement une unité de base du temps (1 jour solaire moyen = 86.400 s).

Pour apprécier le phénomène, il faut considérer le système Terre-Lune dans son ensemble, le mouvement cinétique de rotation de la Terre sur elle-même, celui de rotation de la Lune sur elle-même, celui de la "rotation" de la Lune autour de la Terre.

Tout se passe comme si une partie du moment cinétique de la Terre était transférée au moment cinétique de la Lune.

Résultat :
Allongement du jour de 0,0016s par siècle,
Allongement de la distance Terre-Lune d'environ 3 cm par siècle,
(on a rudement bien fait d'y aller en 1969 avant qu'elle ne soit trop loin !).

à suivre !



Paris 2000 :
Réouverture du musée des arts et métiers

Modèles de surfaces réglées créées par Théodore Olivier au Conservatoire national des arts et métiers de 1839 à 1853 pour l'enseignement de la géométrie descriptive. Photographie de Arnaud Carpentier.