Mesurez ... l'Univers !!!

Aujourd'hui, grâce à nos technologies avancées (satellites, télescopes, écho radar, ...), il nous est possible de mesurer avec assez d'exactitude la circonférence de la Terre et la distance Terre-Lune. Le professeur de mathématique qui voudrait aborder ce sujet avec ses élèves trouverait peut-être de nombreuses oreilles intéressées à son discours. Il pourrait se servir de l'occasion pour rapporter comment des hommes qui ont vécu il y a plus de deux mille ans et qui s'étaient passionné pour ces deux questions, s'y sont pris pour les résoudre.

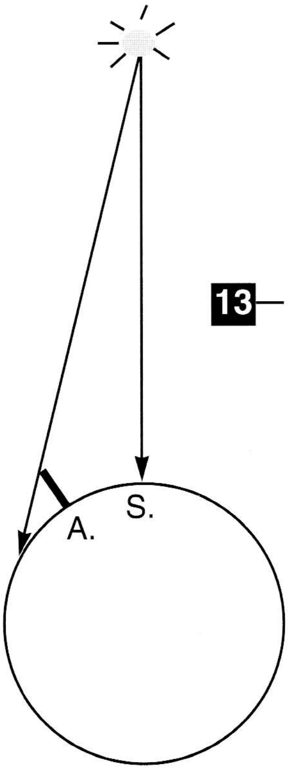
Dimensions de la Terre

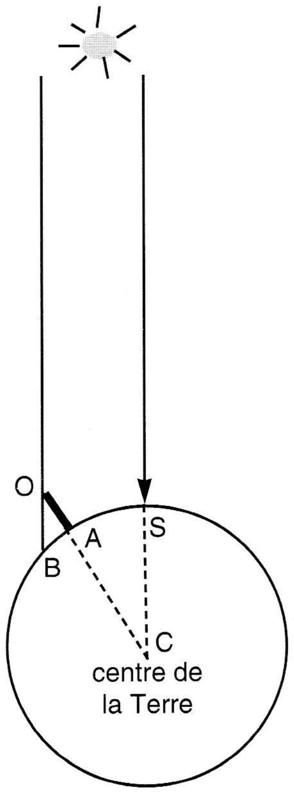
La méthode des Grecs, en ce qui concerne ces deux questions, repose beaucoup sur l'observation des phénomènes naturels. On attribue généralement à Eratosthène (284 - 192 av. J.-C.) la première mesure de la circonférence de la Terre - on savait que la Terre n'était pas plate depuis les 6è ou 5è siècle et le modèle de solution qu'il proposa demeura le seul pendant fort longtemps.

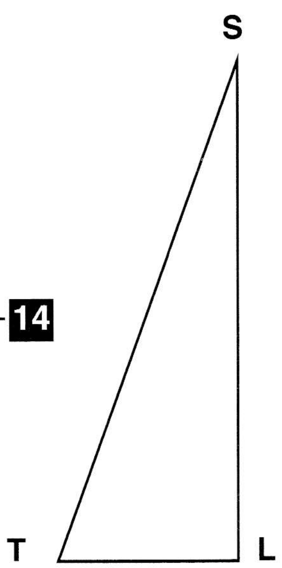
Eratosthène avait entendu dire qu'à midi, au jour le plus long de l'année, le Soleil ne produisait aucune ombre dans la ville de Sienne, alors qu'au même moment à Alexandrie - qu'on croyait juste au sud de Sienne - le Soleil frappant l'obélisque produisait au sol une ombre. Ce n'est qu'à partir de ces seuls renseignements qu'Eratosthène se mit au travail.

Le jour le plus long !

Il interpréta la première affirmation comme suit : le jour le plus







Voyez-vous pourquoi les trois astres forment un triangle rectangle lorsque de la Terre on voit un quart de Lune ?

long, les rayons du Soleil arrivent perpendiculairement sur la ville de Sienne. Ils frappent par contre obliquement l'obélisque d'Alexandrie.

Puis, il fît l'approximation ou l'idéalisation suivante: la distance du Soleil à la Terre étant très grande par rapport à la distance séparant les deux villes, l'angle entre les deux segments représentant les rayons du Soleil sera infiniment petit.
Ces segments apparaîtront parallèles pour l'observateur terrestre. Ce qui le conduit à s'intéresser plutôt à la figure ci-contre.

