Construire une mosquée !!!

André VIRICEL - Villers-les-Nançy

Voici un problème paru dans "le Petit vert", bulletin de la Régionale Apmep de Lorraine et qui touche au plus près l'astronomie.

Le problème

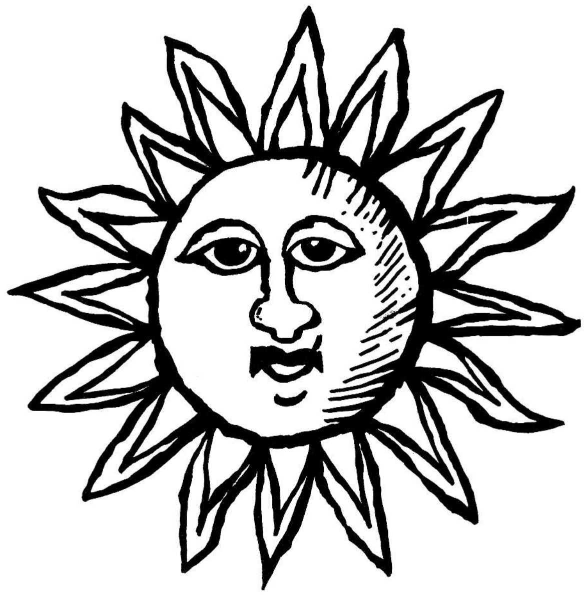
Connaissant la longitude et la latitude de **Nancy** (6° est et 49° nord, à l° près) et celles de **La Mecque** (40' est et 22' nord), comment doit-on construire une mosquée de façon à bien orienter le mihrab vers La Mecque (en d'autres termes, quel angle doit-il faire avec le méridien local) ?

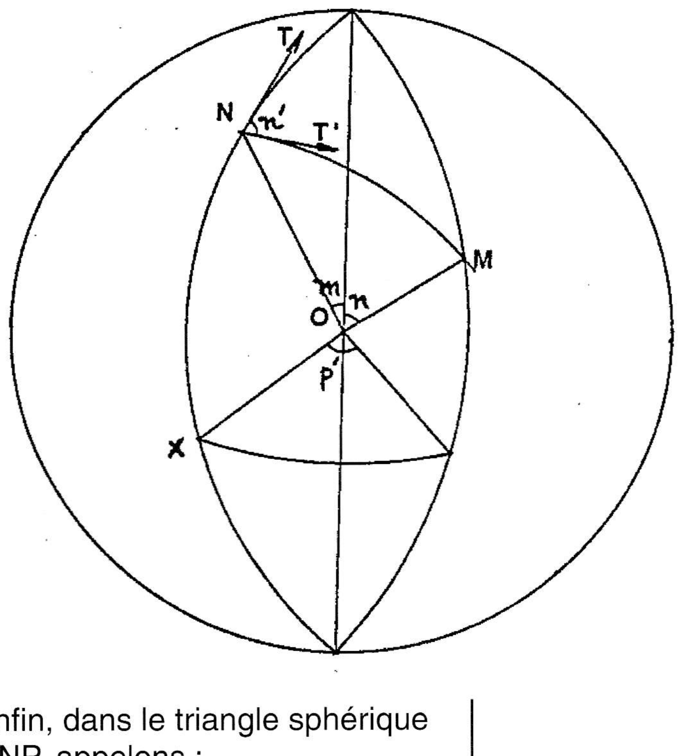
Voici une réponse à ce problème de géométrie dans l'espace. Elle émane d'André Viricel (Villers-les-Nancy), et est en fait double : elle comporte, non seulement une solution par la trigonométrie sphérique - celle qui vient immédiatement à l'esprit -, mais également une solution par la géométrie descriptive.

Première solution

Elle fait appel à la trigonométrie sphérique.

Appelons M, La Mecque, N, Nançy, P, le pôle Nord) et 0 le centre de la Terre, les points dont nous aurons besoin. Appelons **x** l'intersection du méridien de Nançy avec l'équateur. Posons les relations entre vecteurs :
i = Ox, k = OP,
j = k Δ i
et considérons le repère R = (0; i, j, k) (voir pour cela le schéma ci-contre).





