Erreurs !! Solutions !? Démonstrations !!

Nahum Moreno, Paris

Comme l'indique le titre, il s'agit ici de présenter quelques erreurs faites par les élèves ; de proposer des solutions et faire quelques remarques sur la démonstration, la "preuve " ou les "preuves".

Erreurs et solutions

Il n'est pas question de faire ici un catalogue des erreurs commises par les élèves (il faudrait plusieurs numéros du Plot). Je voudrais simplement en mentionner quelques-unes et indiquer des stratégies pour apporter quelques solutions à ces difficultés.

Exemple n°1 : 3^{-2}

En classe de seconde, et parfois dans les classes ultérieures, les élèves rencontrent souvent des difficultés avec les puissances négatives. Par exemple, 3^{-2} sera calculé comme 0,03. C'est une erreur classique due au fait que l'élève a beaucoup manipulé les 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} .... On peut apprendre aux élèves d'effacer cette difficulté à l'aide de la calculatrice mais il y a un inconvénient majeur.

Pour 3^{-2}, la calculatrice affichera 0,111111 ... et l'élève réalisera son erreur mais sans risquer de reconnaître la valeur fractionnaire de 1/ 9. La solution qui s'impose dans ce type d'erreurs est de donner les moyens à l'élève de contrôler son résultat (par exemple à l'aide de la calculatrice) et de faire de nombreux exercices et à plusieurs reprises pour s'assurer que la règle est bien retenue.

Exemple 2 : x-y ou P-R ?

Dans un autre registre, de nombreux élèves rencontrent des difficultés dans l'usage des lettres autre que "x" dans les manipulations algébriques.

Des collègues, en Physique/ Chimie ou en Economie nous signalent que les élèves ont du mal à reconnaître des notions mathématiques déjà étudiées !!!

Après réflexion, nous nous sommes aperçus que l'usage de lettres autres que "x" ou "y" posait effectivement des problèmes de compréhension.

Dans une expérience *pluridisciplinaire* que nous menons en classe de seconde, nous avons adopté la démarche suivante :

- quand on donne des exercices de résolution d'équations ou d'inéquations, on utilise, bien sûr, "x" mais aussi des y, z, t, a, b, c, m, n ainsi que T, R, I ou encore α, β, γ, θ ... En concertation avec nos collègues nous avons donné des exercices faisant intervenir des notions d'économie ou de sciences du vivant.

En voici quelques exemples :

- Résistance en physique et manipulation algébrique de $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$

- Faire tracer des droites , d'une part en exprimant *"y en fonction affine de x"* mais aussi en exprimant *"d (pour distance) en fonction affine de t (pour le temps)"* ou encore *" F (pour offre) ou D (pour demande) en fonction de P (pour le prix par unité d'un bien)".*
- Faire prendre conscience aux élèves de la signification du "coefficient directeur" ou "pente" d'une droite, ainsi que les interprétations particulières de la pente. Concernant ces deux exemples,

la pente correspond à la vitesse (en précisant les unités, par exemple mètres par secondes, selon les données) ou la diminution de la demande quand le prix par unité augmente.

• Problème de pourcentage sur des prix, des réductions successives, ...

Exemple 3 :

D'autres difficultés sont sources d'erreurs chez les élèves et sont dues à un manque d'appui visuel ou graphique de propriétés algébriques (cf Plot n° 85). Des propriétés fondamentales comme :

Soit $a > 0$ et $b > 0$;
si $a < b$ alors $a^2 < b^2$ et $1/a > 1/b$;
Soit $a < 0$ et $b < 0$;
si $a < b$ alors $a^2 > b^2$ et $1/a > 1/b$

sont considérés trop abstraites par beaucoup d'élèves pour qu'ils puissent les mémoriser. On leur donne les moyens de les interpréter graphiquement en reproduisant les courbes de référence - paraboles ou hyperboles - avec ou sans l'aide de la calculatrice graphique, ils peuvent alors retrouver plus facilement ces propriétés.

D'ailleurs dans les quatre classes de notre lycée, nous avons décidé en commun de démarrer le programme par le chapitre sur les "fonctions" en nous consacrant à l'aspect graphique (avec un grand usage de la calculatrice).

Nous avons fait ressentir la nécessité des manipulations algébriques pour la résolution précise d'équations ou d'inéquations. Nous avons ensuite abordé les chapitres des équations, ordre et inéquations en mettant en pratique les méthodes indiquées ci-dessus. Nous poursuivrons sur cette voie et tâcherons de faire un bilan et une forme d'évaluation très bientôt.

Démonstrations

Tout le monde sait qu'il est très difficile de convaincre un matheux par des arguments non étayés de logique. D'où nos exigences concernant les preuves que fournissent les élèves. Sous forme anecdotique, on peut dire qu'il est facile, voire très facile, de convaincre un ami. Il est plus difficile de convaincre un adversaire, mais avec des arguments solides ...
C'est possible !!!