Dans tout ceci, quelles sont les longueurs qu'il peut mesurer ? Certainement la hauteur de l'obélisque (Thalès lui avait indiqué comment, grâce à son célèbre théorème).

Nul doute qu'il peut mesurer sur le terrain la longueur de l'ombre AB. Ainsi, il saura calculer la valeur de l'angle BOA puisque le triangle AOB est rectangle.

(tan BOA = AB / OA)

Des considérations sur les angles alternes-internes lui assure qu'il connaîtra l'angle au centre qui sous-tend l'arc AS. En fait, angle AOB = angle ACS et il peut mesurer le premier angle.

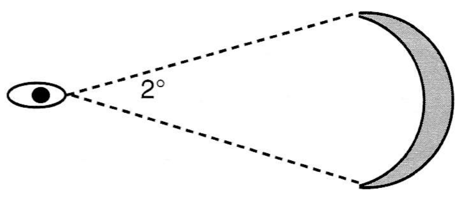
Finalement, à partir d'une règle de trois, il déduit que :
(circonférence de la terre / 360°) = (distance entre A et S / angle ACS)

Il fera calculer par les marcheurs du Roi la distance entre les deux villes et connaîtra complètement la valeur du membre de droite de l'égalité ci-dessus.

Distance Terre-Lune

Ainsi, la circonférence de la Terre sera connue.

Eratosthène mis à exécution son plan. La mesure qu'il obtient surprend par sa précision, compte tenu des moyens de mesure rudimentaires à sa disposition (les marcheurs du roi !) et l'erreur commise en croyant qu'Alexandrie se trouvait juste au sud de Sienne, ce qui n'est pas tout à fait le cas.



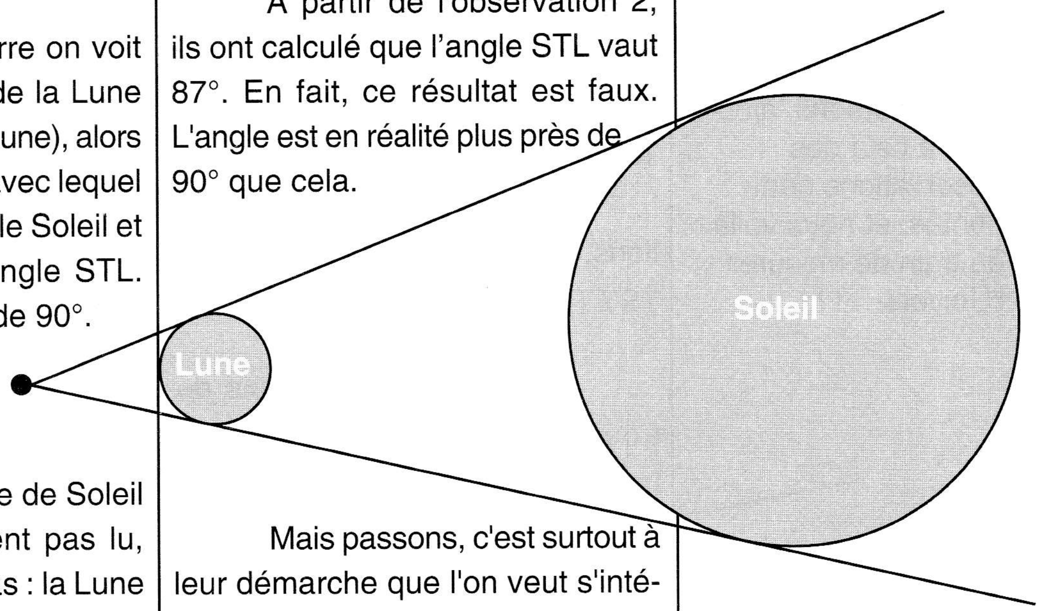
C'est aussi à partir d'observations, mais cette fois plus nombreuses, que les Grecs tentèrent de mesurer la distance Terre-Lune.

Observation 1

On savait qu'un observateur placé sur la Terre voit la surface de la Lune avec un angle de vision de 2°.