Enfin, dans le triangle sphérique MNP, appelons :
- **p** la mesure de l'arc MN ("côté" du triangle);
- **p'** la mesure de l'angle dièdre des plans (MOP) et (NOP).
Nous définissons de même m, m', n, n'.

Le problème consiste donc à déterminer n'.

Dans le repère R nous avons les coordonnées de N et M :

N (sin m, 0, cos m) et

M (sin n. cos p', sin n. sin p', cos n).

Nous en déduisons la relation (1) :

cos p = OM. ON
= sin m. sin n. cos p'
+ cos m. cos n

Considérons maintenant le repère R' déduit de R par la rotation d'axe (0, j) transformant P en N (donc d'angle m).
Posons R'= (0; u, v, w);
nous aurons bien sûr :
v = j, w = ON et
u = v Δ w = j Δ 0N. (Δ désignant le produit vectoriel des vecteurs).

Dans le repère R' les coordonnées du point M sont :

M(-sin p. cos n', sin p. sin n', cos p).

Or, la deuxième coordonnée de M est la même dans les deux repères, ce qui nous donne la relation (2):

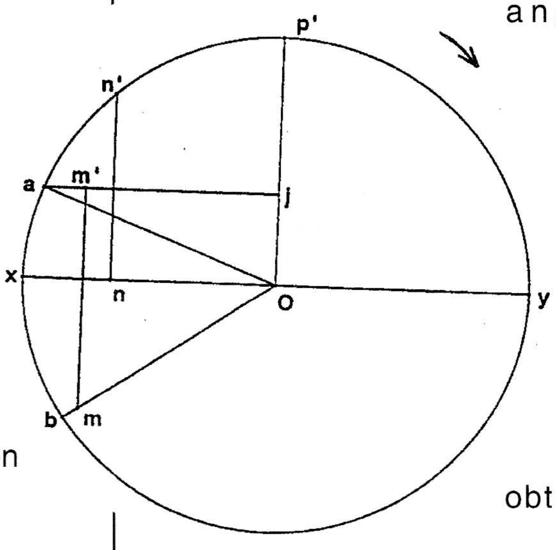
sin n. sin p' = sin p. sin n'.

Données numériques :
m = 41°, n = 68°, p ' = 34°.

De (1) on tire cos p = 0,78701, d'où sin p = 0,61694.

Seconde solution

En reportant dans (2) on obtient : sin n'= 0,84040, d'où finalement :
n'= 122° 82'
(car c'est un angle obtus).



Elle fait appel à la géométrie descriptive.

Nous conservons ici les notations précédentes. D'autre part, nous utiliserons la convention (usuelle) suivante : un point de l'espace étant désigné par une lettre majuscule :

- son projeté horizontal sera désigné par la même lettre, minuscule ;

- son projeté frontal sera désigné par la même lettre, minuscule et primée.

Appelons (xy) la ligne de terre. Prenons comme plan horizontal le plan équatorial, et comme plan frontal le plan du méridien de Nancy. Alors, le projeté horizontal de l'équateur et le projeté frontal du méridien de Nancy ont pour support commun, sur l'épure, un même cercle (C) de centre 0.

Ce cercle est orienté dans le sens rétrograde, à partir de X' (figure ci-contre).

1- Épures de N et de P :

Ces points sont dans le plan frontal, leurs projetés horizontaux n et p sont donc sur (xy).

De plus, p est en 0 et p' $\in$ (C), et n'est défini par l'angle (Ox, On') = 49°.

2- Épure de M :

a-Projeté frontal du parallèle de M

Soit **a** le point de (C) défini par l'angle de vecteurs (Ox, Oa) = 22°. Le projeté frontal du parallèle de M (sur lequel se trouve m') est un segment parallèle à (xy) passant par **a**.

