D'empilements en empilements, de surprenantes mathématiques

Marcel Berger, Paris

Marcel Berger est Directeur de recherche honoraire du CNRS. Il a été Directeur de l'IHES, Institut des Hautes Études Scientifiques qui accueille les mathématiciens du monde entier.

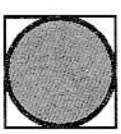
Ce texte fait suite à une conférence que Marcel Berger a donné au Muséum d'Orléans sous l'égide de l'APAC (association populaire Art et Culture) cette année.

Premier problème : Comment empilez des disques en dimension 2

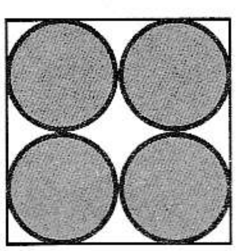
Ce premier problème, bien empiler des disques ou disposer régulièrement des points sur un plan est un problème dont on connaît la réponse depuis longtemps.

Pour les disques, il s'agit en fait d'essayer d'empiler le maximum de disques dans un carré ou un cercle donnés.

Ainsi, combien de disques de diamètre unité peut-on placer dans un carré de côté 1 ? (réponse 1 !),



de côté 2 ? (réponse 4 !),



de côté 3 ? (réponse 9 !) ... de côté 10 ? (réponse ... en bas de page !).

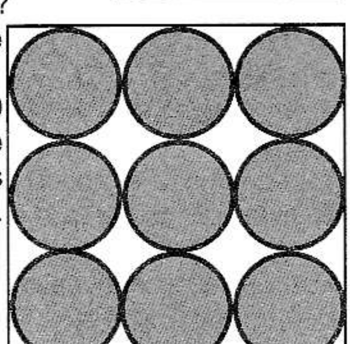


fig. 1

Si l'on prend des empilements qui ne sont pas réguliers, le problème se complique.

Si vous empilez des pièces de monnaie, de façon aléatoire, vous perdez beaucoup d'espace. L'empilement régulier, en quinconce, que l'on appelle empilement hexagonal, permet de perdre le moins d'espace : il occupe 98,7 % du plan !

Est-il le meilleur ?

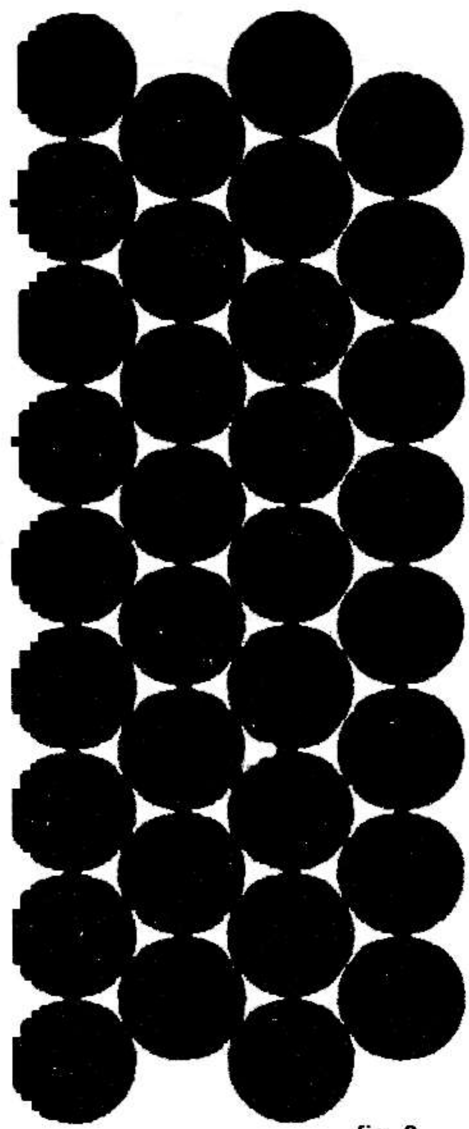


fig. 2

"Populariser, vulgariser les mathématiques est un des exercices les plus difficile.

Odile Jacob disait à Pierre Chartier que chaque formule dans un livre lui faisait perdre 5 000 lecteurs ! Si c'est vrai, Hawkins, l'homme des trous noirs, l'astrophysicien, à perdu avec chaque formule plus d'un million de dollars !!

Du coup, ou coût, il n'y en a aucune dans son dernier livre sur l'origine de l'Univers !!!"

Réponse à la question : dans un carré de côté 10, on peut placer 105 disques unités. Question : à partir de quel carré peut-on en mettre plus ??

Comment se convaincre qu'il n'est pas du tout évident de se convaincre que la meilleure façon d'empiler des disques est bien celle-là?

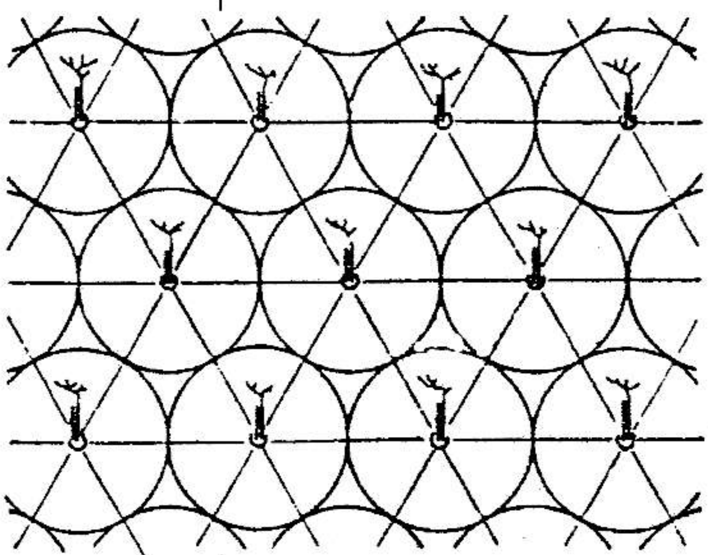


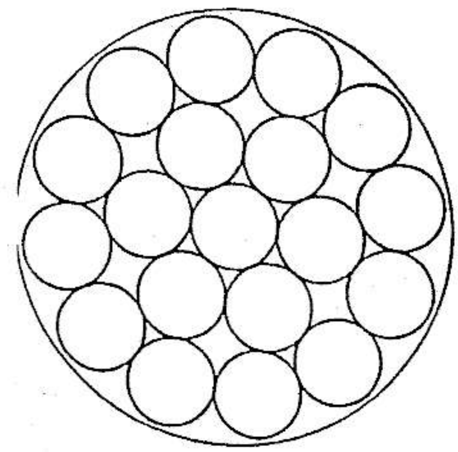
Fig. 3

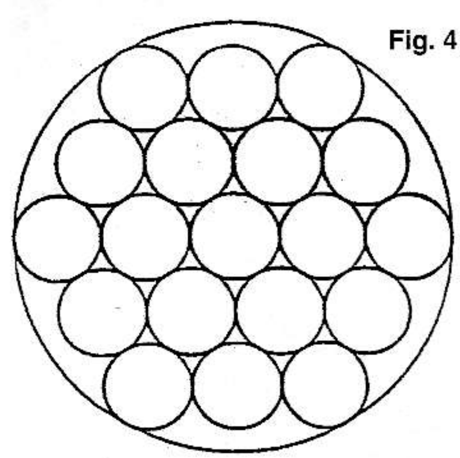
$$\frac{\text{Périmètre}}{\text{Surface}} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} \longrightarrow \mathbf{0}$$

tend vers zéro quand R tend vers l'infini

Vous avez vu que pour empiler au mieux 4 ou 9 disques le meilleur empilement était l'empilement "carrelage".

Le problème se complique encore lorsqu'il s'agit d'empiler dans un disque : observez l'empilement hexagonal dans un cercle (fig. 4), il contient 19 disques. Vous pouvez restreindre le diamètre





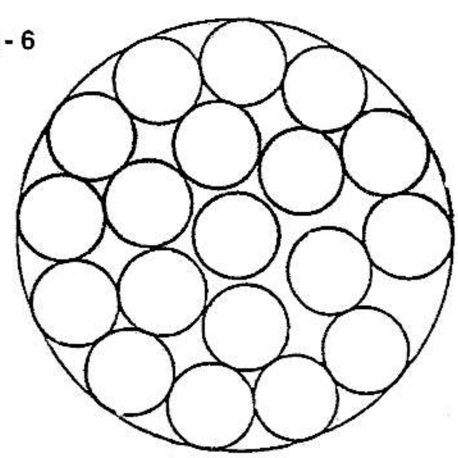


Fig. 4 - 5 - 6

du cercle et avoir toujours vos 19 disques à l'intérieur (fig. 5 et 6). Mais l'empilement n'est plus régulier.
Et pourtant c'est le meilleur possible. L'empilement hexagonal paraissait être le meilleur possible et pourtant dans ce cas, ce n'est pas lui!
Comment réagir?

Comment sortir de cette contradiction ?

Réponse : on va à l'infini.
Dans les exemples que l'on vient d'examiner, il n'y a pas beaucoup de boules. Si on veut se convaincre que l'hexagonal est le meilleur, il faut prendre une très grande quantité de disques.

Mais au fait, qu'est-ce qu'un bon empilement?

Ça pourrait être le rapport des surfaces occupées par rapport à la surface totale ou à la surface perdue.
On sait montrer, mais seulement depuis 1940, grâce à M. Fejes-Toth puis par

une deuxième preuve en 1958 par Rogers que l'empilement hexagonal régulier est bien le meilleur : on dit le plus dense.

Nous allons regarder de plus cette démonstration parce qu'elle ne marche pas en dimension 3 avec des sphères.

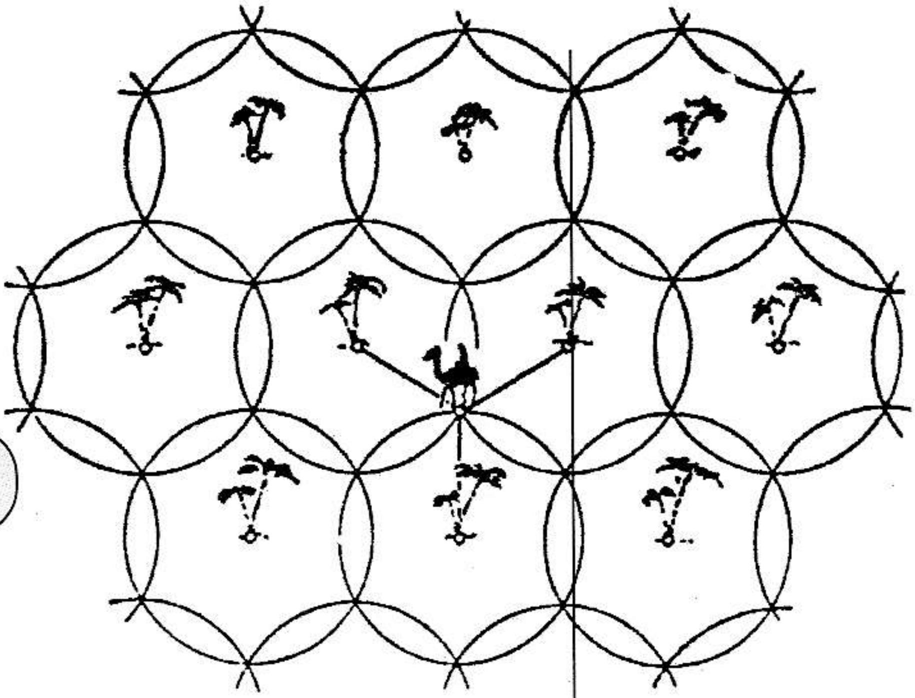


fig. 7

Première démonstration : les domaines postaux

Considérez des bureaux de poste. Quels domaines vont-ils définir pour que chaque personne fasse le minimum de trajet pour se rendre à "la Poste" ?

