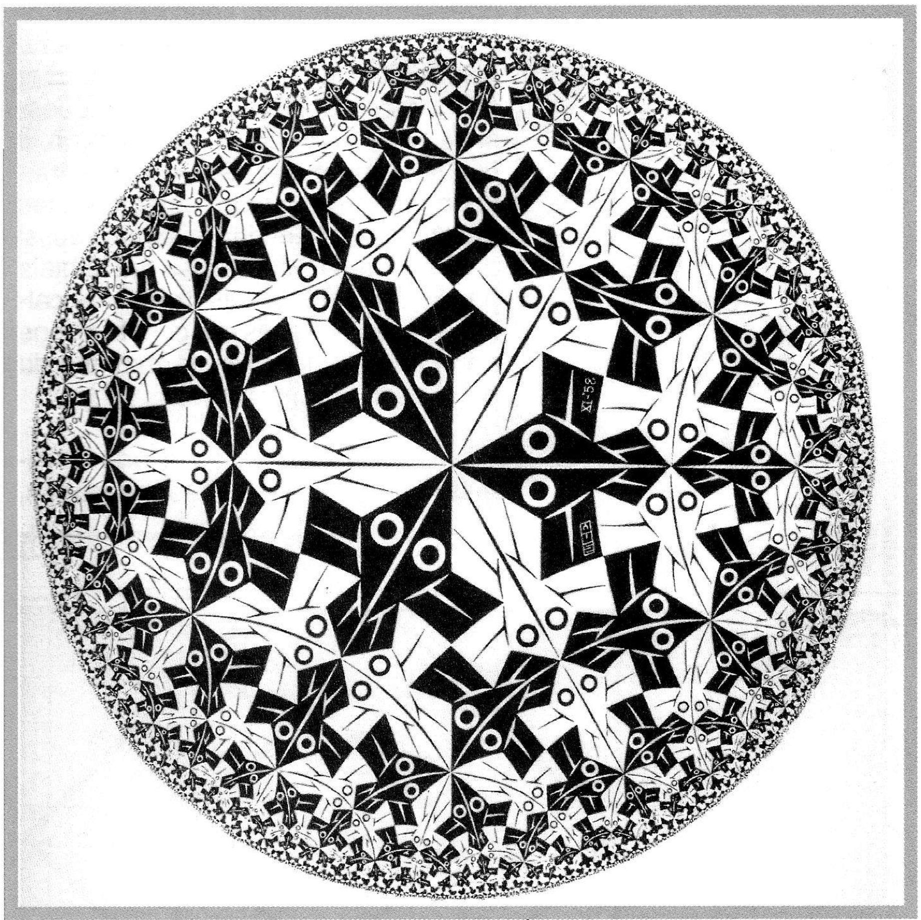
Suites et limites de suites

Claude HAUCHART - Louvain



L'étude des suites

Nous avons étudié la genèse des concepts de suite et de limite et les progrès correspondants de la pensée raisonnante chez des élèves du secondaire (et parfois d'école normale). Cette étude a été faite à partir d'un matériau bien déterminé : un lot de vingt-cinq problèmes posés dans des contextes divers (numérique, géométrique, cinématique...).

Par cette étude, nous avons cherché à mettre en évidence les raisons épistémologiques de la théorisation, et par là même, le sens de la théorie. Nous essayons d'illustrer un point de vue fréquemment défendu par Polya selon lequel l'acquis théorique directement visé (les suites et les limites) se double d'un acquis "méthodologique" qui le dépasse en importance : il s'agit d'un apprentissage de pratiques heuristiques, de modes de raisonnement et plus généralement de ce qui fonde la capacité de travailler mathématiquement.,

Polya :

"Il faut se mettre à l'eau pour apprendre à nager ; pour savoir résoudre des problèmes, il faut en résoudre.
Si vous désirez tirer Le meilleur parti de votre effort, cherchez dans chaque problème des traits caractéristiques qui puissent vous être utiles dans les problèmes futurs. Une solution que vous avez atteinte (par votre effort personnel ou que vous avez lue ou entendue, et que vous avez suivie avec un intérêt réel et soutenu) peut devenir pour vous un modèle, modèle que vous pourrez imiter avec avantage dans la résolution de problèmes analogues [...]. Je m'efforce, par tous les moyens disponibles, d'entraîner le lecteur à faire des problèmes et à réfléchir aux procédures et aux méthodes qu'il utilise. [...]. On devrait inculquer à l'étudiant en même temps qu'une somme d'information, un certain degré de savoir-faire. C'est pourquoi, le premier et principal devoir de l'enseignement des mathématiques dans les Lycées est de souligner la méthodologie dans la résolution de problème.
C'est ma conviction."

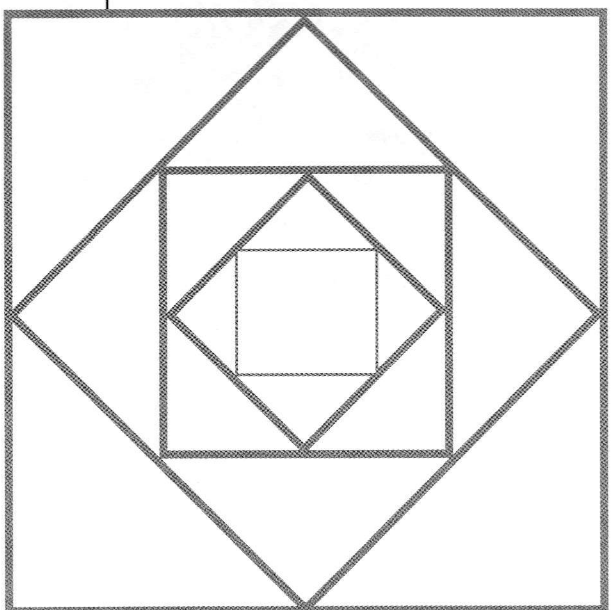
Georges Polya, (1967)

Enfin, sur un autre plan, nous testons l'idée de ne pas attendre qu'ils aient seize ans pour proposer aux élèves une première approche des processus infinis et des limites, mais de leur proposer bien plus tôt des problèmes mettant ces notions en jeu, et traitables sans grande formalisation. De cette manière, les élèves n'auraient pas à affronter en même temps et les

Le texte ci-contre est extrait d'une étude sur un enseignement des débuts de l'analyse (voir bibliographie).

premières difficultés liées à l'idée d'infini et de limite et les difficultés liées à la formalisation de ces notions. Quant à l'éternel problème du temps nécessaire pour parcourir le programme, il faut remarquer que les problèmes traités mettent en jeu non seulement les notions de suite et de limite mais aussi des matières très diverses par le biais par exemple de calculs d'aires, de calculs sur les fractions, de constructions géométriques, de transformations du plan, de la trigonométrie, ...

Cette idée de ne pas commencer de suite, par la formalisation,



nous la retrouvons notamment chez Kline et chez Freudenthal.

Kline :

"Avant qu'on puisse apprécier la formalisation précise d'un concept ou d'un théorème, on doit savoir quelle idée y est formulée et quelles exceptions ou quels pièges sa formulation doit essayer d'éviter. [...]. On doit donc être capable de s'appuyer sur une grande richesse d'expériences acquises avant de s'attaquer à la formulation rigoureuse. [...]. Comment La découverte peut-elle se produire quand on demande aux étudiants de travailler avec des idées déjà surchargées de sophistication et de raffinement ?"

M. KLine,(1977)

Freudhental :

"Est-ce parce qu'on y arrive seulement à seize ans, âge où l'on est supposé avoir déjà une certaine maturité mathématique, que l'analyse est abordée sur un mode formalisé dans la plupart des cas ? [...]. La reconstruction mentale d'aucune partie des mathématiques ne peut se passer d'une approche intuitive."

