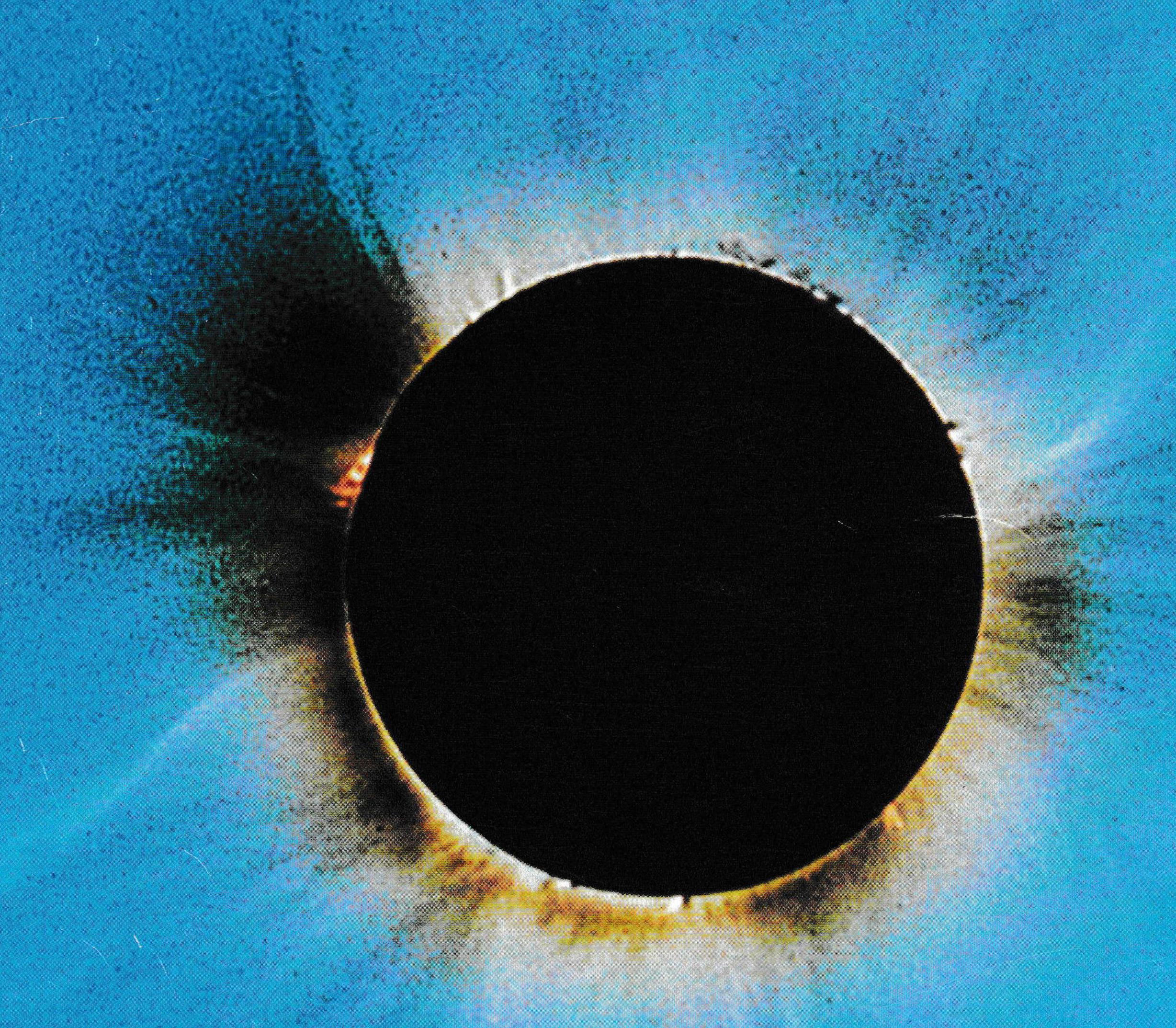
PLOT

n° 86



L'éclipse de Soleil 1999

ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger.

Printemps 1999

50 F

Plot 86 - printemps 1999

Sommaire

en couverture :
Éclipse artificielle
par coronographe.
Photo Koutchmy.
CNRS

Pensez à vous réabonner pour 1999 et 2000 année mondiale des mathématiques !

Éditorial

Mathématiciens et enseignants des mathématiques évoluent chacun à leur rythme. Les mathématiciens construisent sans cesse de nouvelles connaissances, liées de plus en plus aux autres sciences. Les enseignants s'efforcent de maintenir une distance minimale entre ces nouvelles connaissances et leurs élèves en jouant avec les programmes qui s'allègent régulièrement.

Depuis vingt ans, l'équipe du Plot a contribué à minimiser cette distance. Mais le temps passe et la relève ne se présente pas. Aussi avons-nous décidé de passer la main d'ici la fin de l'an 2000. Y aura-t-il relève de la part des militants de l'association ? Cela dépend de vous, de votre souhait à continuer à faire vivre ce bulletin en y rapportant vos expériences et en élargissant le nombre de ses abonnés.

Quoi qu'il en soit, l'équipe rédactionnelle et la régionale qui gère le journal s'engage à vous fournir 2 années de bouquet final qui cherchera dans l'actualité de l'année mondiale des mathématiques à vous faire partager les réflexions qui se font sur les mathématiques et leur enseignement.

Deux ans, deux ans ...

Réabonnez-vous pour deux ans, jusqu'à l'an 2000 !

Le pavage de Pythagore

pour aller plus loin

Pour les allumés des maths !!!

Cet article reprend le problème posé dans le Plot 85 page 35

Comment peut-on paver le plan avec des carrés de dimensions différentes ?

Les mosaïques islamiques ont depuis longtemps apporté des réponses, mais Pythagore avait, bien avant, proposé des solutions.

Situation 1

Deux types de carrés pavent régulièrement le plan. Pouvez-vous expliquer comment est construit ce pavage ?

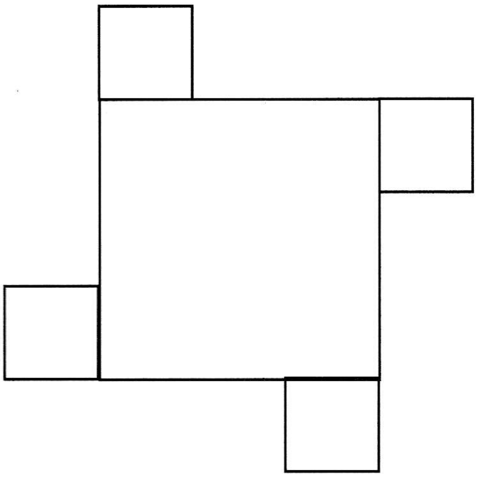
Les carrés ont-ils été choisis au hasard ?