On partage ainsi le plan en domaines "économiques". Les frontières de ces domaines ont été définies par Voronoï. Essayons d'appliquer cela à des disques.

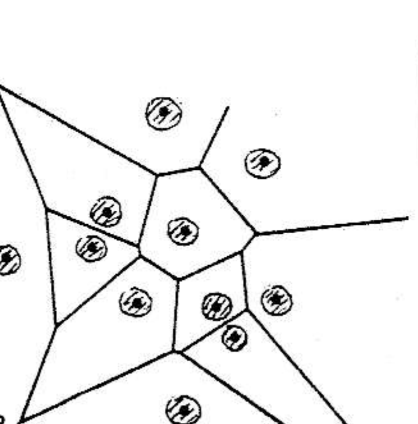


fig. 8

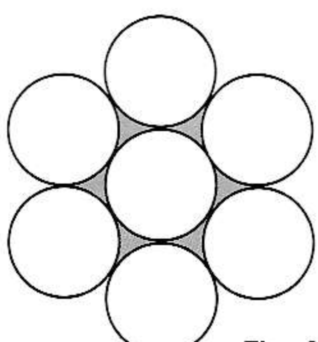


Fig.. 9

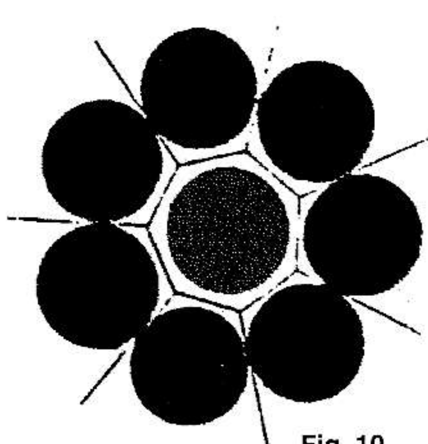


Fig. 10

On voit que c'est quand on place 6 cercles tangents au 7ème que l'on perd le moins d'espace. Cela fait l'objet, seulement depuis 1940, d'une démonstration complexe même pour un mathématicien.
Si on veut en rentrer un septième on perd de la place.

Les meilleures surfaces pour un pavage régulier, ce sont les hexagones que vous connaissez tous : c'est celui du pavage avec des tomettes (cf. fig. 11).

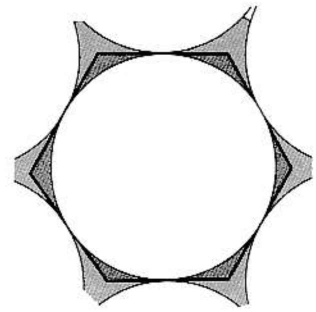


Fig. 11

«Même en géométrie, il n'y a pas de mathématique sans aller à l'infini, sans quitter la dimension 3. Il faut aller au delà et même à l'infini.»

Donc d'une part je sais que ce pavage "marche" bien et d'autre part que je ne peux pas faire mieux.
Mais je ne suis pas encore allé à l'infini. Il me manque encore la notion de frontière. Vous avez vu tout à l'heure qu'avec une frontière sous forme de disque ça n'est pas aussi simple.

Comment opérer ? On prend un très grand cercle dans lequel il y a une très grande quantité de billes. On passe à l'infini et on regarde les domaines postaux définis comme tout à l'heure. Il y a des bons domaines, ceux qui sont bien à l'intérieur du cercle et des mauvais.
Ces derniers qui sortent en partie du domaine sont accrochés sur le périmètre du cercle.

Combien y en a-t-il ?
A l'infini, des mauvais domaines, il y en a autant que le périmètre du cercle et des bons, il y en a autant que la surface du cercle !

L'aire du cercle est $\pi . R^2$, alors que le périmètre est $2\pi . R$.
Si l'on fait le rapport des mauvais aux bons domaines, on voit que lorsque R tend vers l'infini i (à "disques constants"), ce rapport tend vers zéro.

Deuxième méthode : la triangulation

On prend les enveloppes de Voronoï (des bureaux de poste) et on joint les "centres postaux" deux à deux. On passe ainsi du diagramme de Voronoï à la triangulation de Delaunay.

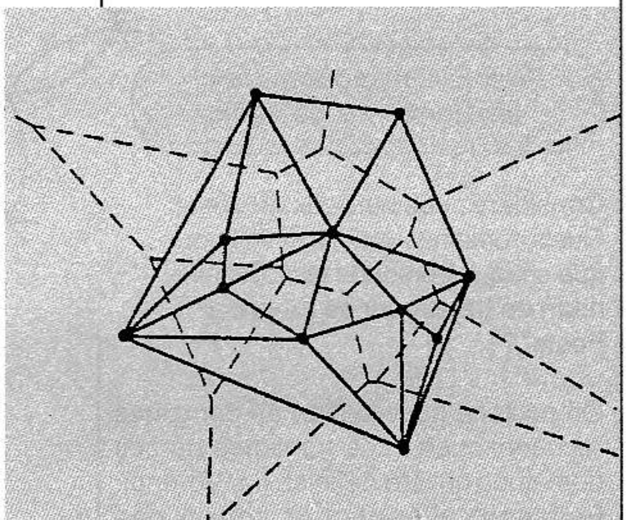


fig. 12

On obtient une partition du plan en triangles. Plaçons maintenant trois cercles aux trois sommets du triangle pour qu'ils remplissent le plus d'espace dans le triangle.
Le meilleur triangle, celui qui laisse le moins de place perdue, est alors le triangle équilatéral.

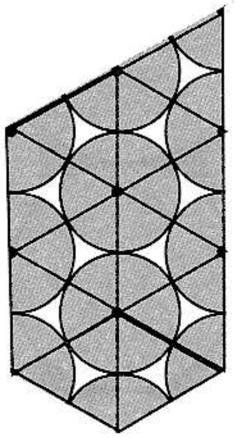


Fig. 14

et ça marche !

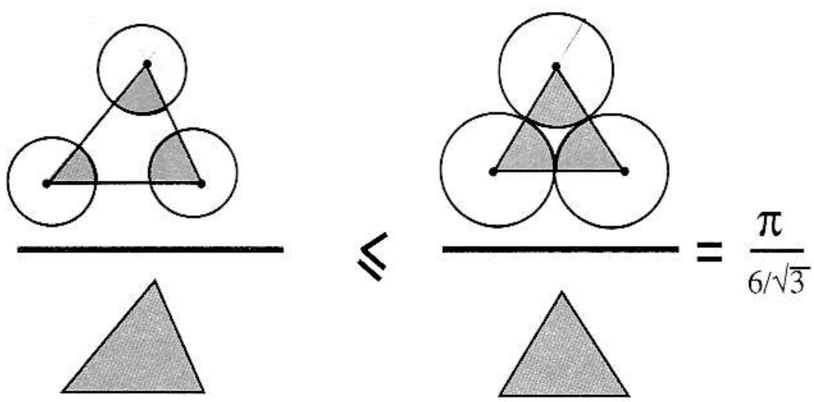


Fig. 13

Ce problème est assez facile mais c'est le seul qui soit résolu.

Un problème ouvert

Pour le mathématicien, l'existence d'un problème ouvert est toujours source d'émerveillement et bien sûr de curiosité infinie.

Voici un exemple de problème du plan non résolu à ce jour, bien qu'on en connaisse la solution depuis longtemps, les abeilles en particulier :
Comment découper le plan en domaines qui aient tous la même aire de façon à ce que la frontière soit la moins longue possible ?
Les abeilles savent le faire avec des hexagones réguliers. Mais les mathématiciens ne savent pas prouver que c'est la solution la meilleure.

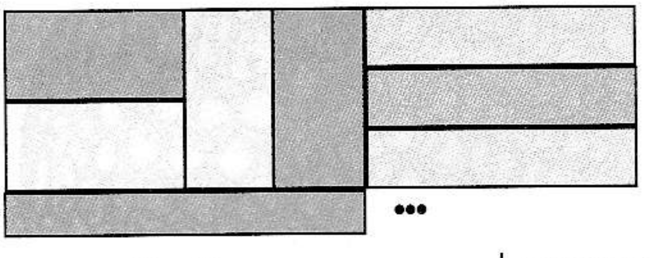


Fig. 15

Deuxième problème : Comment disposer au mieux des points sur la sphère ?

Imaginez la Terre et un problème très actuel : combien faut-il disposer de satellites géostationnaires pour qu'ils couvrent bien toute la surface de la Terre en communication GSM ?
Il y a bien d'autres applications pratiques à ce problème :
- quand on fait des échographies ou des scanners, il faut savoir où il faut mettre les points,
- si vous êtes chimiste, vous voulez savoir comment mettre les électrons autour du noyau,
- sur une balle de golf, il fallait jusqu'à dernièrement, mettre des trous bien disposés,
- en architecture, la construction de dômes géodésiques nécessite une triangulation qui nécessite elle-même de bien répartir certains points. Observez la Géode à la Cité des Sciences et vous verrez apparaître des points d'ordre 5 (avec 5 arêtes) qui sont les sommets d'un icosaèdre.
- les pores des grains de pollen,
- Comment mesurer la quantité d'ozone sur la planète ? Là encore, il faut savoir placer convenablement un certain nombre de satellites pour couvrir la planète.

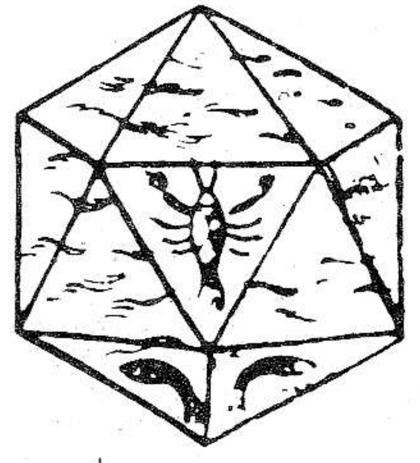


Fig. 16 : l'icosaèdre, symbole de l'eau

<u>Les cas les plus simples :</u>
1- placer 12 points autour d'une sphère. Il suffit de faire appel à l'un des 5 polyèdres réguliers : l'icosaèdre.