H. Freudenthal, (1973)

Les suites traitées

Voici quelques-uns des problèmes que nous avons proposés aux élèves.

Un zoom de carrés

Dans un grand carré, on construit un autre carré en joignant les milieux des côtés, ce qui fait apparaître quatre triangles rectangles.

On enlève ces quatre triangles du premier carré. On recommence la même opération sur le deuxième carré,ce qui en fait apparaître un troisième. On fait de même sur le troisième carré et ainsi de suite. Que se passe-t-il ?

Il s'agit ici plutôt d'un thème de réflexion (puisé dans E. Castelnuovo (1980) que d'un problème.

Séries géométriques de raison 1 / k

En travaillant sur les deux premières fiches, nous avons vu que :

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... + 1/2^n + ... = 1$

et

$1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + ... + 1/3^n + ... = 1/2$.

• Que pouvez-vous dire de la série $1/4 + 1/16 + 1/64 + ... + 1/4^n + ...$?

• Et après avoir trouvé la limite de la série :

$1/k + 1/k^2 + 1/k^3 + ... + 1/k^n + ...$
pour k = 2, 3 et 4, explorez d'autres valeurs de k en vous répartissant le travail. Comparez les résultats.
Arrivez-vous à une conclusion ?

La série harmonique

Après avoir étudié la famille de série 1/k + 1/k2 + l/k3 + ...,
nous abordons maintenant une nouvelle série connue sous le nom de série harmonique.

Considérez la suite :
1/2
1/2 + 1/3
1/2 + 1/3 + 1/4
1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5
1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6
. . . .

Si on continue à additionner ainsi, la somme
1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + ...
dépassera-t-elle 1 ? Et 2 ? Et 10 ?
Que vaut cette somme ?

Prolongement

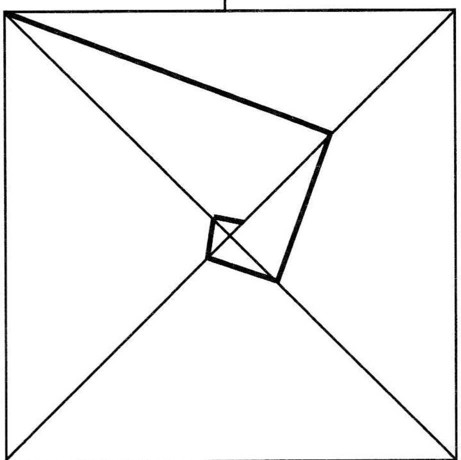
Vous avez démontré que la série harmonique tend vers l'infini et observé qu'elle croit très lentement. Pouvez-vous estimer un nombre de termes qui vous assure que la somme dépasse 10 ? Et que la somme dépasse 15 ? Et de manière générale, un nombre de termes qui vous assure qu'elle dépasse un nombre A donné ?

Un certain nombre de problèmes rapprochent deux situations à première vue analogues afin de faire émerger des contradictions. Ainsi, même quand les élèves ont déjà rencontré des séries convergentes, à d'autres moments ils restent persuadés que "si on ajoute toujours quelque chose de positif, ça tend nécessairement vers l'infini", c'est- à-dire que toute série à termes positifs tend vers plus l'infini. De la même manière, l'intuition que toute suite positive décroissante tend nécessairement vers zéro reste prégnante, même après que les élèves aient rencontré des contre-exemples.

Deux spirales dans un carré

Jusqu'ici, dans chacun de nos problèmes, nous avons étudié une suite à la fois. Nous allons maintenant en étudier deux et les comparer

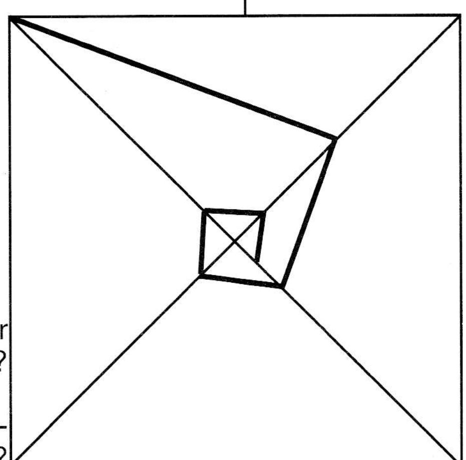
Fig. a.



Dans un carré dont la diagonale mesure 2, on dessine une spirale comme indiqué sur la Fig. a. Les distances de ses sommets successifs au centre du carré sont 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...

On dessine de même une deuxième spirale (voir Fig. b) mais cette fois les distances de ses sommets successifs au centre sont 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...

Fig. b.



1. Peut-on continuer ces deux spirales ?

2. Quelle est la longueur de chacune ?

3. Comparez ces deux problèmes et leurs résultats.

Des polygones emboîtés

Voici à nouveaux deux processus infinis qui vous feront sans doute penser à notre tout premier problème, celui du zoom de carrés.

a. Premier problème

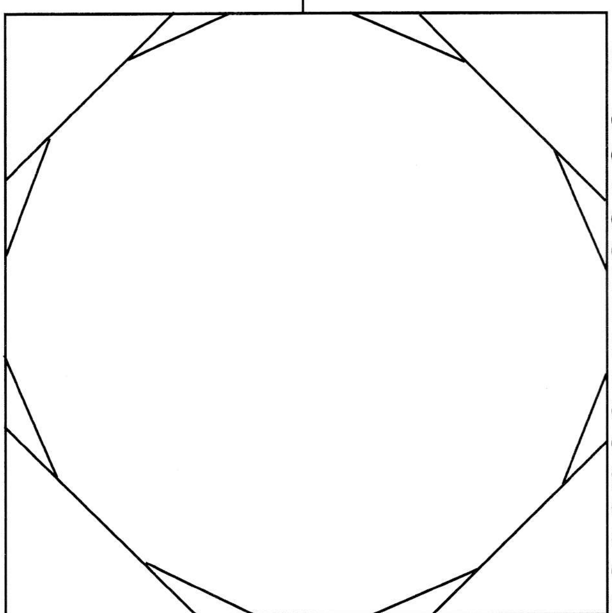


Fig. a.

On part d'un carré, à l'intérieur duquel on construit un octogone régulier, comme indiqué sur le Fig. a. À l'intérieur de cet octogone, on construit un 16-gone régulier, et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de côtés.

Que deviennent, si on continue, les aires des polygones ainsi construits ?

b. Deuxième problème

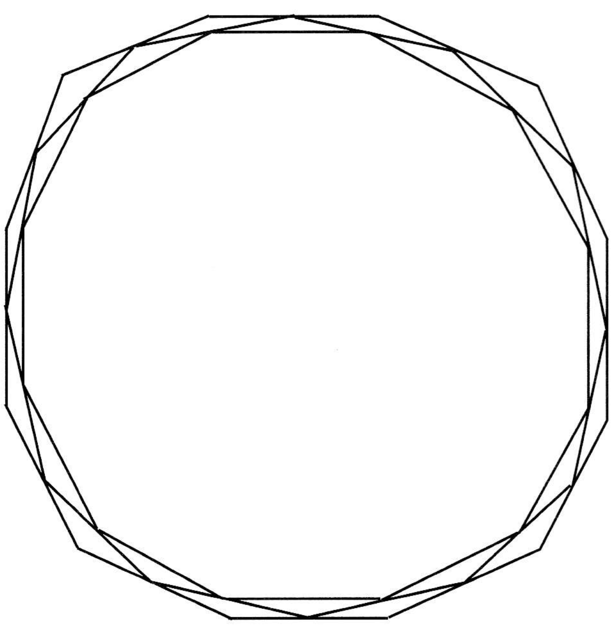


Fig. b.