Observez la partie hachurée de la page de droite. Si vous faites une rotation d'un quart de tour autour du centre du grand carré, où allez-vous retrouver le petit carré ?

Si vous faites une rotation d'un quart de tour autour du centre du petit carré, où allez-vous retrouver le grand carré ?

Découpez des grands carrés et des petits ou mieux, munissez-vous de deux types de carrelages carrés, le côté de l'un n'étant pas la moitié du côté de l'autre. Refaites un pavage du même type.

Observez les centres des grands carrés. Que remarquez-vous ? Faites de même avec les centres des petits carrés.



En partant du dessin ci-dessous, réalisez un pavage du même type que celui de la page 3.

Marquez en bleu, les centres des grands carrés, en rouge les centres des petits carrés.

Reliez les points rouges voisins en formant des carrés.Reliez les points bleus voisins en formant des carrés.

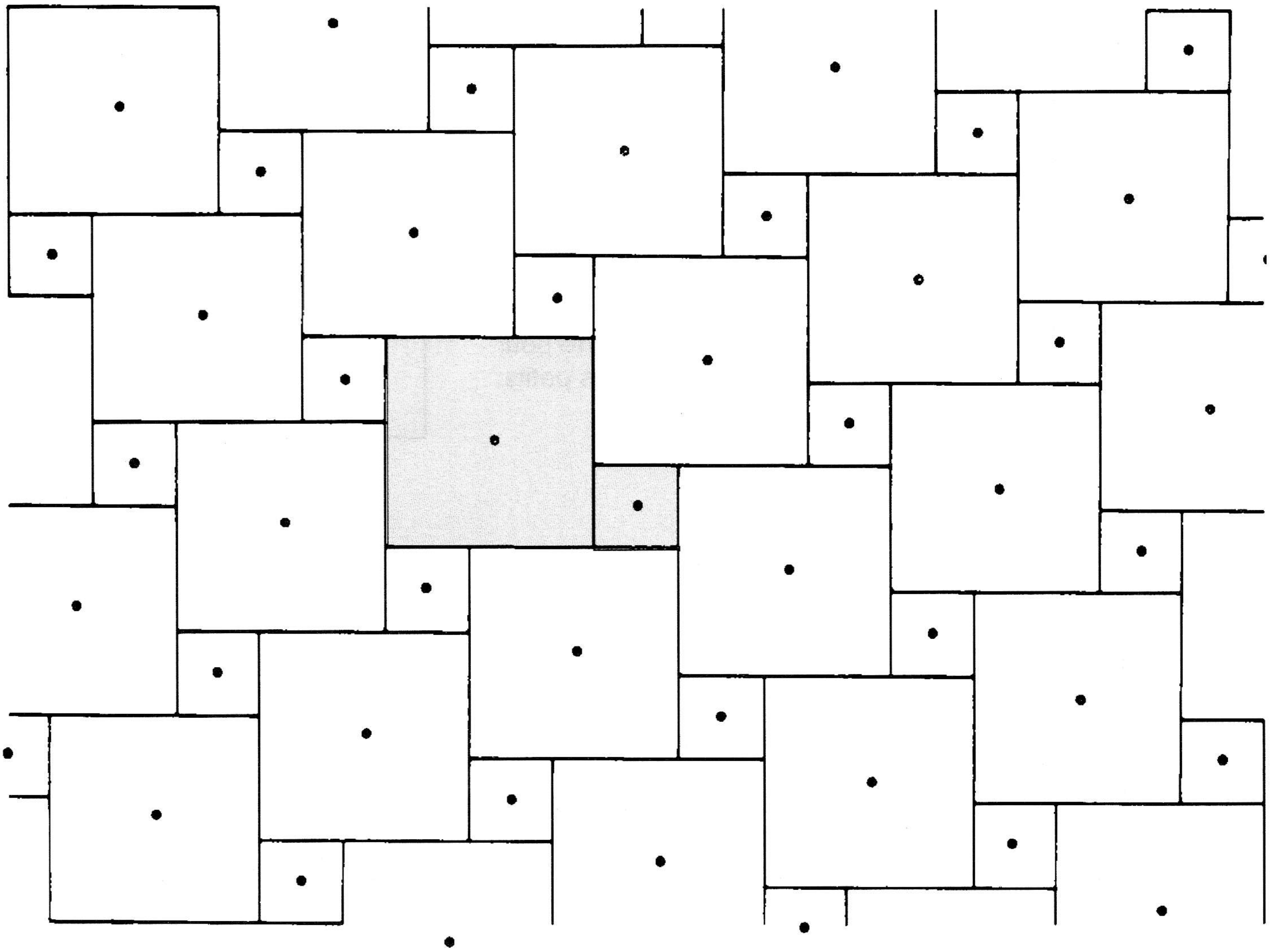
Que remarquez-vous ?

Reprenez l'un des pavages réalisés et dessinez maintenant des carrés de dimensions aussi différentes que possible en reliant les <u>sommets</u> des carrés.

Quel est le plus petit carré qui puisse être dessiné ? Quel est le plus petit des carrés suivants ? Et après ?

Essayez de trouver une méthode de calcul des aires de ces carrés.

Merci de bien vouloir envoyer vos commentaires et réflexions à
Marc Blanchard,
39, rue Barbès.
17300 Rochefort/mer.



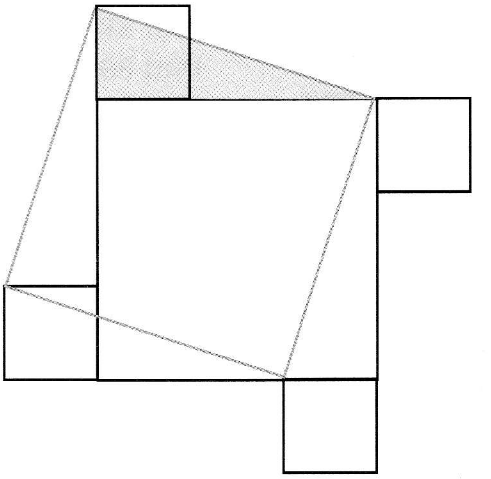
Situation 2

Voici, à droite, une partie du pavage. Découpez le nouveau carré. Sur ce carré découpé, il y a des lignes qui permettent en coupant d'obtenir 5 morceaux de puzzle. Vous pouvez les réarranger pour faire deux carrés.

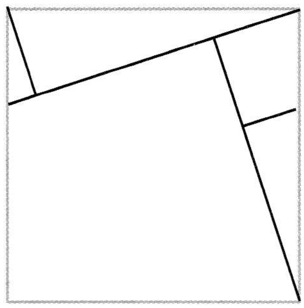
Que remarquez-vous ?