2- On a découvert récemment un nouveau carbone, le C 60 où les 60 atomes de carbone sont placés au sommet d'un polyèdre semi-régulier qui est en fait le ballon de football, d'où l'autre nom de ces carbones : les fullerènes.

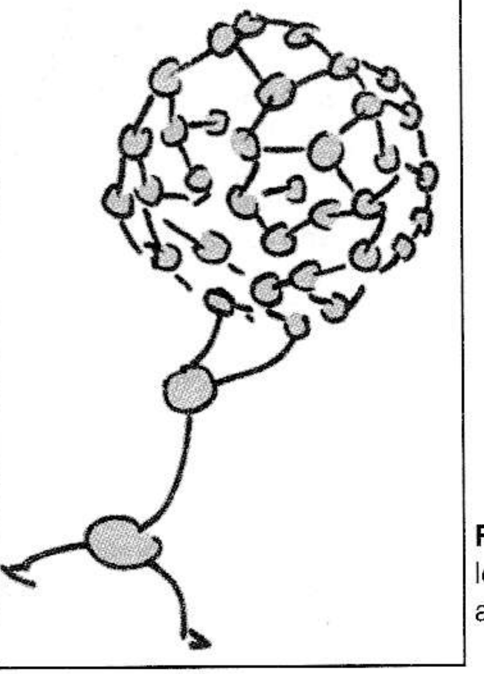


Fig. 17 : le carbone C60, appelé Fullerène

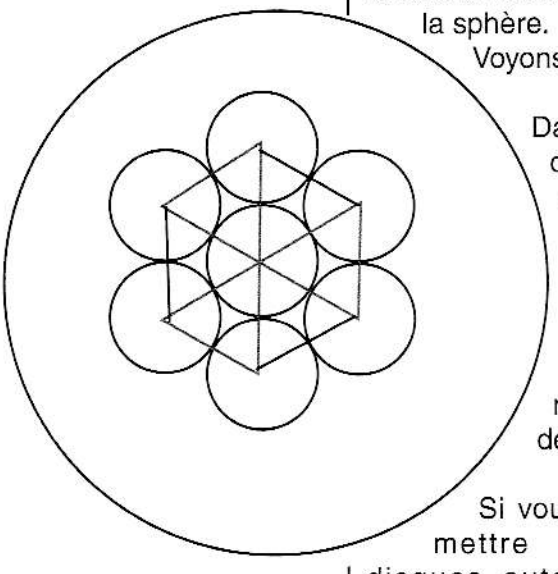


Fig. 18
6 disques sur une sphère

En fait, on ne peut pas mettre correctement un certain nombre de points sur la sphère.
Voyons cela de plus près.

Dans le plan, on sait placer des points au mieux en utilisant une grille d'hexagones réguliers. Vous savez que vous ne pourrez pas appliquer cette feuille sur la sphère. Cette dernière est en effet non développable sur le plan.

Si vous voulez mettre 6 disques autour d'un autre sur une sphère comme on le fait facilement dans le plan, vous vous apercevrez que le sixième doit avoir un rayon plus petit pour venir se caser entre les autres.
Si vous observez une géode ou un radiolaire, vous remarquerez que presque tout est en hexagone mais il y a toujours quelques pentagones, 12 exactement.

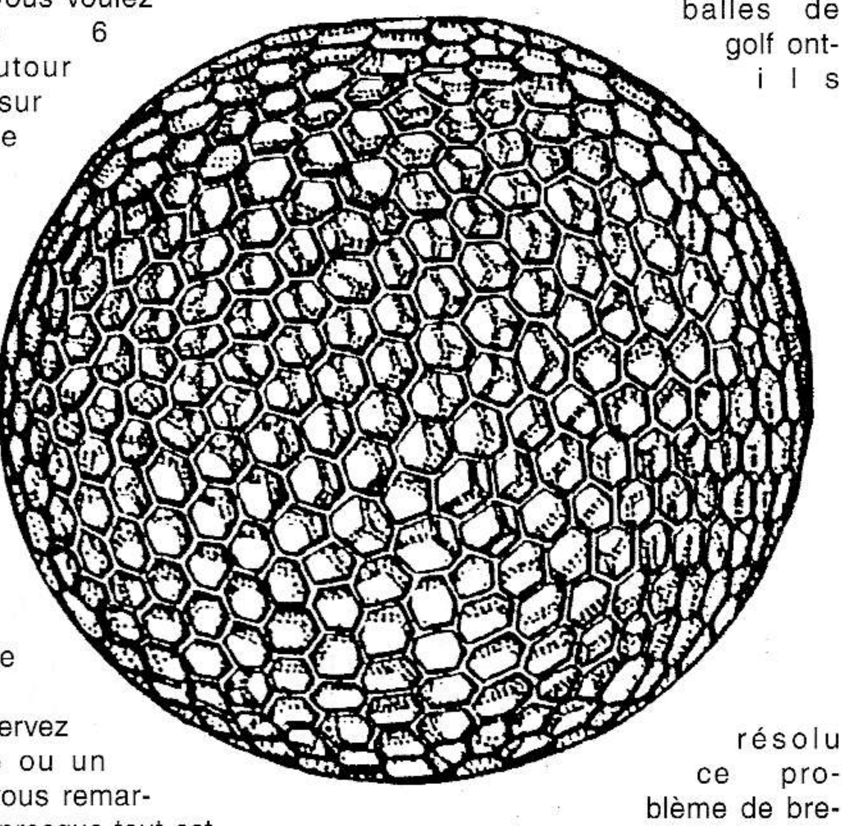


Fig. 19
Un radiolaire "hexagonal", *Aulonia hexagona*. Il est impossible que le squelette de cet animal soit uniquement constitué d'hexagones (on distingue des pentagones).

C'est assez facile à démonter pour le mathématicien. Cela est dû à la formule d'Euler qui lie les points, les frontières et les domaines de toute carte dessinée sur une surface plane ou sphérique.

Le brevet Slazenger

Comment répartir régulièrement les trous sur une balle de golf ? Vous placez 12 points avec 5 voisins et ensuite vous remplissez les faces triangulaires d'un pavage hexagonal de trous tous identiques.
Mais vous ne pourrez pas commercialiser ces balles car la maison Slazenger a breveté cette solution il y a 30 ans.
Comment les autres fabricants (Salomon, Nassault-flotter ou Tepflight) de balles de golf ont-ils résolu ce problème de brevet ?
Tout simplement en prenant les points de l'icosaèdre régulier mais en en décalant juste un et ainsi le brevet est détourné.

Si l'on veut mettre beaucoup de points sur une sphère, on fait appel à la physique :
On place des petits aimants qui ont

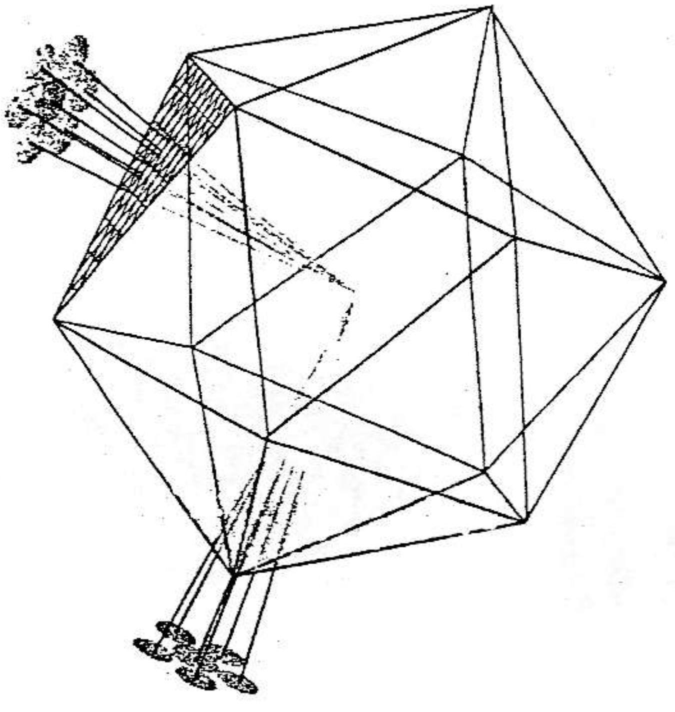


Fig. 20
Une balle de golf comporte au moins 12 trous qui n'ont que 5 voisins si tous les trous sont de même rayon.
La Société *Slazenger* dispose ces 12 trous d'ordre 5 aux sommets d'un icosaèdre et projette sur la surface de la balle des réseaux hexagonaux de trous qui occuperaient les faces de l'icosaèdre ayant ces sommets.
D'autres marques contournent le brevet en décalant ces 12 exceptions.

tous le même signe sur la sphère. Ils vont se repousser et s'équilibrer sur la sphère. On a un problème d'énergie minimum. Une modélisation sur ordinateur donnera la répartition.
Mais ces solutions ne conviennent pas.

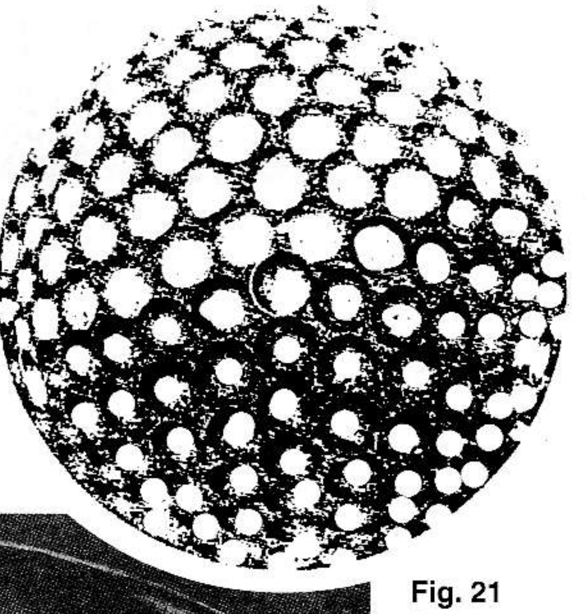


Fig. 21
Balle de golf

Fig. 22
La Géode

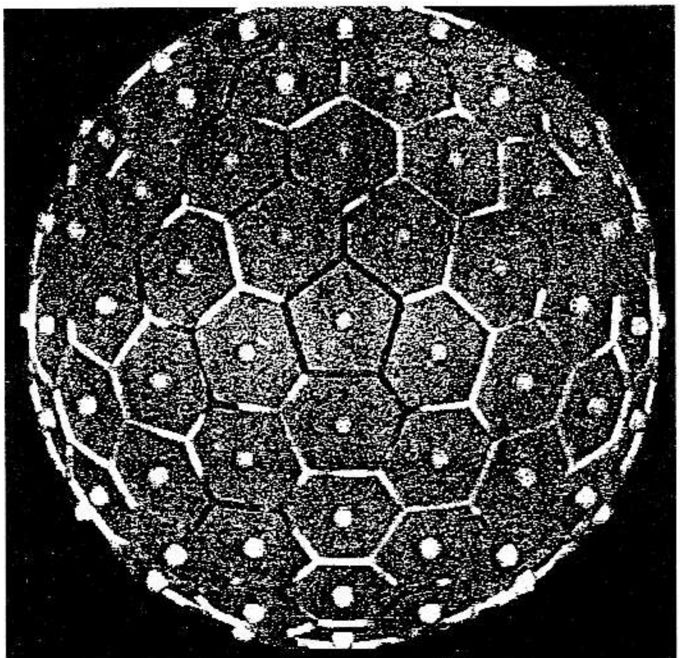


Fig. 23
122 électrons en équilibre et leurs cellules de Dirichlet.