(Remarque: soit j le point où ce segment coupe (OP) ; le rayon du parallèle de M est égal à aj.)

b-Projeté horizontal du méridien de M :

Soit **b** le point de (C) défini par l'angle de vecteurs (Ox, Ob) = -34° ; le projeté horizontal du méridien de M est le segment [Ob].

c- Projeté horizontal de M :
on a m $\in$ [Ob]; d'autre part, m se trouve à une distance de O égale à aj, ce qui détermine ce point.

d- Projeté frontal de M

(où l'on trouve le point m' cherché !) : il suffit maintenant de "relever" m sur [aj]: la perpendiculaire à (xy) passant par M coupe [aj] au point m' cherché.

3- Remarque :

L'angle que l'on cherche à évaluer est l'angle des tangentes au méridien de N et au grand cercle passant par M et N.

Ces deux tangentes étant perpendiculaires à (ON), l'angle cherché se projettera en vraie grandeur sur le plan perpendiculaire en 0 à (ON). D'où l'idée de prendre ce plan comme nouveau plan horizontal.

4- Changement de plan horizontal:

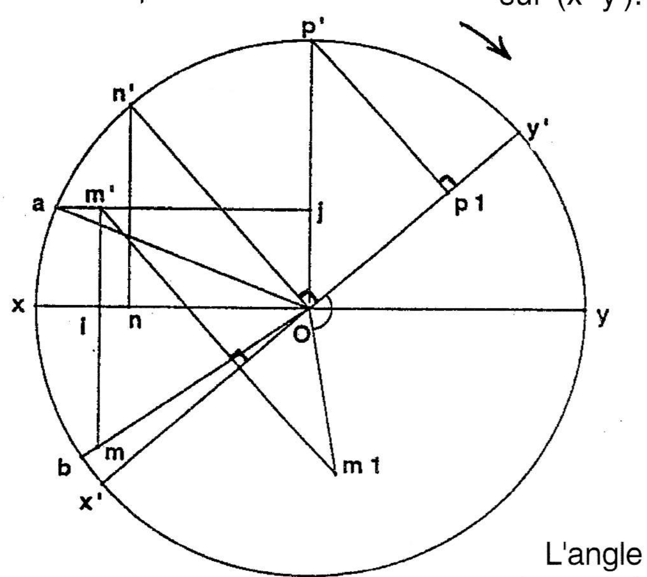
La nouvelle ligne de terre (x' y') est donc la perpendiculaire en 0 à (On') (figure suivante).
Le plan frontal étant conservé, les projetés frontaux le sont aussi; de plus, les éloignements (distances "algébriques" au plan frontal) sont eux aussi conservés.

a- Projeté horizontal de N :
c'est bien sûr 0.

b- Projeté horizontal de M :
ce point m_1 est situé sur la perpendiculaire en m' à (x' y'), à la distance im de (x' y') (i étant le projeté de m sur (x' y')).

D'où la construction de m_1 .

c- Projeté horizontal de P :
De même que ci-dessus, ce point p1 se trouve sur la perpendiculaire à (x' y') passant par p', et également sur (x' y') (car l'éloignement de P reste nul). Le point p1 est donc le projeté de p' sur (x' y').



L'angle cherché est donc l'angle(Op_1 ,Om_1), qu'il ne reste plus qu'à évaluer.

On trouve environ 122° (Cabri-géomètre dixit), ce qui - à la précision du logiciel près - confirme le résultat trouvé dans l'autre solution.

5- Dernière remarque :
L'un de nos lecteurs, Jérôme Cardot, précise que, pour le pèlerin qui se rend à la Mecque en suivant le plus court chemin (c'est à dire un grand cercle de la Terre), l'angle a n'est pas constant ; il se peut qu'il doive partir vers le nord-est puis, lors de son voyage, obliquer vers l'est en enfin vers le sud-est. Les courbes décrites à a constant joignent les pôles ; au voisinage de ces pôles, elles s'enroulent ... en spirale !!!

Dernière question :
Pouvez vous résoudre le même problème pour votre ville ?
Par exemple pour **Dakar** (17°26' Ouest et 14°40' Nord, à l° près)?