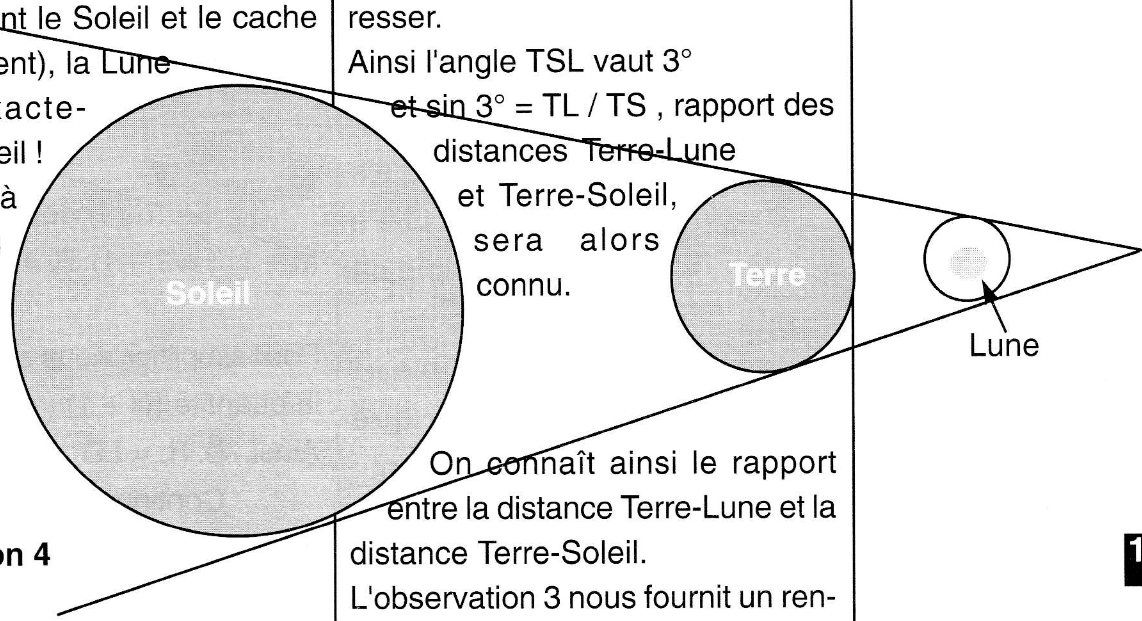
Observation 2

Lorsque de la Terre on voit la moitié de la surface de la Lune (c'est-à-dire un quart de Lune), alors on peut calculer l'angle avec lequel on voit la distance entre le Soleil et la Lune, c'est-à-dire l'angle STL. Cet angle est très près de 90°.



Observation 3

Lors d'une éclipse de Soleil (pour ceux qui n'auraient pas lu, entendu ou vu les médias : la Lune passe devant le Soleil et le cache complètement), la Lune couvre exactement le Soleil ! (Attention à vos lunettes ! ! !).



Observation 4

Lors d'une éclipse de Lune (la Terre se trouve entre la Lune et le Soleil), le diamètre de l'ombre terrestre est le double de celui de la Lune. Autrement dit, le cône d'ombre pourrait recouvrir deux fois la Lune.

C'est surtout à partir de ces quatre observations que les Grecs élaborèrent des calculs. Nous allons les suivre dans leur raisonnement.

A partir de l'observation 2, ils ont calculé que l'angle STL vaut 87°. En fait, ce résultat est faux. L'angle est en réalité plus près de 90° que cela.

Mais passons, c'est surtout à leur démarche que l'on veut s'intéresser.

Ainsi l'angle TSL vaut 3° et sin 3° = TL / TS , rapport des distances Terre-Lune et Terre-Soleil, sera alors connu.

On connaît ainsi le rapport entre la distance Terre-Lune et la distance Terre-Soleil.

L'observation 3 nous fournit un renseignement précieux.

Notons $\mathbf{r}_L$, $\mathbf{r}_T$ et $\mathbf{r}_S$ les rayons, respectivement de la.Lune, de la Terre et du Soleil.

A cause des triangles semblables, on peu écrire l'égalité entre les rapports suivants :

$\mathbf{r}_L$ **/** $\mathbf{r}_S$ = distance Terre-Lune **/** distance Terre-Soleil = TL / TS

qui est connu, c'est sin 3°.

Quelques traits de crayon sur une feuille, quelques considérations sur les proportions, ajoutées à cela des observations pertinentes, et nous voilà en train de mesurer l'Univers... ! ! !