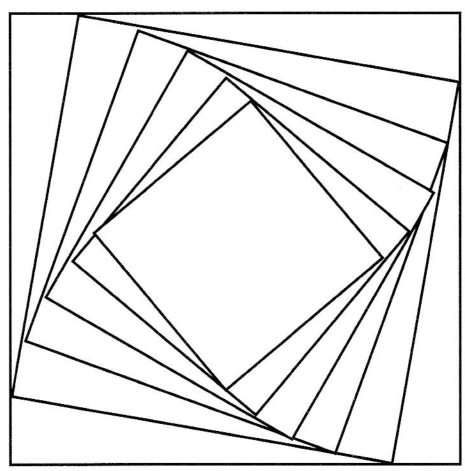
Dans un dodécagone régulier, on en dessine un deuxième en joignant les milieux des côtés du premier, puis un troisième en joignant les milieux des côtés du deuxième et ainsi de suite.

Si on continue, que deviennent les aires des dodécagones ?

c. Comparez ces deux problèmes et leurs résultats.

Des carrés tournants

On part d'un grand carré. On en trace un autre à l'intérieur en plaçant ses sommets comme indiqué sur la figure : chaque sommet est sur un côté du premier carré et à une distance égale à 1 cm d'un sommet de ce dernier. On place de la même façon un troisième carré dans le deuxième, puis un quatrième dans le troisième et ainsi de suite.



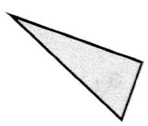
a. Jusqu'où va cette construction ?

b. Comparez ce problème des carrés tournants au problème du zoom de carrés et aux deux problèmes des polygones emboîtés.

Homothéties, spirales et coquillages

Les problèmes ci-après montrent que les suites et séries géométriques ont un lien naturel, en géométrie avec les homothéties et les similitudes, et dans la nature avec de nombreuses formes spirales telles que celles des coquillages.

1• Voici une figure constituée d'un triangle et d'un point 0.

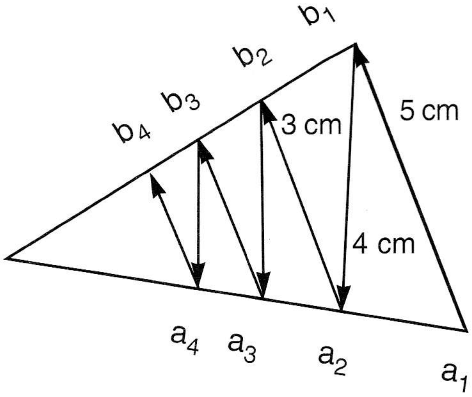


O •

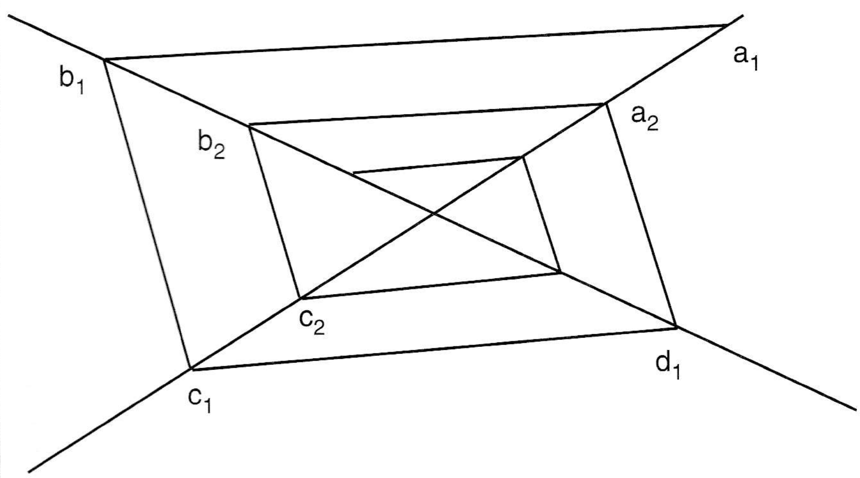
Construisez l'image du triangle par l'homothétie de centre O et de rapport 2/3. Ajoutez juste ce qu'il faut à la figure ainsi obtenue pour qu'elle devienne invariante par l'homothétie.

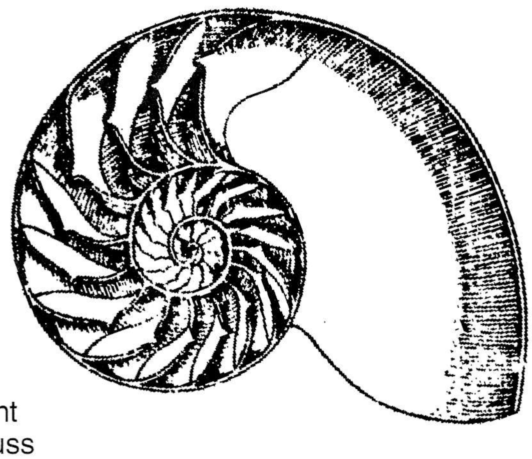
Le dessin tel que vous l'avez complété cache (S'il est correct!) beaucoup de suites géométriques. Trouvez-les.

2• Voici un zigzag $a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ a_3$...... Est-il de longueur infinie ?

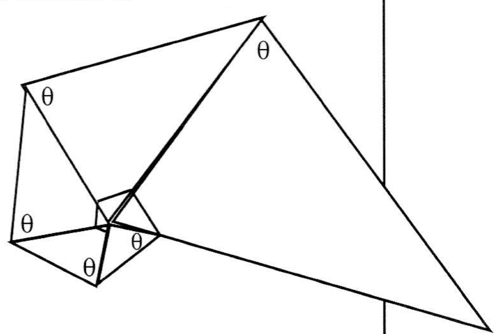


•. Même question pour la spirale $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ a_2\ b_2\ c_2\ d_2$......





3• On considère 5 demi-droites issues d'un point et dessinant 5 angles égaux autour de ce point comme sommet commun. On trace une spirale comme indiqué sur la figure, tous les angles θ étant égaux. Si on suppose cette spirale prolongée indéfiniment vers l'intérieur, mais auss vers l'extérieur, quelles sont les transformations affines du plan qui la laissent invariante.



• Quelles sont les transformations affines du plan qui laissent invariante la figure ci-dessus qui est le dessin en coupe d'un coquillage appelé *nautilus pompilius* ?

4• Considérons à nouveau la spirale de la question 3, mais en la supposant cette fois prolongée (indéfiniment) uniquement vers l'intérieur. Comment peut-on, en rajoutant quelque chose à cette figure, la transformer en une figure semblable, mais plus grande ?

• Même question pour le coquillage.

5• Nous avons étudié jusqu'ici des suites et des séries géométriques réelles (c'est-à-dire dont les termes sont des nombres réels). Rien n'empêche pourtant d'étendre cette théorie aux nombres complexes. Pourriez-vous par exemple étudier la suite géométrique :
$1, a, a^2, a^3, \ldots$ où $a = 4\,i/5$?

Et la série géométrique correspondante ?

Une balle rebondit

On laisse tomber une balle de ping-pong d'une certaine hauteur sur une table horizontale. Elle rebondit, et ses bonds deviennent de plus en plus petits. Puis elle s'arrête. Combien de fois a-t-elle rebondi?

Est-ce qu'elle s'arrête vraiment? Puisque ses bonds deviennent de plus en plus petits, est-ce qu'elle n'est pas, quand on la croit arrêtée, en train de faire encore des bonds petits, petits ?