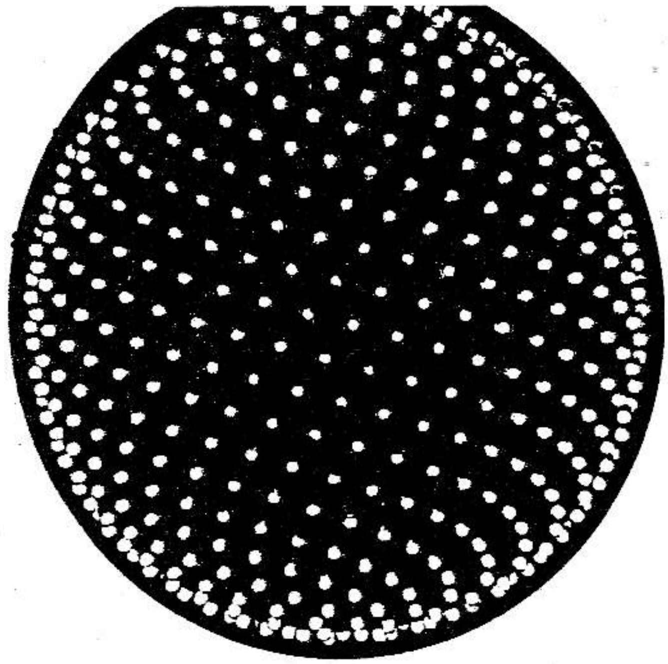


Fig. 24 : 700 points "bien" répartis(1995)

Par exemple pour le problème d'ozone, les 12 points d'ordre 5 vont fausser la moyenne.

Actuellement, ce problème "impossible par nature" puisqu'il n'existe que 5 polyèdres réguliers, n'a pas de solution satisfaisante.
Beaucoup s'y essaient encore.

Ainsi la figure 24 dispose 122 points, en 1995, on a réussi à en placer 700, à diviser la sphère en 400 domaines d'aires égales !

Il existe une façon théorique pour mettre un grand nombre de points sur une sphère :
Cette méthode est assez récente ; elle nous vient de la théorie des nombres.
Combien y a-t-il de façons d'écrire un nombre entier comme sommes de 24 carrés.

$$n = n_1^2 + ... + n_{24}^2$$

La solution de cette "conjecture de Ramanujan" a été résolue en 1973 par Deligne (médaille Fields) puis Lebobky-Phillips-Sarnak.

Troisième problème : Comment bien empiler des boules dans l'espace ?

Ce problème qui a donné lieu à de nombreux travaux depuis des plus de trois siècles vient d'être résolu en 1998.

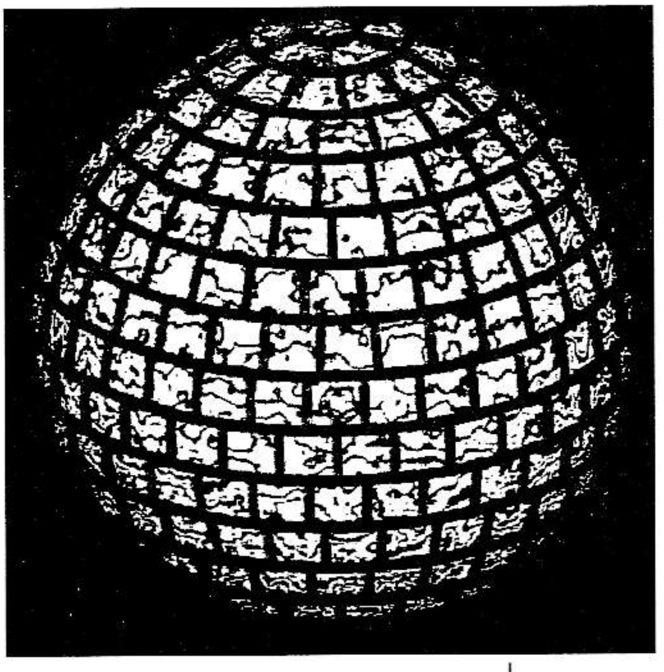
Il ne suffit pas de tasser fort pour empiler au mieux des boules dans une boîte. Si vous marcher sur le sable, au bord d'une plage, le sable devient sec.

Autrement dit : le sable sous le pied ne descend pas mais s'élève légèrement ! La densité du sable a diminué, les grains de sable se sont écartés les uns des autres. Donc tasser ne permet pas de mettre plus de boules, au contraire !

Comment faire ?
Il suffit de faire comme sur les étales de fruits et légumes ou encore comme faisaient les artilleurs pour empiler les boulets de canons.
Et l'on vient de démontrer que c'est le meilleur empilement, ce qui n'était qu'une hypothèse depuis 3 siècles !

Ce résultat a des conséquences pratiques énormes. La répartition des

Fig. 25 : Partition de la sphère en 400 surfaces de même aire avec un diamètre ≤ 7/400. (1995)



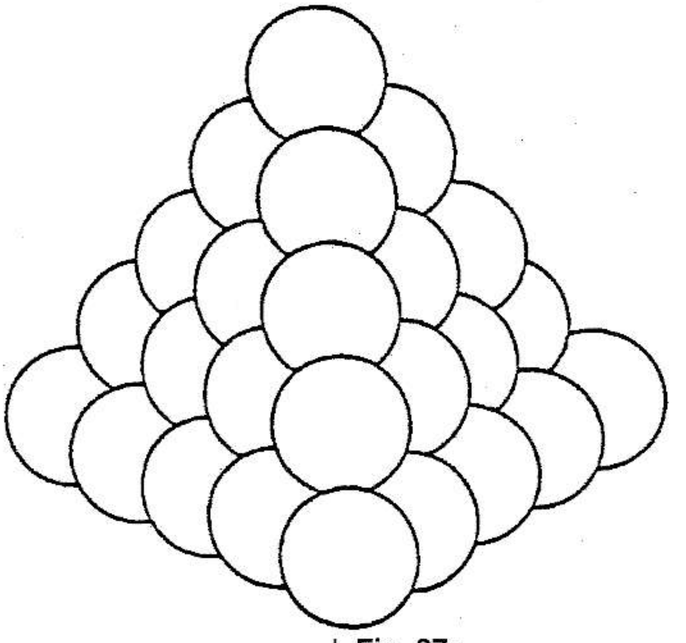


Fig. 27 : Seconde méthode d'empilement des fruits. Est-ce la même ?

grains de sable ou de granulats est très étudiée par les laboratoires des Ponts et Chaussées.
Par exemple pour stopper les barquints dans le désert, pour étudier les nappes phréatiques.

Revenons à l'empilement maximum. **Comment l'obtenir ?**

Vous pouvez faire vibrer la boîte et espérer voir l'empilement idéal se réaliser.
Pas du tout ! Si vous mettez les boules en vrac dans la boîte, vous occupez 60 % de l'espace, si vous faites vibrer la boîte en même temps, vous obtenez 64 % !
Alors que l'empilement idéal, appelé cubique à faces centrées par les géologues, occupe 74 %.
Ce résultat a été prouvé en juillet 1998 par **Thomas Hales** après plus de 10 ans de recherche. Il lui a fallu plus de 500 pages de démonstration et de très nombreux calculs sur ordinateur à la limite de la puissance actuelle.

Pourquoi avoir attendu si longtemps pour obtenir ce résultat alors que cet empilement est connu depuis toujours?

Harriot en 1591, Képler en 1 607 et de nombreux mathématiciens depuis s'y étaient attaqué sans succès.

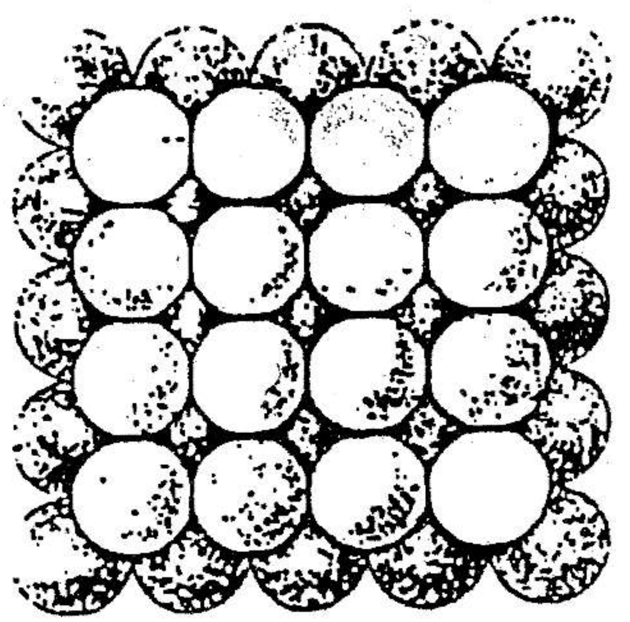


Fig. 26 : première méthode d'empilement des fruits

Première difficulté :
le problème du choix

Vous pouvez sans difficulté placer la première couche en quinconce comme dans le plan.
Mais ensuite, si vous essayez de placer la seconde couche, vous vous apercevrez qu'il y a deux possibilités de disposer les boules dans les trous. Et de même pour la troisième couche.

Je peux obtenir l'empilement des oranges mais je peux aussi obtenir un autre empilement qui est aussi bon que le premier.
Il y a donc, à l'infini, une infinité de choix. Et comme l'âne de Buridan (qui n'était d'ailleurs pas un âne mais un chien !), qui meurt de faim parce qu'il ne sait pas choisir entre deux propositions.
La nature, elle aussi, n'aime pas hésiter.

On peut aussi faire comme dans le plan et construire des enveloppes de Voronoï en dimension 3.
Dans le plan il y avait un seul "domaine postal" régulier, l'hexagone. Ici, si l'on change les couches on obtient deux types d'enveloppes.