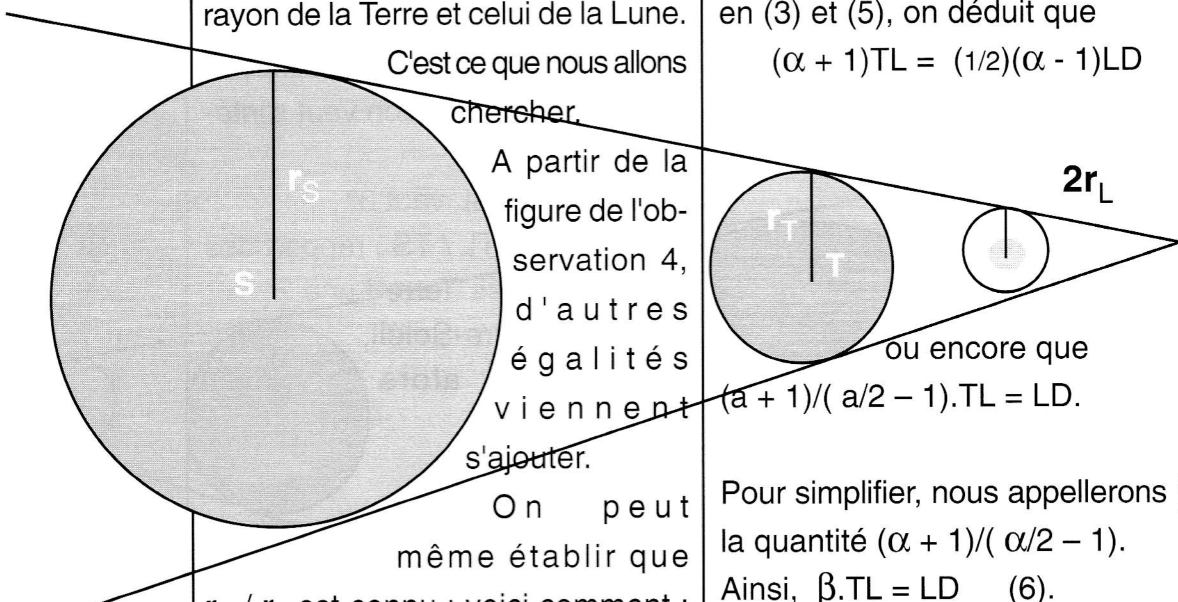
C'est donc dire que l'on connaît le rapport entre le rayon du Soleil et celui de la Lune (c'est le même que le rapport de leurs distances à la Terre).

Afin de simplifier les notations, nous écrirons :

$TS / TL = \mathbf{r}_S \ / \mathbf{r}_L = \alpha$

Il est peut-être possible de trouver aussi le rapport entre le rayon de la Terre et celui de la Lune.

C'est ce que nous allons chercher.



A partir de la figure de l'observation 4, d'autres égalités viennent s'ajouter.

On peut même établir que $\mathbf{r}_S / \mathbf{r}_L$ est connu ; voici comment :

S, T, L sont respectivement le centre du Soleil, de la Terre et de la Lune.

On voit, par exemple, que :

(1) $SD / LD = \mathbf{r}_S / 2.\mathbf{r}_L =$

$(1/2).(\mathbf{r}_S / \mathbf{r}_L) = (1/2).\alpha$

puisque $\alpha = \mathbf{r}_S / \mathbf{r}_L = TS / TL$

(2) $TS = \alpha .TL$

Regardez bien la figure et vous verrez que :

$SL = ST + TL$

qui peut aussi s'écrire, grâce à (2),

3) $SL = \alpha.TL + TL = (\alpha + 1)TL$.

On peut voir aussi que

$SL = SD - LD$.

Mais d'après (1) :

(4) $SD = (1/2)\alpha.LD$

d'où

(5) $SL = (1/2)\alpha.LD – LD$

$= (1/2)(\alpha - 1) LD$.

Si on compare les résultats écrits en (3) et (5), on déduit que

$(\alpha + 1)TL = (1/2)(\alpha - 1)LD$

ou encore que

$(a + 1)/(a/2 – 1).TL = LD$.

Pour simplifier, nous appellerons β la quantité $(\alpha + 1)/(\alpha/2 – 1)$.