Suites arithmétiques, suites géométriques

Le problème posé ici est celui de la comparaison des comportements de deux suites.

1• Comparez en détail les deux suites qui suivent (points de départ, vitesses de croissance, l'une est-elle toujours inférieure à l'autre ?, etc.) :

$a_1 = 1.000.000$ $b_1 = 3$

$a_2 = 1.000.000{,}3$ $b_2 = 3{,}4$

$a_3 = 1.000.000{,}6$ $b_3 = 3{,}8$

$a_4 = 1.000.000{,}9$ $b_4 = 4{,}2$

2• Même question pour les deux suites ci-dessous :

$a_1 = 1.000$ $b_1 = 1{,}01$

$a_2 = 2.000$ $b_2 = (1{,}01)^2$

$a_3 = 3.000$ $b_3 = (1{,}01)^3$

$a_4 = 4.000$ $b_4 = (1{,}01)^4$

....

N'importe quelle suite géométrique positive croissante finit-elle par dépasser n'importe quelle suite arithmétique ?

Critiquer la proposition suivante: de deux suites géométriques positives croissantes, celle qui a la plus grande raison finit toujours par dépasser l'autre, ceci quels que soient leurs premiers termes. Si elle est fausse, donnez-en des contre-exemples, si elle est vraie prouvez-la.

Vous avez établi que a^n tend vers zéro lorsque $o < a < 1$. A partir d'un certain indice, les termes a n de la suite peuvent donc être considérés comme de "bonnes approximations" de la limite o.

Pour la suite $(3/4)^n$, combien de pas faut-il pour que ces approximations passent de la précision 1/100 à la précision 1/1.000 ?
Et de $1/10^6$ à $1/10^7$?
Et de $1/10^7$ à $1/10^8$?

Mêmes questions pour la suite $(0{,}99)^n$.

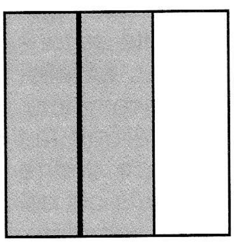
Après avoir décrit le sujet de notre étude et fournit un échantillon des problèmes posés aux élèves, nous consacrons la suite de l'exposé à l'analyse de quelques points épistémologiques particuliers.

Seuil épistémologique

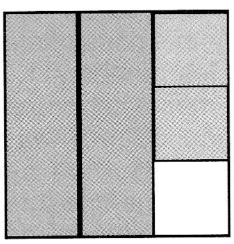
Abordons-le par le biais d'un exemple. Cet exemple montre deux manières radicalement différentes de traiter la série :

$$\sum_{n=1 \text{ à } +\infty} 2/3^n = 2/3 + 2/9 + 2/27 + \ldots$$

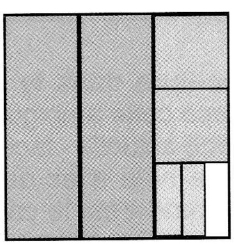
Une première démarche consiste à construire la série dans un carré :



2/3



2/3 + 2/9



2/3 - 2/9 + 2/27.

Ceci fournit à vue le résultat

$$2/3 + 2/9 + 2/27 + \ldots = 1$$

que les élèves débutants énoncent par quelque chose comme :
"2/3 + 2/9 + 2/27 + etc. sera finalement égal à 1".

Une deuxième démarche est celle qui consiste d'abord à définir le concept de suite réelle comme fonction de IN * (ou dé IN), dans IR, pour celui de série associée à une suite, puis celui de limite d'une suite et d'une série, pour ensuite étudier les propriétés algébriques (limite d'une somme, ...) des limites.

Pour notre exemple, on a donc une application

(u_n) : IN* -> IR $\qquad$ $n \to 2/3^n$

une application

(s_n) : IN* -> IR $\qquad$ $n \to \sum_{i=1 \text{ à } n} 2/3^i$

par ailleurs on a les résultats suivants

$$\sum_{i=1 \text{ à } n} 2/3^i = 2/3 \bullet \frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3}$$

$$\lim_{n \to \infty} 1/3^n = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 2/3 \bullet \frac{1}{1 - 1/3} = 1$$

Ainsi donc, 2/3 + 2/9 + 2/27 + ... = 1.

Pour une élève qui aborde l'analyse, il y une distance énorme entre des deux voies d'approche. C'est cette distance que nous appellerons seuil épistémologique. Plus généralement, nous désignerons ainsi l'écart impressionnant, le seuil, entre une notion relevant de la pratique quotidienne et bien adaptée à cette pratique, et le concept mathématique correspondant, lui-même bien adapté à la pratique du mathématicien. Il est clair que ce n'est pas pour traiter un cas comme celui de la série $\Sigma\, 2/3^n$ que les concepts formalisés de suite, de série et de limite ont été créés.

Envisageons maintenant ce qui se passe pour un élève débutant qui au moment où il rencontre des concepts formalisés pour la première fois, n'a en tête que des exemples semblables à celui de la série $\Sigma\, 2/3^n$.

Premièrement, il va vraisemblablement se demander ce qu'on lui veut et de ne pas comprendre les raisons, ni le sens profond de ces définitions. Et deuxièmement, on aura dénaturé complètement l'idée première qu'il peut se faire d'une série (idée première qui, pensons-nous, si elle est censurée avant même de pouvoir s'exprimer, a toutes les chances de resurgir insidieusement à un moment ou l'autre).

Évolution de la notion de série

Puisque nous parlons de dénaturation de l'idée première de série, voyons ce que nous avons observé chez les élèves, à savoir : Qu'est-ce qu'une série pour eux, quand ils en ont rencontré d'abord dans des problèmes, sans définitions préalables ?

Essentiellement, une série est perçue comme une somme.

Et en tant que somme, elle possède une valeur, celle qu'on obtiendrait si on continuait à additionner indéfiniment. **Une série est donc un nombre.** Et bien loin,de leurs pensées est l'idée qu'il puisse exister des séries divergentes. Dans la mesure où ils y voient un nombre, les élèves penchent du côté de **la facette infinie** actuelle de la série, envisageant des sommes d'un nombre infini de termes et même souvent possédant un infinième terme, comme semblables aux sommes finies, les seules qu'ils connaissent.

Bien entendu les élèves savent bien qu'ils n'épuiseront jamais tous les termes de cette "somme", qu'il s'agit d'une somme en perpétuel devenir. C'est ici la **"facette infini potentiel"** de la série qui apparaît.

Les élèves oscillent ainsi sans forcément s'en rendre compte de la facette actuelle de la série à sa facette potentielle. Au passage, signalons les effets de notation et de terminologie s'il est vrai que l'on écrit parfois :

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/2^n + ... = 1$

On n'écrit jamais $1/2^n = 0$
ni

$1/2, 1/4, 1/8, ..., 1/2^n ... = 0.$

Voici comment Hilbert (1926) définit les infinis potentiels et actuels "En analyse, nous traitons l'infiniment petit et l'infiniment grand seulement comme une notion limite - comme quelque chose qui devient, qui naît, qui est en train d'être produit - c'est-à-dire que nous traitons, comme on dit, l'infini potentiel. Mais ce n'est pas l'infini réel lui-même. Celui-ci nous l'avons quand, par exemple, nous considérons la totalité de tous les nombres 1, 2, 3, 4, ... en elle-même comme une entité complète, ou quand nous considérons les points d'un segment de droite comme une totalité d'objets qui est actuellement donnée et complète. Cette sorte d'infini est appelé l'infini actuel."

L'écriture dans le cas de la série renforce cette ambiguïté ontologique (facette actuelle - facette potentielle) : on la note avec des + et un signe =, comme c'est le cas pour les sommes finies. Par ailleurs les points de suspension rappellent la facette potentielle. Notons aussi l'effet de la terminologie : on appelle somme de la série la limite de cette dernière, renvoyant une fois encore l'idée de série à celle de somme.