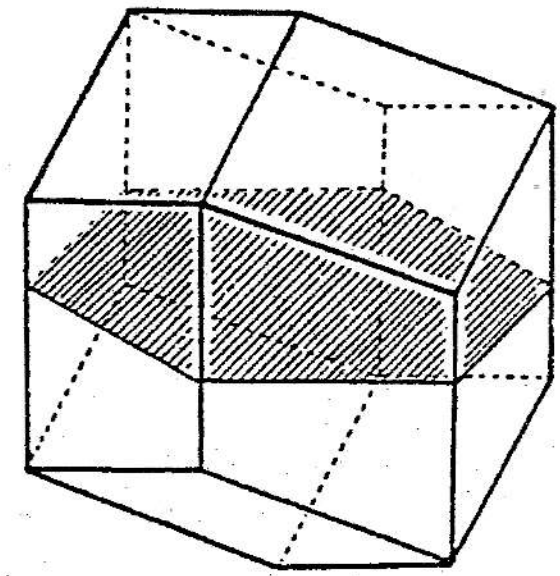
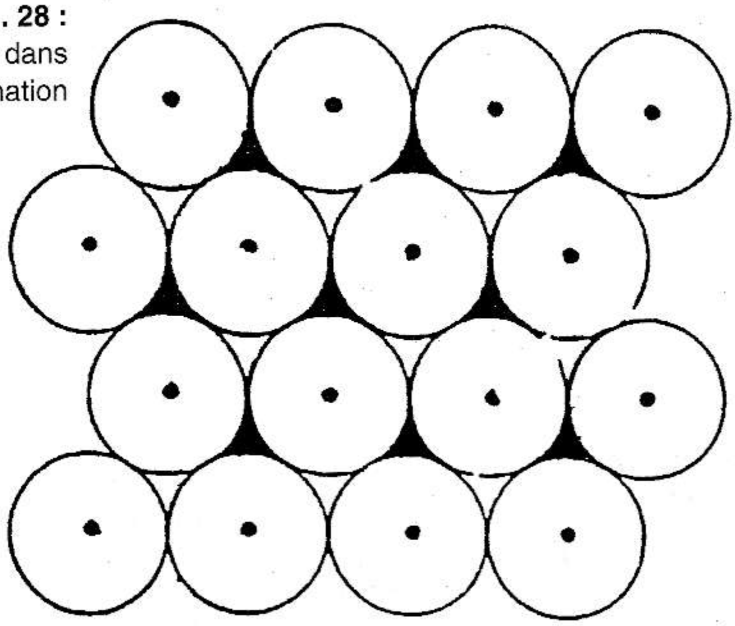


Fig. 29 : position du plan de symétrie dans le dodécaèdre rhombique

Fig. 28 : L'ambiguïté dans la lamination



Seconde difficulté :
le "kissing number"

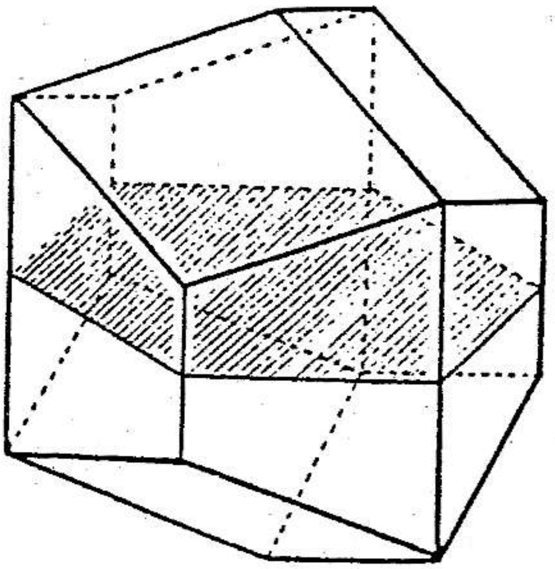
Dans le plan on a vu que l'on pouvait placer 6 disques autour d'un disque donné (cf. fig. 28).

Dans l'espace, vous pouvez essayer, vous verrez que l'on peut toujours en mettre douze. Mais on peut montrer qu'il reste des espaces vides qui, additionnés, permettraient de placer une treizième boule au contact de celle du milieu.

Ce résultat est à l'origine d'une vieille controverse en 1 694 entre Newton et Grégory. Grégory pensait que l'on pouvait mettre 13 sphères et Newton n'y croyait pas.

Ce problème n'a été totalement résolu qu'en 1952 par Schütte et Van der Waerden. La réponse est 12.

Pourquoi tant d'attente ? Les calculs sur une sphère, la trigonométrie sphérique sont des domaines très difficiles des mathématiques.



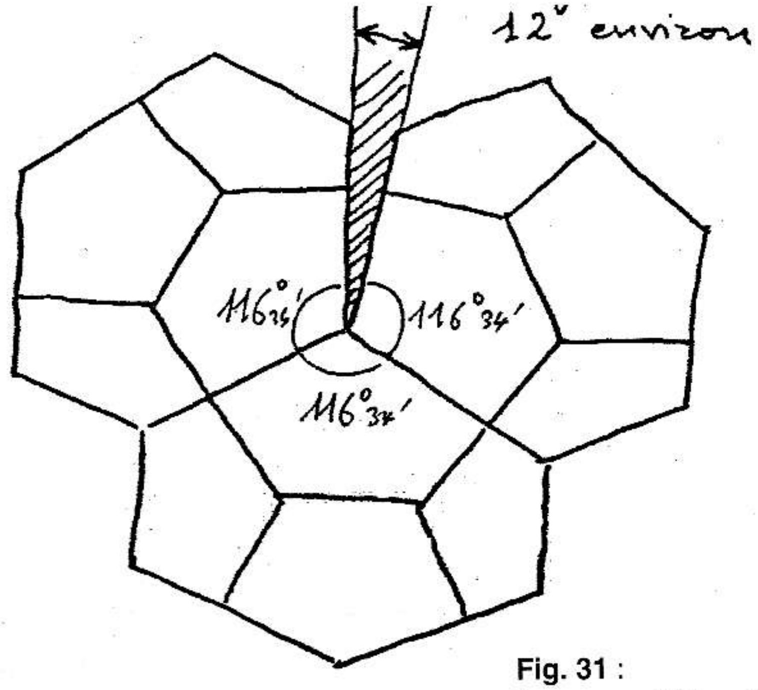


Fig. 31 :
Il manque 12° environ pour faire 360° !

3ème problème : les dodécaèdres !

Vous vous rappelez que lorsqu'on met 6 disques autour d'un septième, on obtient un hexagone régulier.
Si on en met sept, on perd de la place. Si je mets 12 sphères autour d'une treizième, quel est le volume le plus petit possible ? Il serait bon de montrer que ces domaines postaux, les enveloppes de Voronoï, sont des dodécaèdres réguliers (douze faces pentagonales). Je pourrais alors remplir l'espace avec ces dodécaèdres et le tour est joué !
Hélas, ça ne marche pas ! Les dodé-

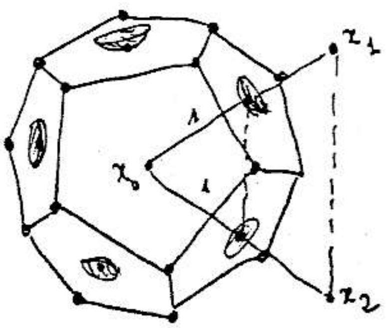


Fig. 30 : les dodécaèdres !

caèdres réguliers sont des "mauvais coucheurs" : ils ne remplissent pas l'espace comme les hexagones remplissent le plan.
Si vous placez trois dodécaèdres réguliers l'un à côté de l'autre, ils laissent un petit angle de 12° environ.
La méthode des "domaines postaux" ne marche donc pas ici.

4ème essai : les triangles de Rogers (1954)

Cette méthode marche très bien pour les tétraèdres. On place des boules de rayon un en chacun des sommets (avec des arêtes plus grandes que un) et on cherche quel est le tétraèdre qui est le mieux rempli par les boules de rayon unité. On trouve assez facilement que c'est le tétraèdre régulier.

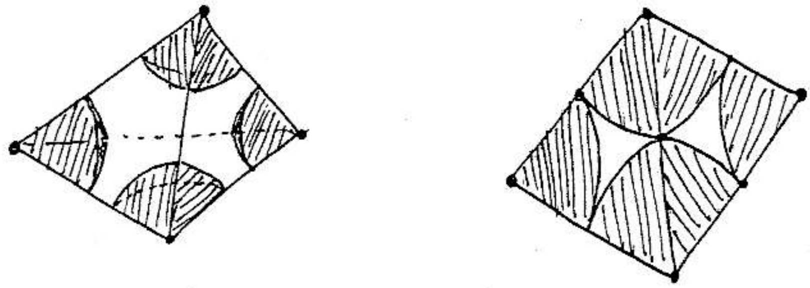


Fig. 32 : C'est trop bon !

Mais malheureusement, les tétraèdres réguliers ne remplissent pas plus l'espace que les dodécaèdres.

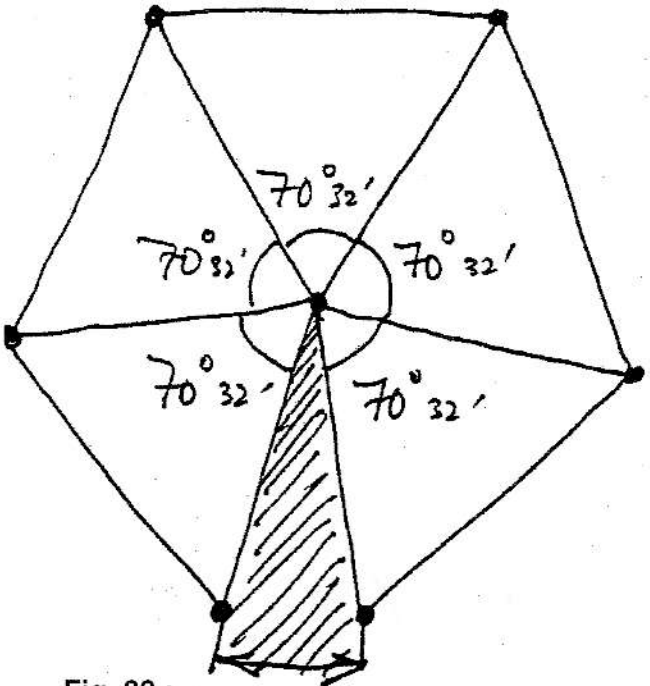


Fig. 33 : On a un creux de 7°20' environ

Ils laissent un creux de 7°20' environ.

Il y a bien le cube qui remplit l'espace mais il fait perdre beaucoup d'espace aux boules.