Ainsi, $\beta.TL = LD$ (6).

Continuons, c'est un plaisir de manipuler comme ça des distances astronomiques...

Toujours sur la figure ci-dessus, on lit que :

$TD = TL + LD$

par (6) $TD = TL + \beta.TL$

$= (\beta + 1) TL$ (7)

A partir des équations (4) et (6) on déduit que :

$SD = (1/2)\alpha.LD = (1/2)\alpha\beta.TL$

On conclut donc que :

$SD = \alpha\beta.TL/2 \quad (8)$

Si on veut calculer le rapport SD / TD, on trouve, en utilisant (7) et (8), qu'il vaut

$(1/2)\alpha\beta / (\beta + 1)$.

N'oublions pas que α est connu, et que β l'est de ce fait.

Ainsi SD / TD est connu, c'est-à-dire qu'il a une valeur numérique bien précise que les Grecs disaient être compris entre 19/3 et 43/6.

Maintenant :

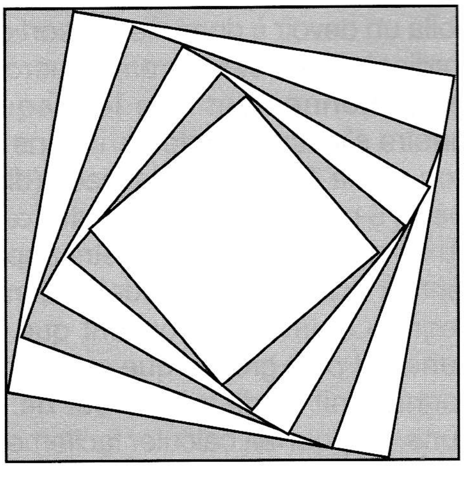
$SD / TD = \mathbf{r}_S / \mathbf{r}_T$ est connu,

$\mathbf{r}_S / \mathbf{r}_L$ est connu ainsi, c'est α,

$\mathbf{r}_T / \mathbf{r}_L = (\mathbf{r}_T / \mathbf{r}_S) / (\mathbf{r}_L / \mathbf{r}_S)$ est donc connu, appelons-le δ.

$\mathbf{r}_L = \mathbf{r}_T / \delta$.

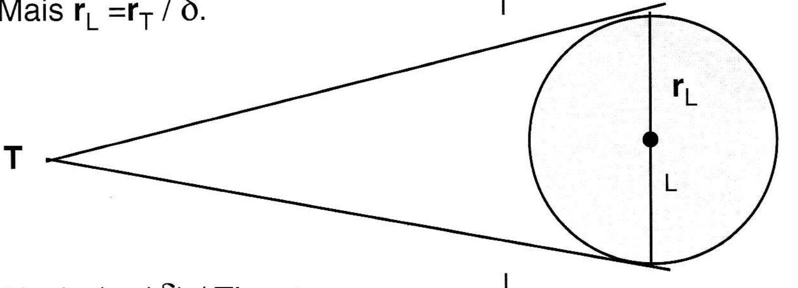
Il s'agit maintenant de voir comment ceci nous permet de calculer la distance Terre-Lune. C'est grâce à la première observation qu'on y arrive.



En effet :

tan 1° = $\mathbf{r}_T / TL$ peut être calculée.

Mais $\mathbf{r}_L = \mathbf{r}_T / \delta$.



Ainsi $(\mathbf{r}_T / \delta) / TL$ est connu

et $TL = \mathbf{r}_T$ / (terme connu x d)

ce qui exprime la distance Terre-Lune en fonction du rayon de la Terre.

Grâce aux résultats d'Eratosthène on connaissait le rayon de la Terre et de ce fait on connaissait maintenant la distance Terre-Lune.

Évidemment, cette méthode repose sur plusieurs approximations ce qui explique que l'on puissent obtenir une réponse différente de celle fournie par nos instruments les plus précis.

Vous aurez remarqué aussi que les connaissances de géométrie utilisées dans ces problèmes sont forts élémentaires : triangles semblables, proportions. Le peu de trigonométrie qui apparaît pourrait être éliminé facilement, en introduisant des considérations sur des triangles rectangles, familiers aux élèves.

Est à souligner tout le processus de mathématisation et de construction d'un modèle mathématique qui est sous-jacent à ces deux problèmes.