Malgré cette ambiguïté, beaucoup de séries sont traitables. Par exemple, on obtient la valeur limite par un bon emboîtement, un puzzle infini dont nous venons d'avoir un exemple

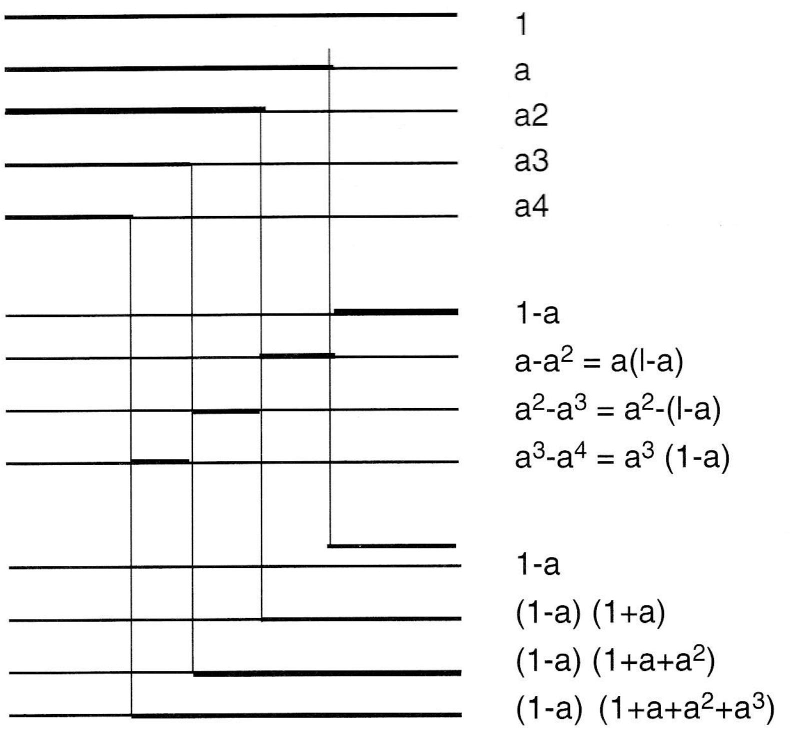
immédiat, mais dont il existe aussi des exemples moins immédiats.
Ainsi, $1 + a + a^2 + ... = 1 / (1 - a)$ car, comme le suggère le dessin ci-dessous,

$(l - a) + (a - a^2) + (a^2 - a^3) + ... = 1$

ce qui s'écrit aussi :

$(l - a)(l + a + a^2 + . . .) = 1.$

encore de la série comme étant une suite de sommes partielles mais bien de la série comme étant approximée par une suite de sommes partielles. Nous allons voir dans quelles circonstances cette idée primitive de la notion de série s'avérera insuffisante, provoquant dès lors la définition de série que nous connaissons.



Ainsi donc, un bon nombre de séries sont traitables malgré leur ambiguité ontologique. Et s'il est vrai que dans c traitement par les élèves on voit facilement poindre l'écriture générale de la n ième somme partielle, il s'agit bien là d'un outil permettant de voir plus clairement la valeur de la série et non pas de quelque chose qui remettrait en question l'idée de série comme somme d'un nombre infini de termes.

Il ne s'agit absolument pas

Mais par rapport à la perception première, c'est un saut qui dénature ontologiquement leur objet de pensée, en remplaçant ce qui est perçu comme une somme par tout autre chose : une suite de sommes de plus en plus longues.

Venons-en maintenant aux circonstances qui dans notre lot de problèmes ont provoqué cette mise au point de la notion de série. Voici les questions que nous avions posées aux élèves.

Nouveau regard sur les nombres

Les questions suivantes vous feront découvrir une parenté cachée entre les séries et les nombres.

1. Combien le développement décimal exact de 13/25 comporte-t-il de décimales ?

2. Même question pour 13/21.

3. La suite qui suit a-t-elle une limite ?

0,3 - 0,39 - 0,393 - 0,3939 - 0,39393

Si oui, cette limite peut-elle être écrite sous forme de fraction ?

4. Même question pour la suite

0,465 - 0,465465 - 0,465465465

5. Même question pour la suite

0,5 - 0,59 - 0,599 - 0,5999

La première question leur rappelle que certaines fractions s'écrivent sous la forme d'un décimal limité. La seconde leur rappelle que pour d'autres fractions, l'algorithme de la division entre en oscillation, engendrant ainsi un décimal illimité périodique.

Ainsi écrits, de tels nombres (les illimités périodiques) sont encombrants, mais l'habitude est prise dans la pratique de les limiter à quelques décimales utiles, comme le font les calculatrices.

Ils sont ainsi banalisés, ramenés aux dimensions des décimaux limités comme de simples résultats de mesures, et affectés comme ces derniers d'erreurs réputées négligeables. Les questions suivantes vont en refaire des objets insolites.

Les élèves s'aperçoivent d'emblée que la suite de la question 3 amorce le décimal illimité périodique 0,393939.

Certains ont tendance à donner celui-ci comme limite mais ils hésitent:
- d'une part 0,393939 ... est un nombre; il n'y a rien d'étonnant à ce qu'il soit une limite;

- d'un autre point de vue, étant donné les points de suspension 0,393939 ... semble bien lui aussi tendre vers quelque chose sans y arriver jamais.

Cet objet étrange 0,393939 est-il une limite ou une suite ?
Et s'il est une suite, laquelle ?

0,3 0,39 0,393 0,3939 ...

ou bien,

0,39 0,3939 0,393939 ...

ou encore une autre ?

Les élèves sont comme piégés par l'ambiguïté du décimal illimité périodique : ils vont et viennent entre ses deux facettes (la suite et la limite de la suite).

Parfois aidés par nous, des élèves se souviennent d'avoir étudié auparavant les séries Σ $1/k^n$ et réécrivent 0,393939 ... sous la forme

$$39/10^2 + 39/10^4 + 39/10^6 + ...$$

ce qui ne résout pas le problème : ils ne savent toujours pas si 0,393939 ... est une suite ou une limite et si oui, laquelle ?

C'est ce moment que nous avons choisi pour lever la confusion et pour ce faire : faire apparaître explicitement la suite des sommes partielles afin de la distinguer de sa limite. Ainsi apparaissent clairement les liens et les distinctions entre les trois notions *de suite, de séries et de limite.* Une série est définie comme une suite de sommes partielles, cette fois de manière significative.

Nouveau concept de nombres

Cette mise au point a d'autres effets que la construction des trois concepts de suite, série et limite.

• Bien sûr, l'idée de nombre (ici de rationnel) s'approfondit. On croirait à observer certains élèves, même parmi les plus âgés, qu'ils découvrent soudain un lien qu'ils n'avaient pas soupçonné entre les fractions qui leur sont pourtant familières et les décimaux illimités périodiques, toujours intrigants bien que familiers eux aussi.

• Par ailleurs la vision séparée que les élèves avaient de deux domaines des mathématiques s'ébranle soudain : voilà que les nombres et les séries entretiennent entre eux une relation étroite. Pour beaucoup d'élèves c'est un renversement : les nombres étaient conçus comme le matériau premier et pur à partir duquel on construit des séries; on ne se posait pas de problèmes à leur propos. Or voici que ces objets primitifs s'avèrent eux aussi être des objets mathématiquement construits et donc fort abstraits. Cette expérience mentale des élèves, la découverte inattendue de liens unissant les nombres aux séries nous a ramenés à deux citations. La première, de Bourbaki, montre que cette expérience que nous avons observée chez des élèves ressemble étonnamment à celle du chercheur en mathématiques.