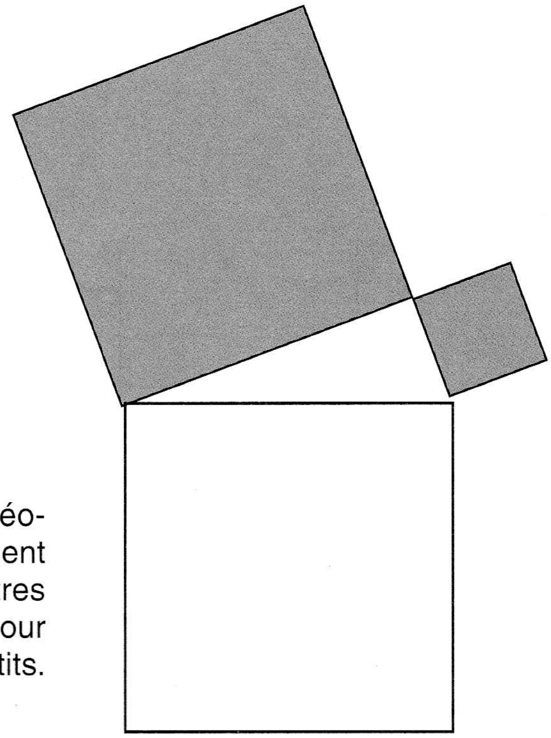
Que pouvez-vous dire des aires de ces carrés et de l'aire du plus grand carré ?

Enfin observez les longueurs des cotés du triangle ombré. Que pouvez-vous en dire ?



Réabonnez-vous vite pour un an, pour deux ans ... jusqu'à l'an 2000, année mondiale des mathématiques !!!





Pour en terminer avec le théorème de Pythagore, très présent ici, essayez de trouver d'autres découpages du grand carré pour reconstituer les deux plus petits.

le PLOT

le PLOT en 99 et 2ooo

Journal des régionales Apmep de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, le **PLOT vous propose** pour les deux années à venir quatre numéros sur l'enseignement et la culture mathématique pour le Collège et le Lycée : chaque numéro est illustré d'activités et de réflexions sur l'évolution des mathématiques.

Réabonnez-vous vite et faites abonner votre CDI, vous trouverez encore, dans les prochains numéros, de quoi alimenter la culture mathématique et les activités en classe:

	Plot 87	Astronomie et éclipse du Soleil (été 99)
les quatre	**Plot 88**	des maths grecques aux maths arabes (sept. 99)
numéros	**Plot 89**	L'année de tous les zéros (hiver 2ooo)
à venir	**Plot 90**	Les maths des figures impossibles (printemps 2ooo)

Tarifs 1999/2ooo

Pour les adhérents individuels :	140 F pour un an, **250 F pour 2 ans**
Pour les établissements scolaires :	160 F pour un an, **300 F pour 2 ans**

Supplément avion 50 F par an

Envoyez votre règlement et votre abonnement à :

Apmep d'Orléans-Tours. IREM-Université - BP 6759 , 45067 Orléans-La Source

Erreurs !! Solutions !? Démonstrations !!

Nahum Moreno, Paris

Comme l'indique le titre, il s'agit ici de présenter quelques erreurs faites par les élèves ; de proposer des solutions et faire quelques remarques sur la démonstration, la "preuve " ou les "preuves".

Erreurs et solutions

Il n'est pas question de faire ici un catalogue des erreurs commises par les élèves (il faudrait plusieurs numéros du Plot). Je voudrais simplement en mentionner quelques-unes et indiquer des stratégies pour apporter quelques solutions à ces difficultés.

Exemple n°1 : 3^{-2}

En classe de seconde, et parfois dans les classes ultérieures, les élèves rencontrent souvent des difficultés avec les puissances négatives. Par exemple, 3^{-2} sera calculé comme 0,03. C'est une erreur classique due au fait que l'élève a beaucoup manipulé les 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} .... On peut apprendre aux élèves d'effacer cette difficulté à l'aide de la calculatrice mais il y a un inconvénient majeur.

Pour 3^{-2}, la calculatrice affichera 0,111111 ... et l'élève réalisera son erreur mais sans risquer de reconnaître la valeur fractionnaire de 1/ 9. La solution qui s'impose dans ce type d'erreurs est de donner les moyens à l'élève de contrôler son résultat (par exemple à l'aide de la calculatrice) et de faire de nombreux exercices et à plusieurs reprises pour s'assurer que la règle est bien retenue.

Exemple 2 : x-y ou P-R ?

Dans un autre registre, de nombreux élèves rencontrent des difficultés dans l'usage des lettres autre que "x" dans les manipulations algébriques.

Des collègues, en Physique/ Chimie ou en Economie nous signalent que les élèves ont du mal à reconnaître des notions mathématiques déjà étudiées !!!

Après réflexion, nous nous sommes aperçus que l'usage de lettres autres que "x" ou "y" posait effectivement des problèmes de compréhension.

Dans une expérience *pluridisciplinaire* que nous menons en classe de seconde, nous avons adopté la démarche suivante :
- quand on donne des exercices de résolution d'équations ou d'inéquations, on utilise, bien sûr, "x" mais aussi des y, z, t, a, b, c, m, n ainsi que T, R, I ou encore α, β, γ, θ ... En concertation avec nos collègues nous avons donné des exercices faisant intervenir des notions d'économie ou de sciences du vivant.

En voici quelques exemples :

• Résistance en physique et manipulation algébrique de $1/ R = 1/R_1 + 1/R_2$

• Faire tracer des droites , d'une part en exprimant *"y en fonction affine de x"* mais aussi en exprimant *"d (pour distance) en fonction affine de t (pour le temps)"* ou encore *" F (pour offre) ou D (pour demande) en fonction de P (pour le prix par unité d'un bien)".*

• Faire prendre conscience aux élèves de la signification du "coefficient directeur" ou "pente" d'une droite, ainsi que les interprétations particulières de la pente. Concernant ces deux exemples, la pente correspond à la vitesse (en précisant les unités, par exemple mètres par secondes, selon les données) ou la diminution de la demande quand le prix par unité augmente.

• Problème de pourcentage sur des prix, des réductions successives, ...

Exemple 3 :

D'autres difficultés sont sources d'erreurs chez les élèves et sont dues à un manque d'appui visuel ou graphique de propriétés algébriques (cf Plot n° 85). Des propriétés fondamentales comme :

Soit $a > 0$ et $b > 0$;
si $a < b$ alors $a^2 < b^2$ et $1/a > 1/b$;
Soit $a < 0$ et $b < 0$;
si $a < b$ alors $a^2 > b^2$ et $1/a > 1/b$

sont considérés trop abstraites par beaucoup d'élèves pour qu'ils puissent les mémoriser. On leur donne les moyens de les interpréter graphiquement en reproduisant les courbes de référence - paraboles ou hyperboles - avec ou sans l'aide de la calculatrice graphique, ils peuvent alors retrouver plus facilement ces propriétés.