Hales, pour arriver à sa démonstration, a en fait, fait un mélange entre les domaines postaux et les tétraèdres. Mais pratiquement, pour arriver à ce résultat, il faut faire des calculs sur ordinateur avec 150 à 300 paramètres, 1 000 à 1 500 conditions sous formes d'équations linéaires.
Hales a pour résoudre ce problème utilisé des heures et des heures de calculs d'ordinateurs Cray 4 et 5.

Encore un problème ouvert :
Vous prenez une boule de rayon 5. Combien de boules de rayon 1 pouvez-vous placer à l'intérieur ?
On sait que l'on peut en mettre 67 mais on ne sait pas si l'on peut en mettre plus ! A vous de chercher.

En voici un autre pour amorcer le sujet suivant et qui concerne les radio-transmissions :
Combien de sphère de rayon 1 peut-on mettre dans une sphère de rayon 4 ... en dimension 100 ???

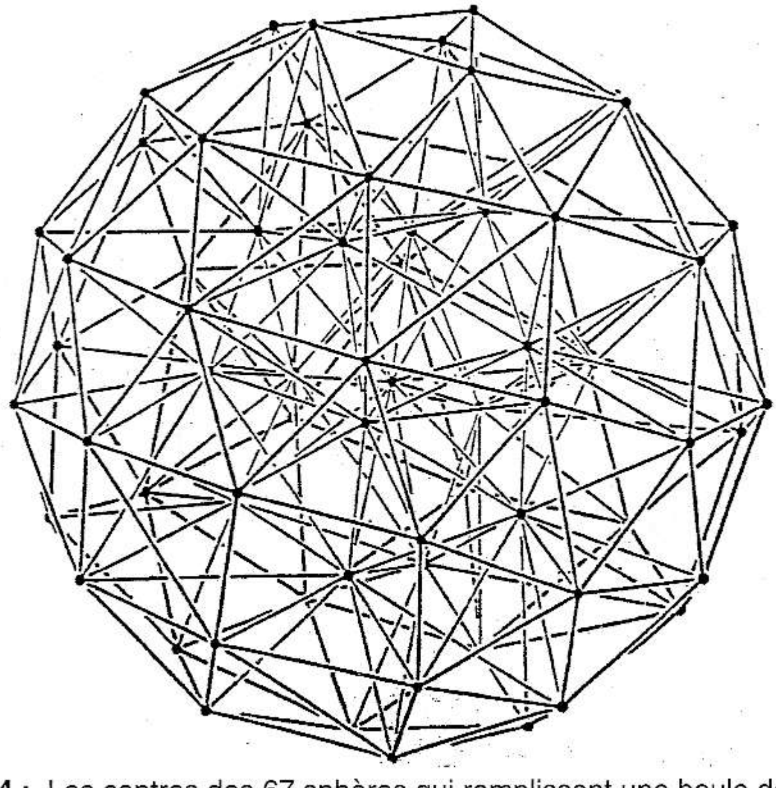


Fig. 34 : Les centres des 67 sphères qui remplissent une boule de rayon 5 fois plus grand. Pour voir la structure, nous avons tracé les lignes entre toute paire de centres distants de moins de 1,4.

Les codes correcteurs d'erreurs

Un sujet qui apparemment n'a aucun lien avec le précédent et qui pourtant lui est intimement associé sans qu'on sache trop pourquoi ! Mais on sait comment !
Il est étroitement lié au problème d'empilement de sphères mais dans des espaces de grandes dimensions.

Qu'est-ce qu'un code correcteur d'erreurs ? A quoi sert-il ?

Pratiquement tout aujourd'hui passe par le numérique et est donc codé et dispose de moyens de détections d'erreurs (à condition qu'il n'y en ait pas trop).
Vous avez des données par exemple celles tapées sur votre ordinateur, ou celles venant d'un satellite ou celles d'un Cédérom ou encore d'un téléphone portable. Ces données sont lues et donc passent par un appareil qui les code.

Où se trouvent les erreurs ?

Dans votre ordinateur, vous tapez vos données, elles sont codées (en code ASCII) puis transmisent (là se trouvent les sources d'erreurs) puis décodées et enfin restituées (par exemple à l'écran).
Un cédé-audio ou un cédérom ou maintenant un DVD peuvent être griffés par votre chat ou une mauvaise manipulation, les informations transmises par GSM ou par satellites peuvent aussi souffrir lors de leur transmission, magnétoscopes et Télévision numérique peuvent aussi être le support d'erreurs, ...

Un exemple : vous tapez sur une touche de votre ordinateur, ça donne à chaque fois une information sous forme d'octet qui est une succession de 8 impulsions électriques sous forme de 0 et de 1.
Par exemple "a" est codé 010100001 "b" est codé 01010010, "c" : 01010011 etc.
Il y a ainsi 2x2x....x2 = 2^8 = 256 codes possibles.

Largement plus qu'il n'en faut pour coder tous les signes de votre clavier et les fonctions qui s'y trouvent.

Malheureusement, chaque "bit" est une source d'erreur, 0 peut être transmis à la place de chaque 1 et inversement. Combien y a-t-il de chance d'avoir des erreurs ? Il n'y en a pas nécessairement beaucoup. Imaginez que vous ayez une erreur sur un milliard de codes. L'ordinateur des années 95 avait déjà une vitesse de 25 mégahertz, soit 25 millions d'opérations élémentaires par seconde. Cela fait 90 erreurs par erreurs !

Il faut donc imaginer un système qui corrige les erreurs. Il ne s'agit pas seulement de les détecter ! Si vous avez un Macintosh ou un PC qui affiche une petite bombe ... 90 fois par heure, vous ne pourrez pas faire grand-chose avec votre ordinateur !

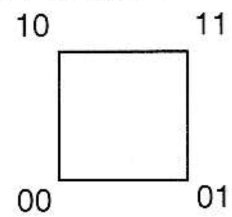
Comment corriger les erreurs ?

Voici les cas les plus simples.
L'idée de base est très simple : elle est basée sur la redondance de l'information. On envoie plus de bits que celles qui sont nécessaires mais cela de façon astucieuse pour que s'il n'y a pas trop d'erreurs et si l'information est différente à l'arrivée, je saurai le reconnaître.
Par exemple je veux envoyer un seul bit, et pour cela je triple l'information. Par exemple, au lieu d'envoyer 0 j'envoie 000, au lieu d'envoyer 1, j'envoie 111.Cela demande plus de

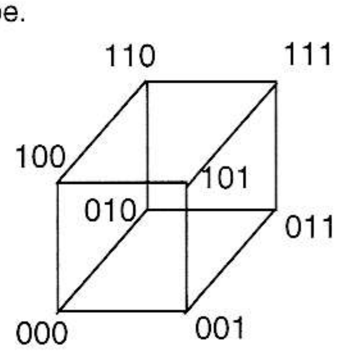
temps mais à raison de 25 millions de calculs par seconde, cela ne se voit pas tellement.

Si j'ai fait une erreur de transmission, il est facile de la voir. A l'arrivée, toute information de la forme 100, 010 ou 001 sera corrigée en 000; de même 011, 101 ou 110 sera corrigée en 111. Le problème est quand même que le triplement de l'information rend la transmission très lourde et peu performante.

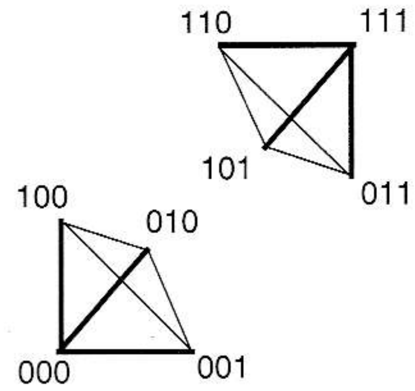
Il existe heureusement des systèmes que l'on appelle codes correcteurs d'erreurs qui sont beaucoup plus performants et qui datent de Shannon en 1940.
Malheureusement, la construction explicite de ces codes est une affaire beaucoup plus complexe. Heureusement, on peut en donner une illustration géométrique.
Envoyer des 0 et des 1 trois fois se représente visuellement avec des cubes ou des polyèdres.
0 et 1 peuvent coder les deux extrémités d'un segment : 0 •-------•1
Si j'envoie 00, 01, 10, 11, j'ai codé les sommets d'un carré :



Si j'envoie 3 bits, 000, 001, 010, ..., 111 j'envoie les codes des sommets d'un cube.



Si j'envoie plus de bits, on se trouve dans des espaces de dimensions supérieures. Par exemple avec 4 bits, on aura l'hypercube, cube à 4 dimensions, avec ses 16 sommets.
Sur le cube en trois dimensions, on voit apparaître la méthode de codage. J'ai placé les deux codes extrêmes 000 et 111 aux deux sommets opposés du cube. J'ai ainsi partagé le cube en deux parties : la partie qui a pour sommet 000 et qui comporte au plus un 1 et la partie de sommet 111 qui comprend au moins deux 1.



En dimension 4, on place 0000 et 1111 aux sommets opposés du Cube(4D) et on partitionne ce cube en étoiles. Un bon code en dimension n sera obtenu sur Cube(nD) en choisissant une disposition de sommets dont les étoiles ne se rencontrent pas 2 à 2. C'est un peu comme si l'on voulait empiler des disques sur une sphère de dimension n.

Avec plus de bits, on peut faire de même dans des espaces supérieurs. Mais ici plus je prends de bits, moins j'aurai besoin de rajouter d'informations et plus je pourrai corriger d'erreurs !
Et ceci parce que dans les espaces de plus grandes dimensions, la sphère, c'est-à-dire l'ensemble des nombres dont la somme des carrés est plus

petite que un a un volume de plus en plus petit et même un volume qui tend très vite vers zéro.

Quel est le volume d'une sphère?
En dimension 2, le disque a pour surface $\pi.R^2$ soit 3,14, pour la sphère le volume est $4.\pi R^3$ soit 4,188.
En dimension supérieure, les formules donnent le tableau ci-contre.
On pense que, pareil au cube, le volume de la sphère croit de plus en plus vite.
C'est exactement le contraire, le volume de la sphère décroit de façon plus qu'exponentielle.
En dimension 100 on est très en deçà de la taille des atomes! $2 \cdot 10^{-40}$!

Pour les probabilistes, prenez 100 nombres au hasard entre -1 et 1. La probabilité pour que la somme de leurs carrés soit inférieure à 1 est de $2 \cdot 10^{-40}$.

Dimension	Volume boule unité
2	3,14
3	4,188
4	4,93
5	5,263
6	5,1677
7	4,724
8	4,0587
9	3,298
10	2,550
11	1,884
14	0,56
16	0,235
18	0,08
20	0,02
100	$2 \cdot 10^{-40}$
?	?