"... chaque structure mentale apporte avec elle son Langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières L ... 1; et pour Le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau Le paysage mathématique où il se meut." (Bourbaki - 1948)

La seconde, de Bertold Brecht, montre l'effet d'une irruption de l'insolite dans le banal, ce qu'il appelle distanciation et qui provoque un regard nouveau sur les choses et peut amener une nouvelle compréhension.

"C'est ce que font, et depuis longtemps, les hommes de science quand ils observent et amènent à observer tels phénomènes (tes oscillations des pendules, les mouvements des atomes, ...). Pour comprendre une chose, ils font comme s'ils ne La comprenaient pas; pour découvrir une loi, ils mettent les processus en contradiction avec l'idée traditionnelle qu'on se fait d'eux; de la sorte, ils font ressortir le caractère inouï et particulier du phénomène étudié.

Ainsi certaines évidences ne se comprennent plus d'elles-mêmes, ce qui, à dire vrai, a pour objet de les faire véritablement comprendre [...].

Ce qui va de soi, c'est-à-dire la forme particulière qu'a prise dans notre conscience L'expérience quotidienne, s'abolit Lorsque son évidence est niée par L'effet de distanciation et transformée ensuite en une nouvelle compréhension. [...].

Car ce qui est depuis longtemps inchangé paraît inchangeable [...]. Pour que toutes ces choses données apparaissent comme douteuses, il faudrait pouvoir porter sur elles ce regard étranger avec lequel Galilée observa un lustre qui oscillait.
Lui, ces oscillations l'étonnèrent, comme s'il ne pouvait les expliquer, et c'est ainsi qu'il découvrit que le mouvement pendulaire obéissait à des lois. C'est ce regard, aussi difficile que productif, que le théâtre doit susciter par ses reproductions de la vie en commun des hommes. Il doit contraindre son public à l'étonnement, et y parvient à l'aide d'un mode de jeu qui distancie le familier."

Extraits de B. Brecht

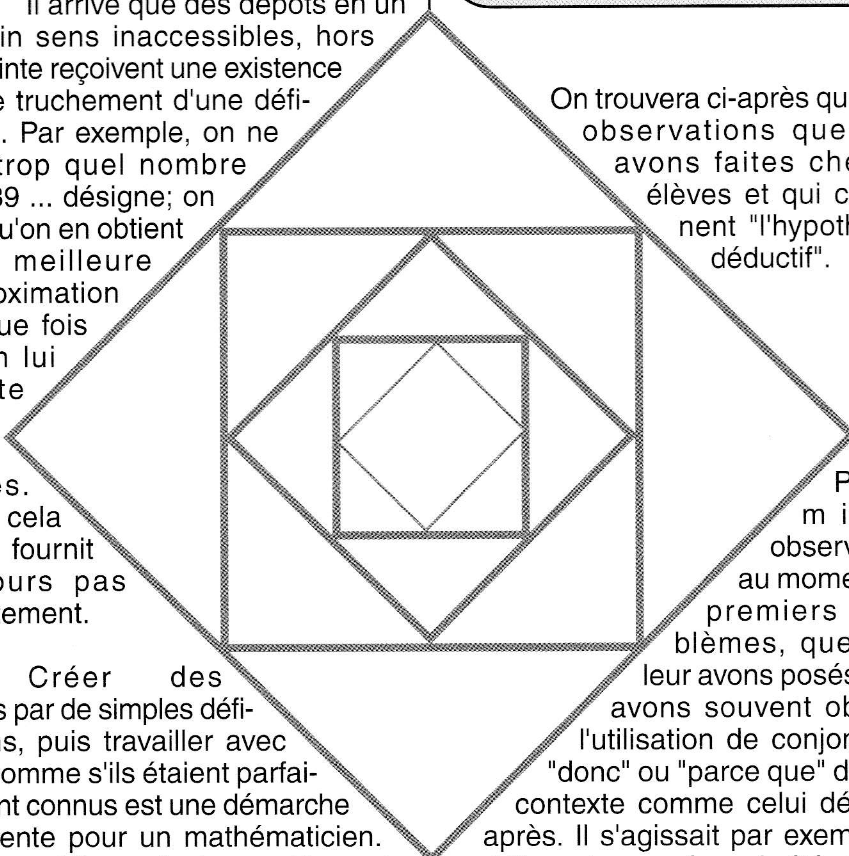
"Les oscillations d'un lustre étonnèrent Galilée, comme s'il ne pouvait les expliquer. Et c'est ainsi qu'il découvrit que le mouvement pendulaire obéissait à des lois. C'est ce regard, aussi difficile que productif, que le théâtre doit susciter par ses reproductions de la vie en commun des hommes. Il doit contraindre son public à l'étonnement, et y parvient à l'aide d'un mode de jeu qui distancie le familier."

Extraits de B. Brecht
(Le petit Organon,
Écrits sur le théâtre,
l'Achat du cuivre),
cité par H. Bascis, (1984)

Après ces citations, revenons à ce qui nous occupait, à savoir les conséquences de la mise au point de la notion de série. Nous avons déjà cité deux points : le lien retrouvé entre les fractions et les décimaux illimités périodiques, le lien entre les nombres et les séries.

• Il y a davantage : un pas vers la définition abstraite des nombres,

Il arrive que des dépôts en un certain sens inaccessibles, hors d'atteinte reçoivent une existence par le truchement d'une définition. Par exemple, on ne sait trop quel nombre 0,3939 ... désigne; on sait qu'on en obtient une meilleure approximation chaque fois qu'on lui ajoute des décimales. Mais cela ne le fournit toujours pas exactement.



Créer des objets par de simples définitions, puis travailler avec eux comme s'ils étaient parfaitement connus est une démarche fréquente pour un mathématicien. Pour un élève, c'est une démarche abstraite et difficile: à ses yeux, on ne règle pas par une définition le problème de savoir ce qu'est un nombre perçu comme inaccessible, ni ce à quoi il ressemble. Agir de la sorte lui donne le sentiment de "travailler en l'air", de devoir trop "assumer". Nous reparlerons de ces difficultés et de ce sentiment à propos de 1'"hypothético-déductif".

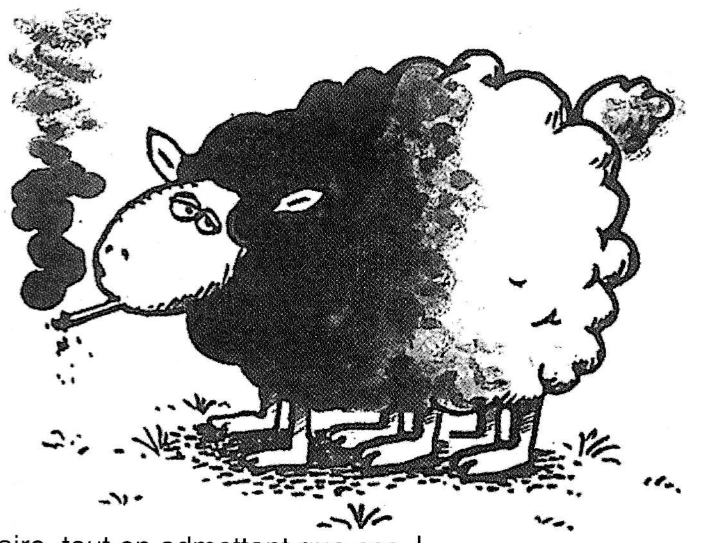
Enfin, la manière dont le concept de série s'est mis au point illustre que ce n'est pas la notion de série, ni celle délimite, ni encore celle de nombre qui évolue chacune dans son coin, mais que toutes ces notions bougent les unes avec les autres et s'adaptent les unes aux autres. (À propos de cette interdépendance, lire I. Lahakos (1976).