D'ailleurs dans les quatre classes de notre lycée, nous avons décidé en commun de démarrer le programme par le chapitre sur les "fonctions" en nous consacrant à l'aspect graphique (avec un grand usage de la calculatrice).

Nous avons fait ressentir la nécessité des manipulations algébriques pour la résolution précise d'équations ou d'inéquations. Nous avons ensuite abordé les chapitres des équations, ordre et inéquations en mettant en pratique les méthodes indiquées ci-dessus. Nous poursuivrons sur cette voie et tâcherons de faire un bilan et une forme d'évaluation très bientôt.

Démonstrations

Tout le monde sait qu'il est très difficile de convaincre un matheux par des arguments non étayés de logique. D'où nos exigences concernant les preuves que fournissent les élèves. Sous forme anecdotique, on peut dire qu'il est facile, voire très facile, de convaincre un ami. Il est plus difficile de convaincre un adversaire, mais avec des arguments solides ...
C'est possible !!!

Cependant, pour convaincre un mathématicien, il faut des arguments sans failles.

Le terrain idéal pour l'apprentissage de la démonstration est, bien sûr, la géométrie. Si l'on se contente de le faire uniquement dans ce domaine, on perd la dimension réelle de la démonstration ainsi que de nombreuses subtilités rencontrées en algèbre et en arithmétique (et, a fortiori, en analyse). Les élèves ont tendance à croire que la démonstration se borne principalement à la géométrie, tandis qu'ailleurs, c'est une question de présentation des calculs, voire de la "rédaction" en plaçant des "car", "donc" ou "ssi", d'ailleurs souvent mal utilisés.

Mon but ici n'est pas de décrire nos objectifs concernant la démonstration en classe de mathématiques, mais d'illustrer par quelques exemples issus de l'algèbre ou de l'arithmétique des démarches que nous voulons développer chez l'élève pour qu'il soit conscient de la nécessité d'une démonstration pour "convaincre" un matheux. Cependant, la rigueur n'exclut pas la souplesse dans le choix de la méthode.

°Premier exemple

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on doit passer par le fait que *si le carré d'un entier naturel est pair, alors le nombre est pair.*

La démonstration que l'on cherche à faire faire à l'élève consiste à :
"montrer que si $n = 2k$ alors $n^2 = 2(2k^2)$" et que
"si $n = 2k + 1$ alors $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
ainsi, par exhaustion, la conclusion suit.

Pendant un cours de Seconde, une élève m'a répondu, après un court instant de réflexion, que le carré d'un nombre pair est pair car tout nombre se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 et son carré se termine par 0, 4 ou 6.
De même un nombre impair se termine par 1, 3, 5, 7 ou 9 et son carré se termine par 1, 5 ou 9. La conclusion s'imposait.

J'ai trouvé que la réponse était *convaincante* pour un matheux.

Voulant introduire la méthode "2k ; 2k + 1", j'ai dû attendre de terminer la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. C'était plus difficile !!! Après de longues conversations, j'ai fait remarquer que l'on pouvait utiliser la méthode du "2k ; 2k + 1" du cas précédent et un élève a enfin pensé à faire intervenir "3k ; 3k + 1, 3k + 2". Je n'ai pas voulu leur dire que 3k - 1 était "encore plus révélateur" que 3k + 2. L'objectif sur ce problème était atteint.

Deuxième exemple

Je fais remarquer aux élèves les résultats suivants :

$5^2 = 25$; $15^2 = 125$: $25^2 = 625$;

$35^2 = 1225$; $45^2 = 2025$ ...

Je leur ai demandé ensuite de conjecturer le résultat de 55^2, 65^2, 75^2, 85^2 et 95^2 sans l'aide de leur calculatrice et sans faire de calcul (mais de vérifier leurs résultats. Certains élèves ont trouvé des liens mais n'ont pas pensé ni à généraliser ni à démontrer. Après les avoir incités à réfléchir sur cette voie, ils sont arrivés à considérer x2 - y2 avec x > y, deux termes consécutifs de la suite 5, 15, 25 ... Cette activité a été faite en seconde et en première.

En seconde, on s'est contenté de "calculer le carré suivant" sur des cas particuliers, par exemple, sachant que $75^2 = 5625$, on pose $x = 85$ et $y = 75$ d'où :
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 10 \bullet 160 = 1600$
Enfin, on ajoute 1600 à 5625 pour obtenir 7225.
J'ai profité de cet exemple pour proposer les trois suivants :

En première, on a pu dégager une relation de récurrence et continuer avec les suites.

Troisième exemple :

Chercher l'erreur

1- Justifiez que 23 est un nombre premier.
On suppose que $n > 23$.
2- Montrez que si n est pair, alors n n'est pas premier.
3- On suppose que n est impair. On pose $x = (n+1)/2$ et $y = (n-1)/2$.
Justifier que x et y sont des entiers et que $n = x^2 - y^2$.
4- Puisque $n = (x-y)(x+y)$ est le produit de deux entiers alors n n'est pas premier.

Quatrième exemple :

Deux exercices d'unicité (les deux premiers peuvent être traités en seconde, première ou terminale ; le troisième ne peut l'être qu'en terminale spécialité).

1er exercice.
Montrer qu'il existe un seul triplet (x, y, z) de nombres premiers tel que :

$$x^y + 1 = z$$

[Indication : on démontre que $z \neq 2$; que x doit être 2 ; et que $2^{\text{impair}} + 1$ est un multiple de 3 ; enfin, **la** solution s'impose.]

2è exercice.

Il existe de nombreux nombres premiers impairs consécutifs ; par exemple 3-5 ; 17-19 ; 29-31 ; 137-139.

Montrer qu'il n'existe qu'un seul triplet de nombres premiers impairs consécutifs.

[Indication : on démontre que si n est entier naturel alors l'un des trois nombres n, n+2, n+4 est un multiple de 3.]

3è exercice.

"11, 12, 13" sont trois entiers consécutifs respectivement divisibles par 11, 12, 13. Trouver le prochain triplet d'entiers consécutifs respectivement divisibles par 11, 12 et 13.
[Réponse : 1727, 1728, 1729.]

Cinquième exemple :

Problème classique pouvant être traité algébriquement, géométriquement ou par l'analyse.