Cependant, pour convaincre un mathématicien, il faut des arguments sans failles.

Le terrain idéal pour l'apprentissage de la démonstration est, bien sûr, la géométrie. Si l'on se contente de le faire uniquement dans ce domaine, on perd la dimension réelle de la démonstration ainsi que de nombreuses subtilités rencontrées en algèbre et en arithmétique (et, a fortiori, en analyse). Les élèves ont tendance à croire que la démonstration se borne principalement à la géométrie, tandis qu'ailleurs, c'est une question de présentation des calculs, voire de la "rédaction" en plaçant des "car", "donc" ou "ssi", d'ailleurs souvent mal utilisés.

Mon but ici n'est pas de décrire nos objectifs concernant la démonstration en classe de mathématiques, mais d'illustrer par quelques exemples issus de l'algèbre ou de l'arithmétique des démarches que nous voulons développer chez l'élève pour qu'il soit conscient de la nécessité d'une démonstration pour "convaincre" un matheux. Cependant, la rigueur n'exclut pas la souplesse dans le choix de la méthode.

°Premier exemple

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on doit passer par le fait que *si le carré d'un entier naturel est pair, alors le nombre est pair.*

La démonstration que l'on cherche à faire faire à l'élève consiste à :
"montrer que si $n = 2k$ alors $n^2 = 2(2k^2)$" et que
"si $n = 2k + 1$ alors $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
ainsi, par exhaustion, la conclusion suit.

Pendant un cours de Seconde, une élève m'a répondu, après un court instant de réflexion, que le carré d'un nombre pair est pair car tout nombre se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 et son carré se termine par 0, 4 ou 6.
De même un nombre impair se termine par 1, 3, 5, 7 ou 9 et son carré se termine par 1, 5 ou 9. La conclusion s'imposait.

J'ai trouvé que la réponse était *convaincante* pour un matheux.

Voulant introduire la méthode "2k ; 2k + 1", j'ai dû attendre de terminer la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. C'était plus difficile !!! Après de longues conversations, j'ai fait remarquer que l'on pouvait utiliser la méthode du "2k ; 2k + 1" du cas précédent et un élève a enfin pensé à faire intervenir "3k ; 3k + 1, 3k + 2". Je n'ai pas voulu leur dire que 3k - 1 était "encore plus révélateur" que 3k + 2. L'objectif sur ce problème était atteint.

Deuxième exemple

Je fais remarquer aux élèves les résultats suivants :

$5^2 = 25$; $15^2 = 125$: $25^2 = 625$;

$35^2 = 1225$; $45^2 = 2025$ ...

Je leur ai demandé ensuite de conjecturer le résultat de 55^2, 65^2, 75^2, 85^2 et 95^2 sans l'aide de leur calculatrice et sans faire de calcul (mais de vérifier leurs résultats. Certains élèves ont trouvé des liens mais n'ont pas pensé ni à généraliser ni à démontrer. Après les avoir incités à réfléchir sur cette voie, ils sont arrivés à considérer x2 - y2 avec x > y, deux termes consécutifs de la suite 5, 15, 25 ... Cette activité a été faite en seconde et en première.

En seconde, on s'est contenté de "calculer le carré suivant" sur des cas particuliers, par exemple, sachant que $75^2 = 5625$, on pose x = 85 et y = 75 d'où :
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 10 \bullet 160 = 1600$
Enfin, on ajoute 1600 à 5625 pour obtenir 7225.
J'ai profité de cet exemple pour proposer les trois suivants :

En première, on a pu dégager une relation de récurrence et continuer avec les suites.

Troisième exemple :

Chercher l'erreur

1- Justifiez que 23 est un nombre premier.
On suppose que $n > 23$.
2- Montrez que si n est pair, alors n n'est pas premier.
3- On suppose que n est impair. On pose $x = (n+1)/2$ et $y = (n-1)/2$.
Justifier que x et y sont des entiers et que $n = x^2 - y^2$.
4- Puisque $n = (x-y)(x+y)$ est le produit de deux entiers alors n n'est pas premier.

Quatrième exemple :

Deux exercices d'unicité (les deux premiers peuvent être traités en seconde, première ou terminale ; le troisième ne peut l'être qu'en terminale spécialité).

1er exercice.
Montrer qu'il existe un seul triplet (x, y, z) de nombres premiers tel que :

$$x^y + 1 = z$$

[Indication : on démontre que $z \neq 2$; que x doit être 2 ; et que $2^{\text{impair}} + 1$ est un multiple de 3 ; enfin, **la** solution s'impose.]

<u>2è exercice.</u>

Il existe de nombreux nombres premiers impairs consécutifs ; par exemple 3-5 ; 17-19 ; 29-31 ; 137-139.

Montrer qu'il n'existe qu'un seul triplet de nombres premiers impairs consécutifs.

[Indication : on démontre que si n est entier naturel alors l'un des trois nombres n, n+2, n+4 est un multiple de 3.]