L'hypothético-déductif

On trouvera ci-après quelques observations que nous avons faites chez les élèves et qui concernent "l'hypothético-déductif".

Première observation : au moment des premiers problèmes, que nous leur avons posés, nous avons souvent observé l'utilisation de conjonctions "donc" ou "parce que" dans un contexte comme celui décrit ci-après. Il s'agissait par exemple du problème des carrés emboîtés (Fig. 1) pour lequel les élèves énoncent "les carrés tendent vers le centre parce que les aires sont égales à 1/2, 1/4, 1/8, ...".

Et il nous est apparu que ce qui se passait était plutôt ceci premièrement, ils ont, a priori, le sentiment d'une limite nulle; deuxièmement, ayant ce sentiment en tête, et ne pensant qu'au problème particulier qui les occupe, ils essayent d'argumenter. Ceci les amène à évoquer des propriétés de la figure qui vont dans le sens de ce qu'ils veulent établir (ici la limite nulle).



Ainsi, à notre meilleur jugement, ils perçoivent deux faits comme corrects, et l'un renforce l'autre. Ils obtiennent ainsi une sorte de confirmation que l'un et l'autre sont corrects, et non vraiment une déduction de l'un à l'autre.

Après cette première observation, voyons ce que nous entendons par *hypothético-déductif*. L'hypothético-déductif consiste à envisager des hypothèses et à considérer des enchaînements comme "Si ceci se passe, alors cela se passe" c'est-à-dire des propositions du type "p implique q" indépendamment des valeurs de vérité de p et de q. Cet hypothético-déductif, Piaget (1978), l'appelle aussi "déduction formelle".

p ==> q
si p alors q

Et il en dit ceci : "elle consiste à tirer les conséquences, non pas d'un fait d'observation directe, ou d'un jugement auquel on adhère sans réserve (et que l'on incorpore ainsi à la réalité telle qu'on la conçoit), mais d'un jugement que l'on assume simplement, c'est-à-dire que L'on admet sans y croire, pour voir ce qu'il comporte. Il faut, dit Piaget, pour raisonner formellement, "que l'on parvienne à rester sur le plan de la pure assomption sans revenir subrepticement au plan de la croyance propre ou de la réalité immédiate. La déduction,pour être formelle, doit donc se détacher du réel et se placer sur le plan du pur possible, qui est par définition, le terrain de l'hypothèse."

Si un mouton a six pattes

Pour illustrer ce point de vue, Piaget donne encore l'exemple suivant. "Si on dit à un enfant : *Admettons que les moutons aient 6 pattes. Combien y aura-t-il de pattes dans une cour où il y a 15 moutons ?*, il arrive fréquemment que l'enfant se refuse à conclure parce qu'il ne peut "assumer" l'hypothèse. Nous-mêmes, au contraire, tout en admettant que ces prémisses soient absurdes, nous saurons fort bien raisonner sur elles et conclure combien il y aura de pattes dans la cour. C'est que nous distinguons la nécessité réelle ou empirique (les moutons ne peuvent avoir six pattes) et la nécessité formelle ou logique (si les moutons avaient six pattes, ...)". Voilà donc ce que dit Piaget à propos de l'hypothético-déductif. Nous avons observé qu'il n'est pas nécessaire que les prémisses soient absurdes pour qu'il soit difficile de les assumer et qu'il est déjà difficile d'assumer des prémisses simplement arbitraires et de raisonner sur elles comme si on y croyait.

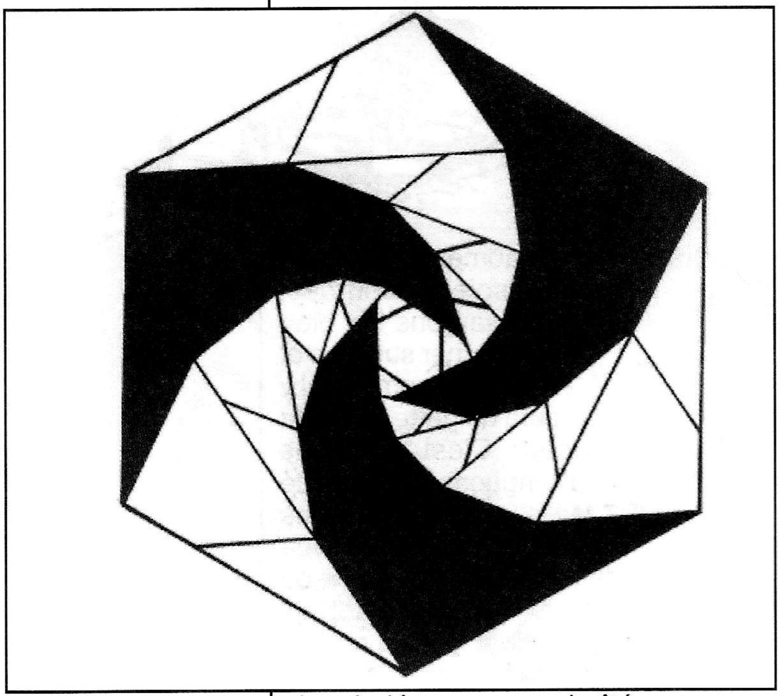
L'hypothético-déductif illustré

Nous avons déjà évoqué la difficulté d'«assumer» à propos de la définition des nombres (par exemple, rendre accessible par le truchement d'une définition un nombre qui est perçu comme inaccessible).

Nous allons maintenant retrouver une difficulté de ce type dans le cas d'une démonstration. Celle dont nous allons parler est issue de la situation suivante :

Des mille-gones

Parmi les problèmes que nous avons travaillés jusqu'à présent, souvenez-vous des carrés emboîtés et



des dodécagones emboîtés

Que se passerait-il si nous considérions maintenant des million-gones emboîtés de la même façon ? Et des milliard-gones ?

Une première remarque s'impose : d'un point de vue mathématique les trois suites (celles des carrés, des dodécagones et des million-gones) renvoient à la même situation (une suite géométrique positive décroissante). Par contre, d'un point de vue intuitif elles sont bien différentes. De manière générale si l'on demande à quelqu'un ce qui se passe dans un processus infini si à chaque étape on enlève au moins la moitié de ce qui reste, il vous répondra sans hésiter que la suite tend vers zéro.

Par contre, si à chaque étape on enlève moins de la moitié, la perception de la limite nulle est instable selon les individus et selon le contexte dans lequel la question est posée. Ainsi pour les dodécagones et pour les million-gones les élèves hésitent : d'une part ils ont encore en tète l'idée que toute suite positive décroissante tend vers zéro et d'autre part la lenteur de décroissance leur fait douter de la limite nulle. Si nécessaire, pour accentuer le doute et provoquer la nécessité d'une démonstration, le professeur a joué le jeu suivant : après avoir annoncé qu'il va dessiner un milliard-gone au tableau, il dessine un cercle; puis il annonce qu'il va dessiner un second milliard-gone et ... il repasse sur le cercle. Enfin, il se retourne vers la classe et demande: et alors ?

Je le crois, mais ...

Pour nous ce problème est immédiat. Il s'agit de montrer que

$a_n \to 0$ pour $0 < a < 1$.

(On prend $\varepsilon > 0$, quelconque, et on montre que $(1/a)^n > 1/\varepsilon$ à partir d'un certain n en utilisant le fait que 1/a est de la forme $1 + r$, avec $r > 0$ et que :

$$(1 + r)^n > (1 + nr).$$

Pour les élèves, la démarche à suivre n'est pas si banale que ça.