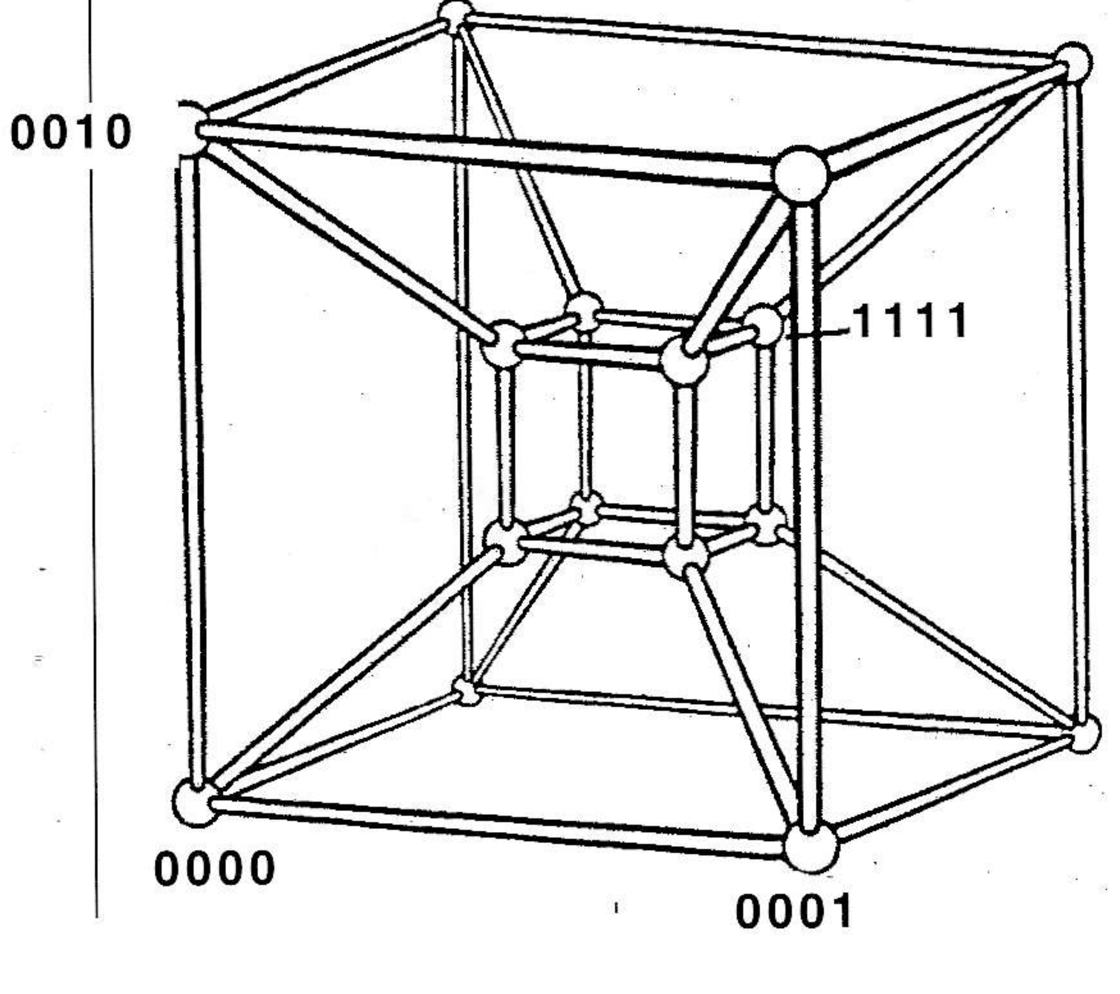


Fig. 35 : Codage de l'hypercube

Le premier code correcteur d'erreurs est dû à Hamming en 1950. C'est un code qui corrige une erreur en remplaçant 4 bits par 7. On ne double donc même pas la longueur.
Ce code consiste à faire simplement un test de parité en faisant la somme pour les coordonnées. En dimension 3, il fait 3 tests de parité à 3 groupes différents "demi-octets" (cf. tableau).

Position	Valeur décimale
1234 567	
0000 000	0
1101 001	1
0101 010	2
1000 011	3
1001 100	4
0100 110	5
1100 110	6
0001 111	7
1110 000	8
0011 001	9
1011 010	10
0110 011	11
0111 100	12
1010 101	13
0010 110	14
1111 111	15

Code de Hammings pour R = 3

Hamming a dit "ce qui est important dans les calculs, ce n'est pas les chiffres mais la vision qu'on en a" ("What is important in computation is insight, not numbers").

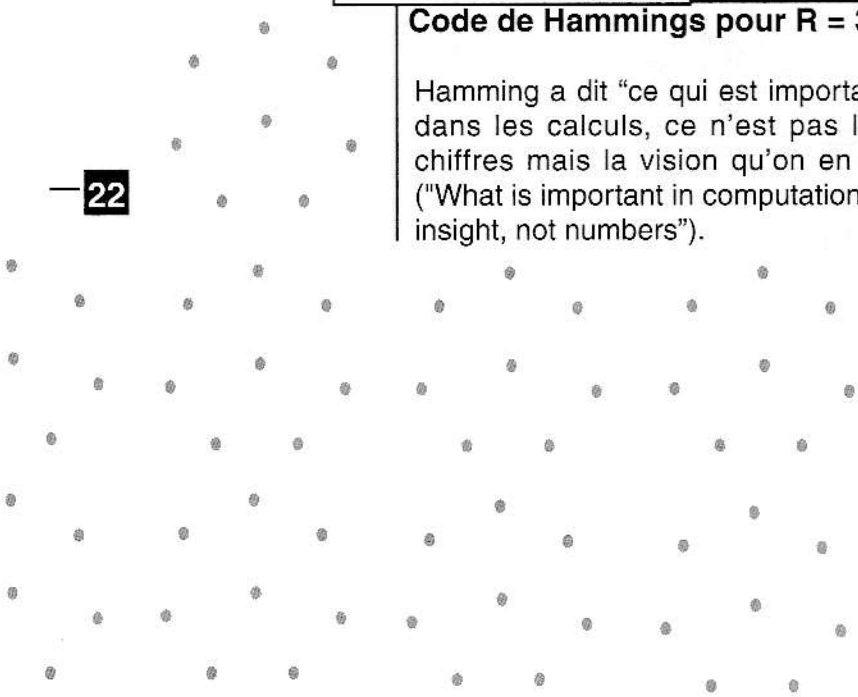


Fig. 36 : le code de Hamming comme code parfait

Les codes correcteurs d'erreurs ont été utilisés pour la première fois avec les sondes Mariners 6 et 7 envoyées pour photographier Mars en 1969.

Comme la distance Mars-Terre est très grande, lorsque le satellite envoie ses signaux, ils sont tellement faibles qu'on ne sait même pas si c'est 0 ou 1 que l'on reçoit.
Une photographie, c'est 5 millions de bits, coupés en morceaux et qui nous parvenait très correctement grâce aux codes correcteurs d'erreurs.

Le code utilisé était le code de Golay, inventé en 1954.
On prend 12 bits, et on en rajoute 11 soigneusement associés pour que l'on puisse corriger 3 erreurs.

Il existe de nombreux codes correcteurs d'erreurs. les chercheurs en mathématiques appliquées y consacrent beaucoup de leurs travaux.
Ainsi, pour les CD audio, vous n'entendrez pas les rayures comme on pouvait le faire sur nos vieux disques "noirs". Les codes correcteurs d'erreurs travaillent ici sur des paquets de 6 bits.