<u>3è exercice.</u>

"11, 12, 13" sont trois entiers consécutifs respectivement divisibles par 11, 12, 13. Trouver le prochain triplet d'entiers consécutifs respectivement divisibles par 11, 12 et 13.
[Réponse : 1727, 1728, 1729.]

Cinquième exemple :

Problème classique pouvant être traité algébriquement, géométriquement ou par l'analyse.

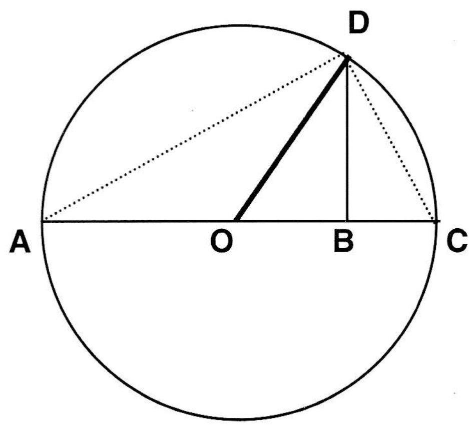
Soit a et b deux réels strictement positifs, on note :
$m = (a+b)/2$ [la moyenne arithmétique]
$g = \sqrt{ab}$ [la moyenne géométrique]
$h = [(a^{-1} + b^{-1})/2]^{-1}$ [moyenne harmonique]

En tant qu'activité cet exercice peut être traité dans un premier temps par son aspect graphique comme suit:

On pose $a = x$ et $b = 1$ et on trace, à l'aide de la calculatrice graphique, les fonctions F, G et H définies par $F(x) = (x+1)/2$; $G(x) = \sqrt{x}$ et $H(x) = 2x/(x+1)$.
On "constate", par la position relative des courbes (et en zoomant, éventuellement) que $F(x) \geq G(x) \geq H(x)$.

En deuxième étape on conjecture que $m \geq g \geq h$ et on le démontre, en prenant bien soin du bon usage de l'équivalence (ou du "si et seulement si".) On pourra demander de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité soit réalisée.

En troisième étape on pourra donner une interprétation géométrique de ce résultat. J'ai trouvé dans la référence [1] l'interprétation géométrique de la première inégalité (présentée ci-dessous) mais je lance un avis de recherche pour la deuxième.



Dans le cercle de centre O, [AC] est un diamètre.

Le triangle ADC est rectangle en D et [DB] est la hauteur issue de D.
Si on pose $AB = a$ et $BC = b$
on a $OD = (a+b)/2$ et $DB = \sqrt{ab}$.

Pour terminer voici :

Une **T**ouche **D**'Humour **D**ans **L**es **M**éthodes **D**e **D**émonstration :

Dans un article de la revue des professeurs de mathématiques américains "Mathematics Teacher" (référence [1]) [vol. 91, n° 8] Dick Wood donne toute une série de différentes méthodes de démonstration en mathématiques. En voici quelques perles :

Une touche d'humour pour terminer

H U MATHEMATICS O R	H U MATHEMATICS O R
Démonstration par évidence :	"La démonstration est triviale, elle est donc inutile."
Démonstration par consentement mutuel	"Tous ceux qui sont d'accord lèvent la main..."
Démonstration par commodité	"Ce serait si beau si c'était vrai, donc..."
Démonstration par nécessité	"ça devrait être vrai sinon toute la structure mathématique s'écroulerait.
Démonstration par plausibilité	"Ça a l'air bon, donc ça doit être vrai."
Démonstration par intimidation	"Ne soyez pas stupide ! Bien sûr que c'est vrai."
Démonstration par manque de temps	"Il ne reste plus beaucoup de temps ; je vous laisse faire la démonstration par vous-même.
Démonstration par accident	"Tiens ! Tiens ! Qu'avons-nous là ?"
Démonstration par définition	"On le définit comme vrai."
Démonstration par tautologie	"C'est vrai parce que c'est vrai."
Démonstration par plagia	"Comme nous le voyons à la page 289,..."
Démonstration par perte de référence	"Je sais que j'ai vu la démonstration quelque part."
Démonstration par complexité	"La démonstration est trop complexe pour la fournir ici."
Démonstration par manque d'intérêt	"Y a-t-il quelqu'un qui veut vraiment voir la démonstration."
Démonstration par la terreur	"Quand l'intimidation est insuffisante"
Démonstration par obstination	"Vous pouvez dire ce que vous voulez; moi je vous dis que c'est vrai."
Démonstration par analogie	"C'est tout à fait comme..."
Démonstration par autorité	"George Dumont a maintenu que c'est vrai, c'est donc vrai."
Démonstration par symbolisme.... excessif	" $\forall \alpha \in \Phi, \exists \ \beta \supset \alpha * \gamma$ ..."

Références :

- [1] Mathematics Teacher : volume 91, no. 8, Novembre 1998

[2] Topics in Mathematics, an integrated approach par M. Nahum et C. Le Gallo