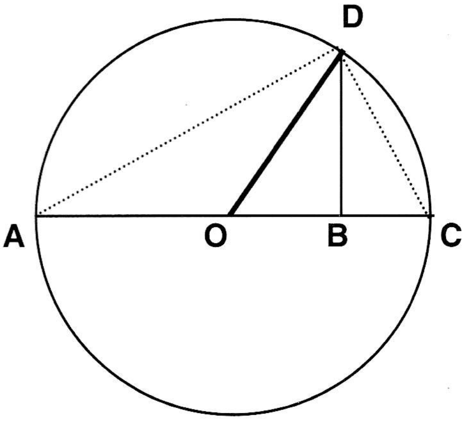
Soit a et b deux réels strictement positifs, on note :
$m = (a+b)/2$ [la moyenne arithmétique]
$g = \sqrt{ab}$ [la moyenne géométrique]
$h = [(a^{-1} + b^{-1})/2]^{-1}$ [moyenne harmonique]

En tant qu'activité cet exercice peut être traité dans un premier temps par son aspect graphique comme suit:

On pose $a = x$ et $b = 1$ et on trace, à l'aide de la calculatrice graphique, les fonctions F, G et H définies par $F(x) = (x+1)/2$; $G(x) = \sqrt{x}$ et $H(x) = 2x/(x+1)$.
On "constate", par la position relative des courbes (et en zoomant, éventuellement) que $F(x) \geq G(x) \geq H(x)$.

En deuxième étape on conjecture que $m \geq g \geq h$ et on le démontre, en prenant bien soin du bon usage de l'équivalence (ou du "si et seulement si".) On pourra demander de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité soit réalisée.

En troisième étape on pourra donner une interprétation géométrique de ce résultat. J'ai trouvé dans la référence [1] l'interprétation géométrique de la première inégalité (présentée ci-dessous) mais je lance un avis de recherche pour la deuxième.



Dans le cercle de centre O, [AC] est un diamètre.

Le triangle ADC est rectangle en D et [DB] est la hauteur issue de D.
Si on pose AB = a et BC = b
on a $OD = (a+b)/2$ et $DB = \sqrt{ab}$.

Pour terminer voici :

Une **T**ouche **D**'Humour **D**ans **L**es **M**éthodes **D**e **D**émonstration :

Dans un article de la revue des professeurs de mathématiques américains "Mathematics Teacher" (référence [1]) [vol. 91, n° 8] Dick Wood donne toute une série de différentes méthodes de démonstration en mathématiques. En voici quelques perles :

Une touche d'humour pour terminer

H U MATHEMATICS O R	H U MATHEMATICS O R
Démonstration par évidence :	"La démonstration est triviale, elle est donc inutile."
Démonstration par consentement mutuel	"Tous ceux qui sont d'accord lèvent la main..."
Démonstration par commodité	"Ce serait si beau si c'était vrai, donc..."
Démonstration par nécessité	"ça devrait être vrai sinon toute la structure mathématique s'écroulerait.
Démonstration par plausibilité	"Ça a l'air bon, donc ça doit être vrai."
Démonstration par intimidation	"Ne soyez pas stupide ! Bien sûr que c'est vrai."
Démonstration par manque de temps	"Il ne reste plus beaucoup de temps ; je vous laisse faire la démonstration par vous-même.
Démonstration par accident	"Tiens ! Tiens ! Qu'avons-nous là ?"
Démonstration par définition	"On le définit comme vrai."
Démonstration par tautologie	"C'est vrai parce que c'est vrai."
Démonstration par plagia	"Comme nous le voyons à la page 289,..."
Démonstration par perte de référence	"Je sais que j'ai vu la démonstration quelque part."
Démonstration par complexité	"La démonstration est trop complexe pour la fournir ici."
Démonstration par manque d'intérêt	"Y a-t-il quelqu'un qui veut vraiment voir la démonstration."
Démonstration par la terreur	"Quand l'intimidation est insuffisante"
Démonstration par obstination	"Vous pouvez dire ce que vous voulez; moi je vous dis que c'est vrai."
Démonstration par analogie	"C'est tout à fait comme..."
Démonstration par autorité	"George Dumont a maintenu que c'est vrai, c'est donc vrai."
Démonstration par symbolisme.... excessif	" $\forall \alpha \in \Phi, \exists \beta \supset \alpha * \gamma$ ..."

Références :

• [1] Mathematics Teacher : volume 91, no. 8, Novembre 1998

[2] Topics in Mathematics, an integrated approach par M. Nahum et C. Le Gallo

François Morellet,

un artiste π-quant

François Morellet, artiste-peintre, vient d'exposer à Tours et à Bourges.

π-piquant et π-rococo

Le projet conçu par F. Morellet pour Tours, en partenariat avec le Städtisches Museum Schlob Morsbroich de Leverkusen en Allemagne, s'avère étonnamment complet.

Le programme "*π-cturaux: π-quant et π rococo*", comporte une version urbaine et une exposition. Le jeu de mots croise la rigueur scientifique, elle-même déterminée par le hasard des décimales du nombre π. Déjà sélectionné pour le site Internet du Ministère de la Culture, ce projet acquiert une dimension internationale qui parvient à concilier la permanence et l'éphémère.

π-cturaux :

π =
3,1415
9265
3589
....