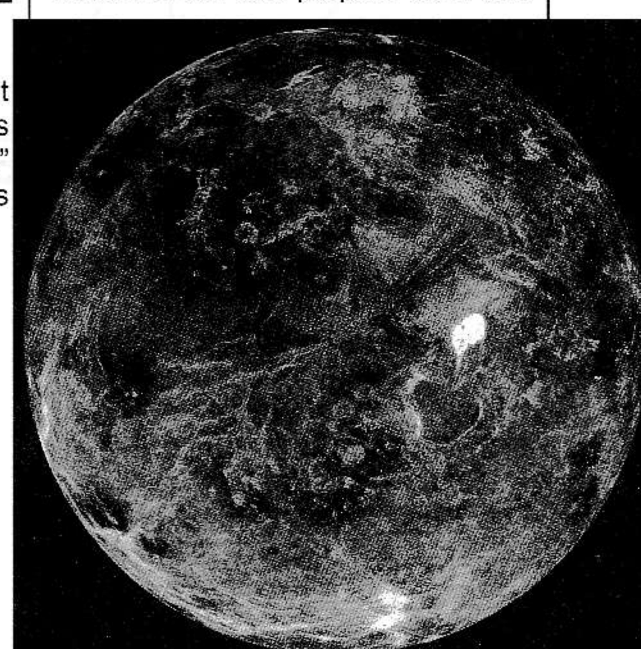


Fig 37 : photo de Vénus

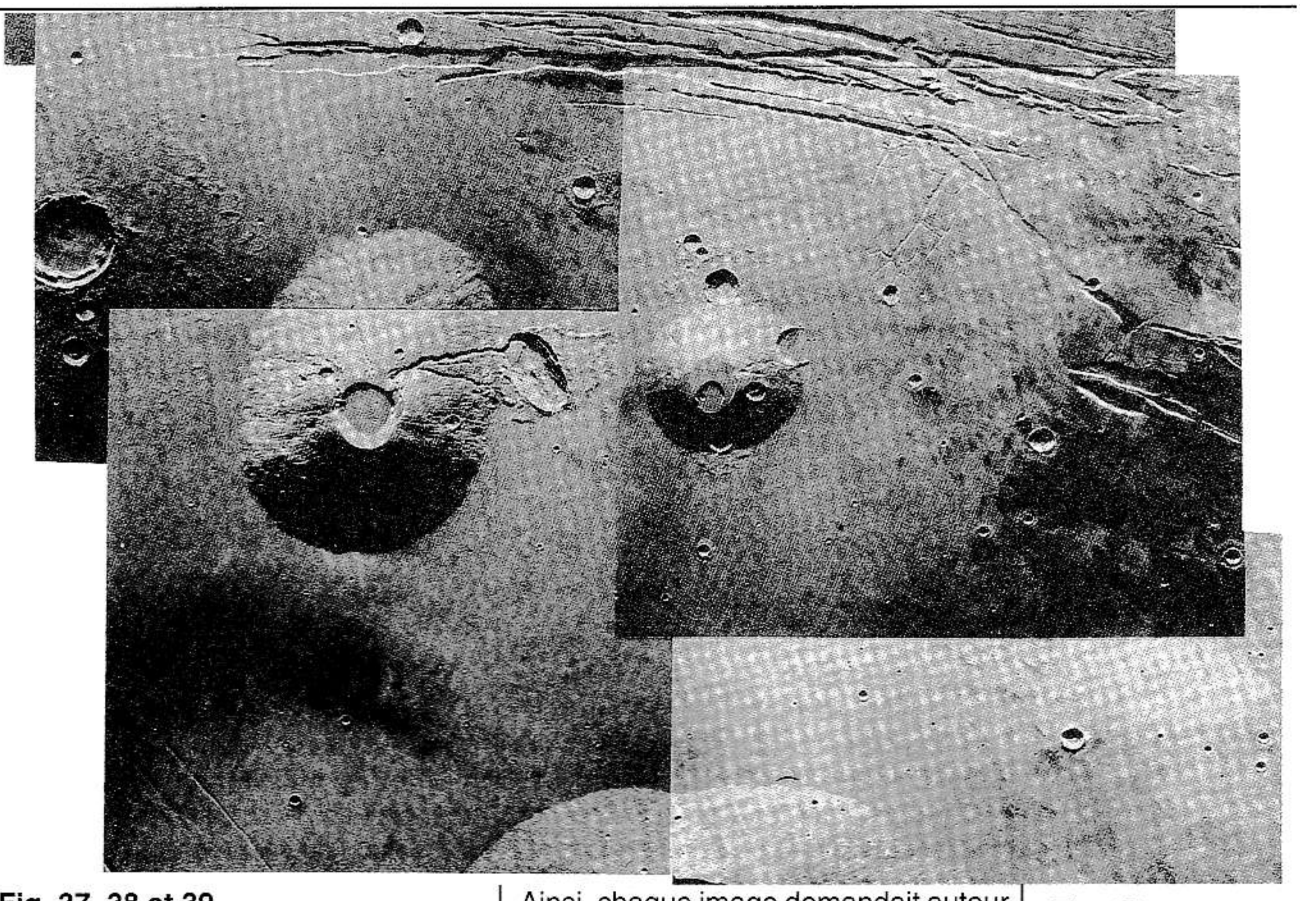
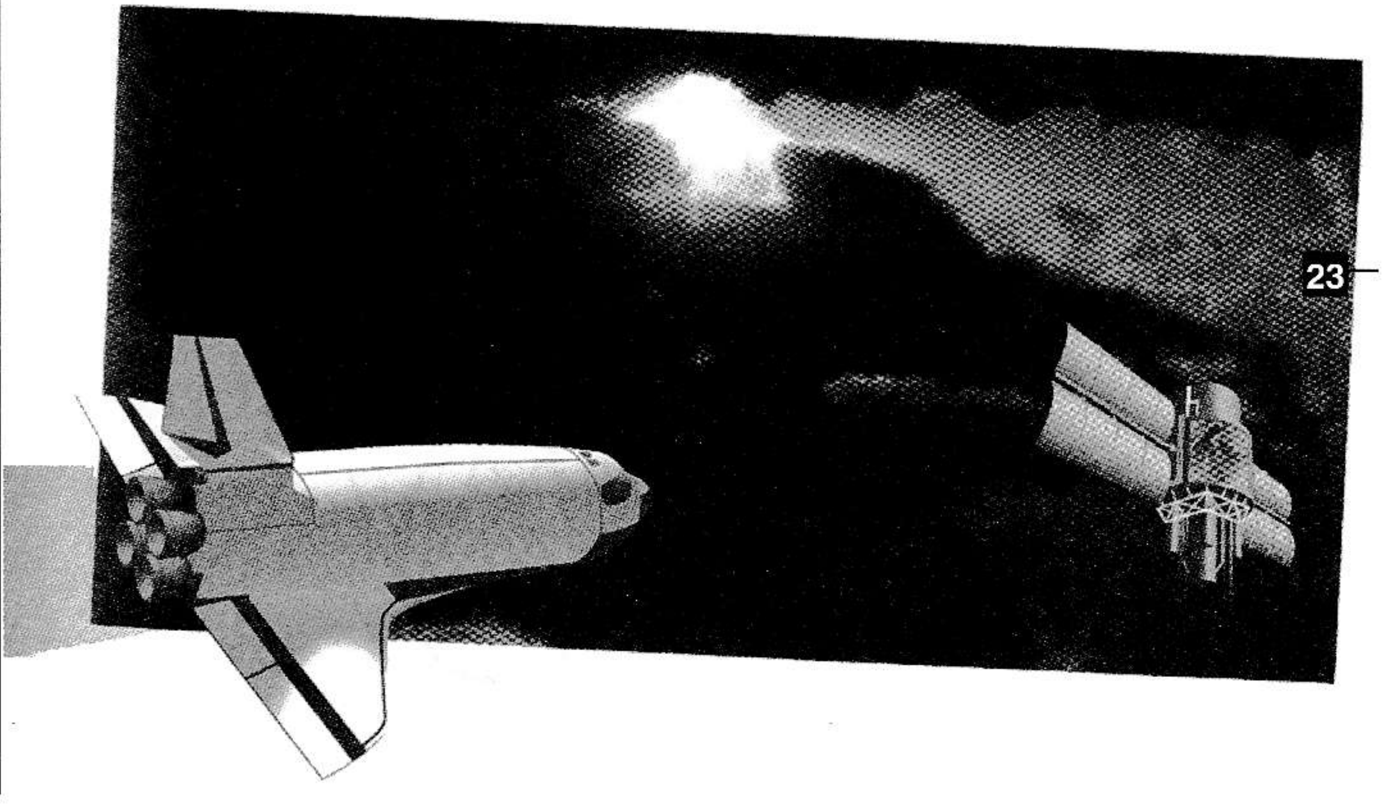


Fig. 37, 38 et 39
En 1969, les satellites Mariner 6 et 7 ont envoyé plus de 200 photographies de Mars.
Chaque photographie était divisée en 658.240 points et, à chaque point était attachée un niveau de brillance codé entre 1 et 28.

Ainsi, chaque image demandait autour de 5 millions d'informations unités (bits). Ces bits étaient codés, en utilisant un code auto correcteur, et transmis sur la Terre à la vitesse de 16.200 bits par seconde. Elles étaient ensuite réceptionnées, décodées, corrigées et transformées en image photographique.

Fig. 38 :
photos de Mars



En grandes dimensions, Elkies et Shiod ont trouvé en 1990 des codes très performants. Pour les diophantiens, mentionnons qu'il y a un lien entre les codes d'Elkies-Shiod et le théorème de Wiles-Fermat.
Ce sont les cubiques du plan. Les courbes les plus simples du plan sont les coniques, les ellipses, les hyperboles, les paraboles et ensuite on trouve les cubiques.
On peut avec les cubiques résoudre de très beaux problèmes de points qui s'alignent, de tangentes. Et c'est en étudiant ces configurations sur les cubiques, de façon bien sûr un peu plus compliqué, on trouve des codes détecteurs d'erreurs très performants et à démontrer le théorème de Fermat.

En dimension 24, en utilisant le code de Golay, on peut fabriquer un empilement de sphères extrêmement dense et à fabriquer un "kissing number" très large.
En dimension 4, on ne sait pas si l'on peut mettre plus de 24 sphères.
En dimension 8 on sait qu'on peut mettre 240 sphères (n'oubliez pas que leur volume diminue) et en dimension 24 on peut en mettre près de ... 200 000 !

Il se peut, grâce au kissing number, que l'on puisse démontrer que les meilleurs empilements que l'on connaîsse sont en dimension 8 et 24 ! Sans que l'on sache pourquoi.

C'est le mystère de la dimension 24 !!! ■

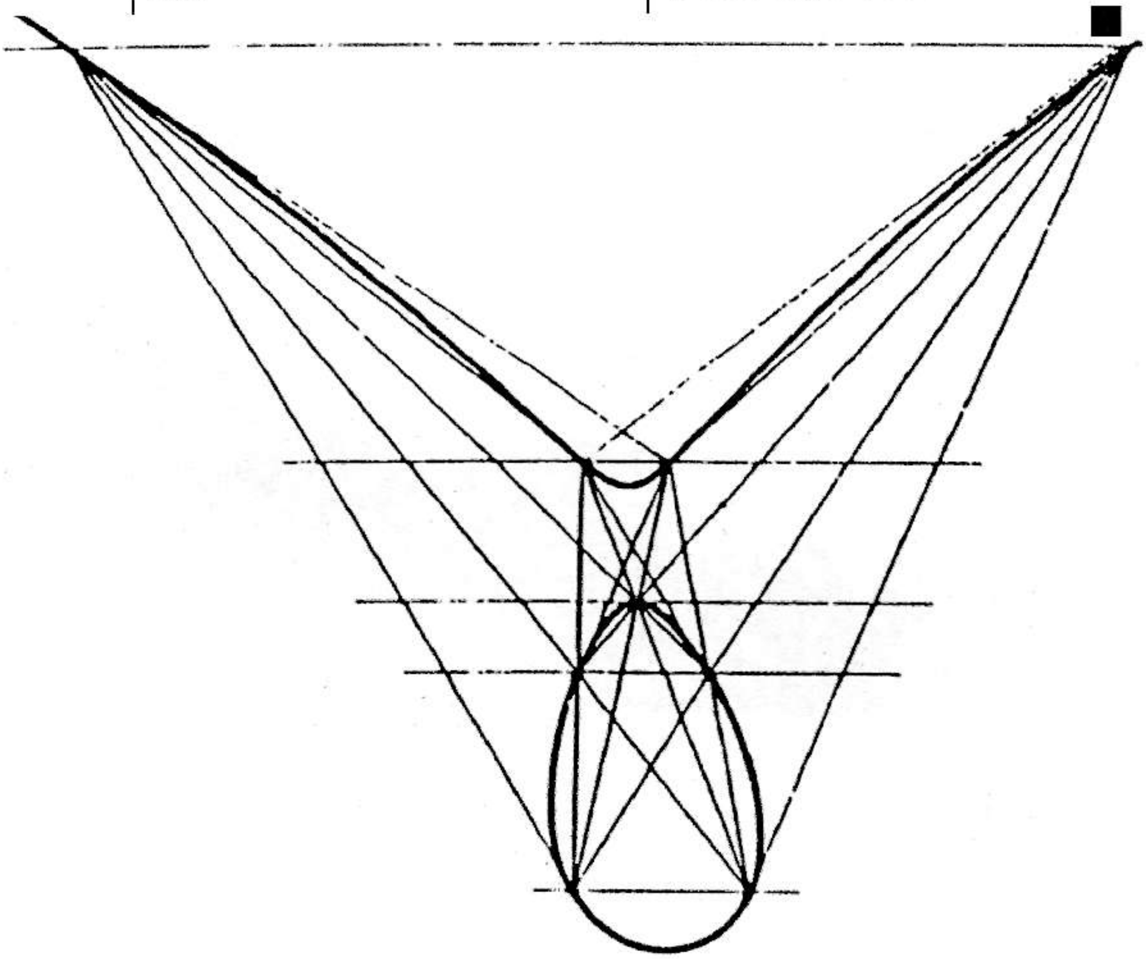


Fig. 40 : courbe d'équation y2 = $(x - a^p).(x - b^p).(x - c^p)$