Une première étape puisqu'ils étaient dans le doute a été de poser une conjecture :

ici $\lim a_n = 0$ pour $0 < a < 1$.

Entrer dans le jeu d'une conjecture à démontrer présente des difficultés pour qui n'en a pas l'habitude. En effet, supposons que A soit la conjecture à démontrer.

La démarche est du type suivant :

1- je crois bien que A est vraie;

2- je n'en suis pas tout à fait sûr;

3- donc, je vais essayer de démontrer;

4- je vais donc me concentrer sur "A est vraie", mon objectif; mais pour démontrer, je ne pourrai utiliser "A est vraie"; donc je dois d'une certaine manière faire abstraction de mon objectif.

À la fois le '*je crois bien" et le "je ne suis pas sûr" doivent être assez forts chez l'individu sans quoi il n'éprouve pas le besoin de démontrer. Tout comme il peut être difficile dans une déduction formelle d'assumer simplement l'hypothèse, il peut être difficile ici de considérer simplement de manière neutre la proposition que l'on veut démontrer (en gommant notamment les intuitions, les a priori qui l'ont d'abord constituée mentalement). La difficulté est de les gommer dans le raisonnement formel et en même temps de s'en inspirer pour deviner des pistes de démonstration.

Après la conjecture, considérons la démonstration proprement dite. Partant de la proposition que constitue la conjecture, elle a consisté a essayer de remplacer cette dernière par une autre plus maniable, plus accessible et qui l'entraîne; puis celle-ci par une autre, et ainsi à plusieurs reprises, de sorte que de la dernière on puisse revenir à la première et la prouver.

Dans notre exemple, on cherche à voir si les aires des milliongones tendent vers zéro, c'est-à-dire si la suite

$$A.(\cos \pi/10^6)^n$$

tend vers zéro.

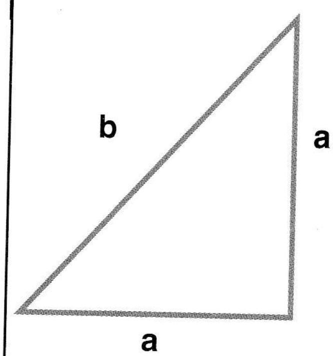
La démarche rebondit comme suit :

• Trouver une proposition plus facile à démontrer et dont on pourrait déduire la limite nulle de $A.(\cos \pi/10^6)^n$ (la calculatrice n'était pas d'un grand secours car elle affichait 1 pour cos ($\pi/10^6$)).

• Si on arrive à montrer que $A.a^n$ tend vers zéro quand a est un nombre entre 0 et 1, alors c'est gagné. Cherchons donc à montrer que $A{\bullet}a^n$ tend vers zéro dans ces conditions (généraliser pour simplifier).

- Mais si on arrive à montrer que a^n tend vers zéro quand a est entre 0 et 1, on arrive alors à démontrer que $A.a^n$ tend vers zéro - •••
et ainsi de suite en passant encore par des propositions concernant les suites $(l - x)^n$, A/b^n, $1/b^n$, b^n ou encore $(1 + x)^n$ où x représente un nombre strictement positif et b un nombre strictement supérieur à 1.

Cette démarche de la recherche, spontanée mais difficile car on travaille à chaque étape sur du non sir (la conjecture) est analogue à t'analyse telle qu'on la trouve définie en tant que méthode chez Euclide. L'analyse qui correspond à la recherche de la démonstration fonctionne par régressions successives à partir de la thèse jusqu'au moment où l'on obtient un axiome ou une propriété connue. Elle S'oppose à ta synthèse qui parcourt le chemin inverse : partant de la propriété à laquelle l'analyse a finalement abouti, elle établit la thèse par déductions successives.



$2a^2 = b^2$

Des acquis méthodologiques

Ainsi donc, les élèves ont reconstruit les premiers éléments de la théorie des suites en partant de problèmes posés dans des contextes divers. Au terme de ce travail, leur acquis ne se borne pas à ces éléments théoriques. Leurs expériences de recherche ont développé chez eux une expérience de la recherche qui déborde les suites et les limites.

Si la théorie avait été enseignée d'abord, les occasions de progrès méthodologiques auraient été moins nombreuses. Car alors, il faut moins chercher un chemin, la voie est tracée. L'autoroute théorique peut cacher le paysager empêcher l'initiative, bloquer l'imagination.

Nous terminons cet exposé en relevant quelques points épistémologiques dont on ne saurait exagérer l'importance. Le prix à payer pour ces acquis méthodologiques est celui d'un effort difficile : il n'est pas aisé de se passer d'une théorie qui serve de guide et de secours. L'essentiel est que les élèves s'y essayent, qu'ils apprennent à discerner ce qui est clair de ce qui ne l'est pas, ce qui est résolu de ce qui ne l'est pas, qu'ils arrivent à ne pas craindre leurs erreurs et à ne pas s'en décourager, mais au contraire à prendre appui sur elles pour en tirer des résultats positifs.
Voici donc ce relevé bien sûr incomplet:

- Évaluer et comparer, selon les nécessités, divers supports de pensée : segments bout-à-bout, carré qu'on remplit progressivement, fractions amenées à la forme la plus suggestive, nombres décimaux traités par calculatrice, symboles littéraux.

- Clarifier certaines choses, les amener dans une zone d'évidence par,un changement approprié de point de vue ou d'outil :
a) transformer l'espace dans lequel on travaille (passage de x à 1/x);
b) se ramener d'une suite à une autre par une majoration ou une minoration;
c) embrayer la structure multiplicative sur une suite se présentant naturellement de manière additive.

- Reconnaître une structure sous un vêtement compliqué, hérissé de symboles qui brouillent la vue.
- Discerner le pouvoir éclairant d'un cas particulier au milieu d'une théorie générale.
- Recourir à bon escient au raisonnement par l'absurde, par récurrence.
- Ajuster un procédé de pensée connu à une situation nouvelle.

- Décentrer sa pensée pour résoudre un problème, viser à côté de la cible pour arriver dedans.

- Devenir attentif, à force d'en avoir découvert par hasard, à de surprenantes parentés de structure.

- Réaliser que la théorie se structure parfois, sinon souvent, autrement que l'intuition. La théorie est tout autre chose qu'une intuition habillée scientifiquement.

- Apprendre à parcourir mentalement son propre cheminement vers une solution, en y repérant les difficultés, les fausses pistes, les moyens de résolution.- Étendre l'objet de sa réflexion. "Est-ce toujours comme ça" est une bonne question conduisant à confronter des cas, généraliser, classer.

Bibliographie

• H. Bassis, Je cherche,donc j'apprends! Ed. Sociales, Paris 1984.
• N. Bourbaki, L'architecture des mathématiques, dans F. Le Lionnais (Ed.), Les grands courants de la pensée mathématique, Cahier du Sud, 1948.
• I. Lakatos, Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery, Cambridge Univ. Press, 1976.(trad. en fr.)
• E. Castelnuovo, La mathématique dans la réalité, Cedic, Paris, 1980.
• H. Freudenthal, Mathematics as an educaticnal task, D. Reidel, Dordrecht, 1973.
• C. Hauchart, Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite, dissertation doctorale, 1985.
• D. Hilbert, Über das Unendliche, Mathematische Annalen 95 (1926),.
• M. Kline, Calculus, an intuitive and physical approach, J. Wiley, New York, 1977.
• J. Piaget, Le jugement et le raisonnement chez l'enfant, Delachaux et Niestlé, Paris, 1978.
• G. Polya, La découverte des mathématiques, Dunod, Paris 1967.