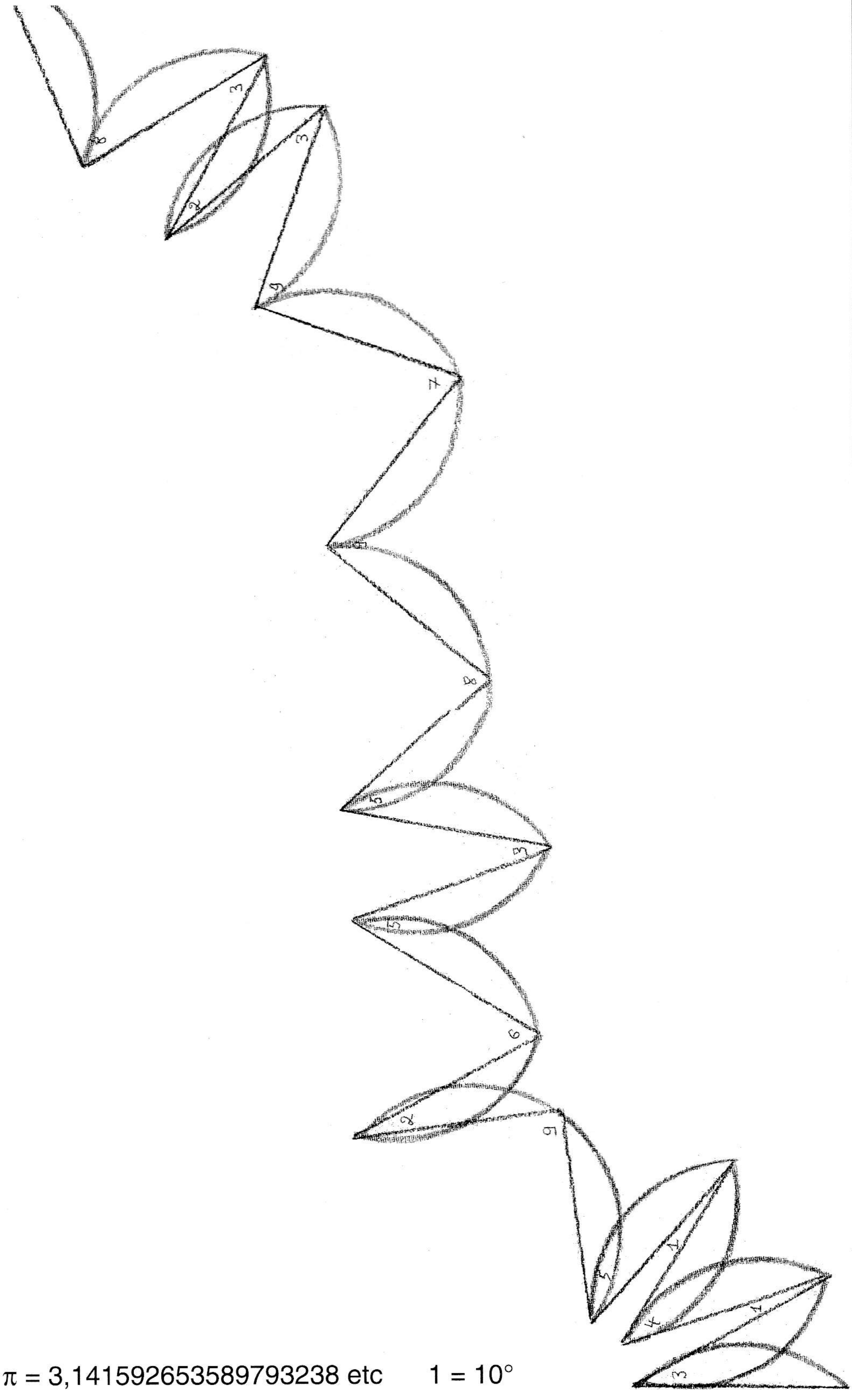
Voici donc le point de départ de *"π-cturaux"* : n = 3,141592653589... À partir d'un segment de droite, long de 1 mètre - qui détermine l'une des unités possibles de cette œuvre - chaque décimale du nombre π est traduite en un angle en degrés. Un segment courbe en néon correspond à chaque segment droit. Se constitue alors une grille sur laquelle viennent s'inscrire les arcs lumineux des tubes de néon bleus.

Courbes, néons et surfaces peintes et colorées, sont dénommés *πrococo"*. Dessins et droites, créés par ordinateur, sont désignés par le terme *"πpiquant"*. L'ensemble du programme a pour titre générique *"πpicturaux"*, rassemblant la grille informatique et ses développements lumineux et ondoyants.

Ainsi le système rigoureux et austère des lignes droites acquiert l'apparence poétique d'un déploiement sans fin d'étoiles lumineuses. Le point de départ de cette ligne, qui rend visible le mystère de l'infini, trouve un développement urbain à Tours, avant de se poursuivre dans d'autres institutions et d'autres villes. Le projet architectural des néons est prolongé de manière inédite par une exposition qui présente, pour la première fois, la totalité du programme *"πpicturaux"*, et offre au spectateur une autre vision de cette « œuvre ouverte », dont le développement linéaire abolit jusqu'aux frontières de l'espace.

L'exposition de Tours a accueilli plusieurs séries de toiles peintes représentant, à différentes échelles, la grille de formation du dessin *"πpiquant"* dont chaque direction est matérialisée par une droite et prolongée jusqu'aux limites de la toile. Dépassant le cadre du tableau, ces droites forment un réseau de lignes potentiellement infinies, sur lesquelles se superposent les courbes de *"πrococo"* . Deux développements de tubes néons, l'un rouge et l'autre bleu, sont la version concrète de *"πpicturaux"*. Ils font écho aux deux dessins muraux, qui prennent place à même les cimaises de l'espace d'exposition et sont, en quelque sorte, l'esquisse du projet.

Les œuvres font apparaître les nombreuses possibilités du système



π = 3,141592653589793238 etc   1 = 10°

Des lignes géométriques très simples et les décimales de π inspirent les créations de ce "rigoureux rigolard".

11

Pour aller plus loin avec <u>des revues</u> :
Catalogue du musée des Beaux-Arts d'Angers, 1997
La revue des Pays de Loire, n° 54, Nantes, 1997
<u>et un livre</u> :
François Morellet par Lemoine Serge. Flammarion, Paris 1996.

"πpicturaux" qui peut adopter plusieurs modes de transposition des décimales du chiffre 7c vers les degrés des angles: 1 = 10° ou 1 = 30°, ou encore 1 = 45°, 60°, 90° ... Tout est jouable mais pas égal. Les étoiles du système 10 laissent la place aux triangles du système 60, qui s'éclipsent pour les carrés du système 90. Une fois ce simple choix effectué, la simple application d'un processus laisse l'artiste, comme à son habitude, heureux de constater que l'extraordinaire diversité de *"πpicturaux"* ne doit rien au «génie créateur» mais s'avère, bien au contraire, totalement autonome. Alors même que les chercheurs abordent la six-cent milliardième décimale en (désespérant qu'il se passe «enfin quelque chose», François Morellet se réjouit de l'absolue inutilité scientifique de son invention. Affirmons toutefois (car lui-même ne le fera pas) qu'il contribue agréablement à cette recherche inifinie... sur un mode artistique - combien plus attirant.

Figure emblématique de l'abstraction géométrique, François Morellet est l'un des artistes français de sa génération le plus représenté dans les collections étrangères. Né en 1926, il vit et travaille aujourd'hui à Cholet, dans le Maine-et-Loire, après avoir pendant de nombreuses années partagé son temps entre Paris et New-York. Développant son œuvre à partir de 1946, c'est au début des années 50 que l'artiste vient à l'abstraction, dans l'entourage de l'École de Paris. Tranchant pour un art systématique, il est décidé à en supprimer tout investissement personnel ou décision subjective.

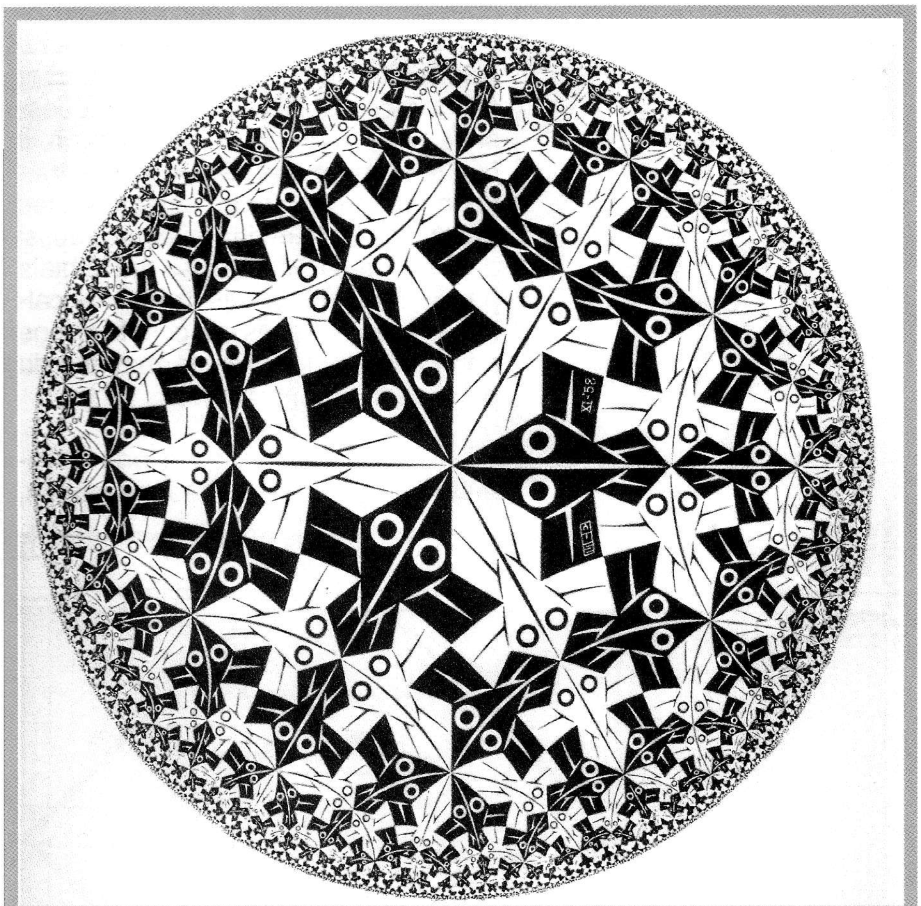
Dans les années soixante, l'artiste parvient définitivement à l'élaboration - consciente et amusée - d'un langage pictural proprement « impersonnel » : superpositions, fragmentations, juxtapositions et interférences, auxquelles s'adjoint le hasard. C'est à cette période que Morellet réalise ses premières *Installations,* dont de toutes nouvelles œuvres en néons. Il est l'un des premiers artistes de sa génération à considérer la source lumineuse elle-même - et non son reflet - comme matériau plastique. Comme jadis Marcel Duchamp, avec une pointe d'ironie et de scepticisme, Morellet se pose finalement la question : « Qu'est-ce que l'Art? ».

Sa réflexion s'oriente ensuite vers une intégration toujours plus forte de l'espace et du support alentours. Il s'agit de créer des surfaces et des sculptures sans limites, de libérer l'œuvre du cadre et du contexte qui la caractérisent, à l'instar du ail-over américain des années 50. Dans les années 80, il se consacre désormais à,ce qui se passe au-delà de ses œuvres. Elles sont autant de moyens pour se référer à un espace et un contexte précis. L'artiste vise le phénomène de la muséographie et les modes de présentation, préfigurant l'évolution artistique des années 90. Il tente de porter l'attention du spectateur sur des choses qui lui échappent.

L'humour et l'amour du jeu de mots guident ses recherches selon un précepte malicieux : en faire « le moins possible». La géometrie est le moyen de ce «moindre effort», et l'introduction du hasard - le «tout est possible» post-moderne - propose à l'artiste toutes les directions. Après avoir déjà, en 1958, utilisé le nombre π pour une série de toiles, il réitère l'usage de ce chiffre infini pour cette fois construire une œuvre de néons bleus.

Suites et limites de suites

Claude HAUCHART - Louvain



L'étude des suites

Nous avons étudié la genèse des concepts de suite et de limite et les progrès correspondants de la pensée raisonnante chez des élèves du secondaire (et parfois d'école normale). Cette étude a été faite à partir d'un matériau bien déterminé : un lot de vingt-cinq problèmes posés dans des contextes divers (numérique, géométrique, cinématique...).

Par cette étude, nous avons cherché à mettre en évidence les raisons épistémologiques de la théorisation, et par là même, le sens de la théorie. Nous essayons d'illustrer un point de vue fréquemment défendu par Polya selon lequel l'acquis théorique directement visé (les suites et les limites) se double d'un acquis "méthodologique" qui le dépasse en importance : il s'agit d'un apprentissage de pratiques heuristiques, de modes de raisonnement et plus généralement de ce qui fonde la capacité de travailler mathématiquement.,

Polya :

"Il faut se mettre à l'eau pour apprendre à nager ; pour savoir résoudre des problèmes, il faut en résoudre.
Si vous désirez tirer Le meilleur parti de votre effort, cherchez dans chaque problème des traits caractéristiques qui puissent vous être utiles dans les problèmes futurs. Une solution que vous avez atteinte (par votre effort personnel ou que vous avez lue ou entendue, et que vous avez suivie avec un intérêt réel et soutenu) peut devenir pour vous un modèle, modèle que vous pourrez imiter avec avantage dans la résolution de problèmes analogues [...]. Je m'efforce, par tous les moyens disponibles, d'entraîner le lecteur à faire des problèmes et à réfléchir aux procédures et aux méthodes qu'il utilise. [...]. On devrait inculquer à l'étudiant en même temps qu'une somme d'information, un certain degré de savoir-faire. C'est pourquoi, le premier et principal devoir de l'enseignement des mathématiques dans les Lycées est de souligner la méthodologie dans la résolution de problème.
C'est ma conviction."

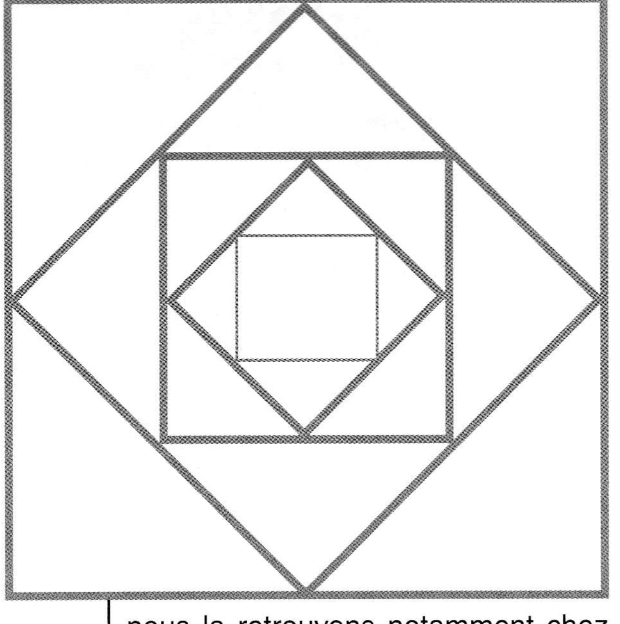
Georges Polya, (1967)

Enfin, sur un autre plan, nous testons l'idée de ne pas attendre qu'ils aient seize ans pour proposer aux élèves une première approche des processus infinis et des limites, mais de leur proposer bien plus tôt des problèmes mettant ces notions en jeu, et traitables sans grande formalisation. De cette manière, les élèves n'auraient pas à affronter en même temps et les

Le texte ci-contre est extrait d'une étude sur un enseignement des débuts de l'analyse (voir bibliographie).

premières difficultés liées à l'idée d'infini et de limite et les difficultés liées à la formalisation de ces notions. Quant à l'éternel problème du temps nécessaire pour parcourir le programme, il faut remarquer que les problèmes traités mettent en jeu non seulement les notions de suite et de limite mais aussi des matières très diverses par le biais par exemple de calculs d'aires, de calculs sur les fractions, de constructions géométriques, de transformations du plan, de la trigonométrie, ...

Cette idée de ne pas commencer de suite, par la formalisation,



nous la retrouvons notamment chez Kline et chez Freudenthal.

Kline :

"Avant qu'on puisse apprécier la formalisation précise d'un concept ou d'un théorème, on doit savoir quelle idée y est formulée et quelles exceptions ou quels pièges sa formulation doit essayer d'éviter. [...]. On doit donc être capable de s'appuyer sur une grande richesse d'expériences acquises avant de s'attaquer à la formulation rigoureuse. [...]. Comment La découverte peut-elle se produire quand on demande aux étudiants de travailler avec des idées déjà surchargées de sophistication et de raffinement ?"

M. KLine,(1977)

Freudhental :

"Est-ce parce qu'on y arrive seulement à seize ans, âge où l'on est supposé avoir déjà une certaine maturité mathématique, que l'analyse est abordée sur un mode formalisé dans la plupart des cas ? [...]. La reconstruction mentale d'aucune partie des mathématiques ne peut se passer d'une approche intuitive."

H. Freudenthal, (1973)

Les suites traitées

Voici quelques-uns des problèmes que nous avons proposés aux élèves.

Un zoom de carrés

Dans un grand carré, on construit un autre carré en joignant les milieux des côtés, ce qui fait apparaître quatre triangles rectangles.

On enlève ces quatre triangles du premier carré. On recommence la même opération sur le deuxième carré,ce qui en fait apparaître un troisième. On fait de même sur le troisième carré et ainsi de suite. Que se passe-t-il ?

Il s'agit ici plutôt d'un thème de réflexion (puisé dans E. Castelnuovo (1980) que d'un problème.

Séries géométriques de raison 1 / k

En travaillant sur les deux premières fiches, nous avons vu que :

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... + 1/2^n + ...$
$= 1$

et

$1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + ... + 1/3^n + ...$
$= 1/2.$

• Que pouvez-vous dire de la série $1/4 + 1/16 + 1/64 + ... + 1/4^n + ...$?

• Et après avoir trouvé la limite de la série :

$1/k + 1/k^2 + 1/k^3 + ... + 1/k^n + ...$
pour k = 2, 3 et 4, explorez d'autres valeurs de k en vous répartissant le travail. Comparez les résultats.
Arrivez-vous à une conclusion ?

La série harmonique

Après avoir étudié la famille de série 1/k + 1/k2 + l/k3 + ...,
nous abordons maintenant une nouvelle série connue sous le nom de série harmonique.

Considérez la suite :

1/2
1/2 + 1/3
1/2 + 1/3 + 1/4
1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5
1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6
. . . .

Si on continue à additionner ainsi, la somme
1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + ...
dépassera-t-elle 1 ? Et 2 ? Et 10 ?
Que vaut cette somme ?

Prolongement

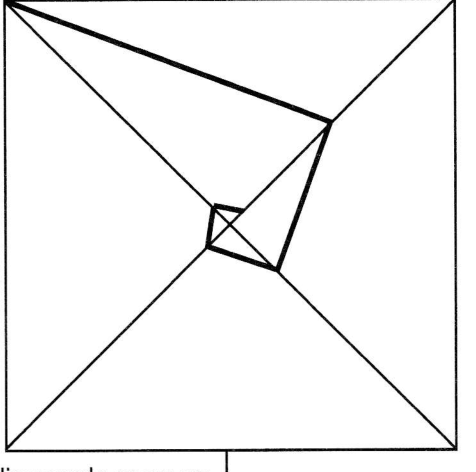
Vous avez démontré que la série harmonique tend vers l'infini et observé qu'elle croit très lentement. Pouvez-vous estimer un nombre de termes qui vous assure que la somme dépasse 10 ? Et que la somme dépasse 15 ? Et de manière générale, un nombre de termes qui vous assure qu'elle dépasse un nombre A donné ?

Un certain nombre de problèmes rapprochent deux situations à première vue analogues afin de faire émerger des contradictions. Ainsi, même quand les élèves ont déjà rencontré des séries convergentes, à d'autres moments ils restent persuadés que "si on ajoute toujours quelque chose de positif, ça tend nécessairement vers l'infini", c'est- à-dire que toute série à termes positifs tend vers plus l'infini. De la même manière, l'intuition que toute suite positive décroissante tend nécessairement vers zéro reste prégnante, même après que les élèves aient rencontré des contre-exemples.

Deux spirales dans un carré

Jusqu'ici, dans chacun de nos problèmes, nous avons étudié une suite à la fois. Nous allons maintenant en étudier deux et les comparer

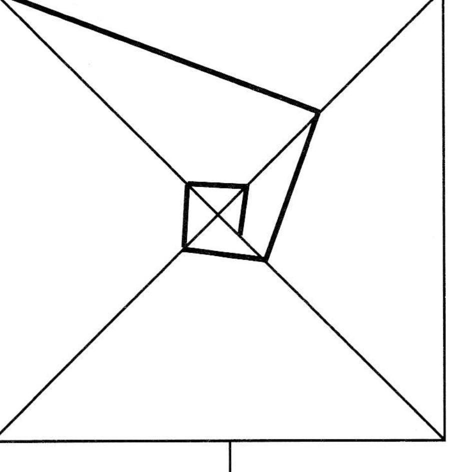
Fig. a.



Dans un carré dont la diagonale mesure 2, on dessine une spirale comme indiqué sur la Fig. a. Les distances de ses sommets successifs au centre du carré sont 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...

On dessine de même une deuxième spirale (voir Fig. b) mais cette fois les distances de ses sommets successifs au centre sont 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...

Fig. b.



1. Peut-on continuer ces deux spirales ?

2. Quelle est la longueur de chacune ?

3. Comparez ces deux problèmes et leurs résultats.

Des polygones emboîtés

Voici à nouveaux deux processus infinis qui vous feront sans doute penser à notre tout premier problème, celui du zoom de carrés.

a. Premier problème

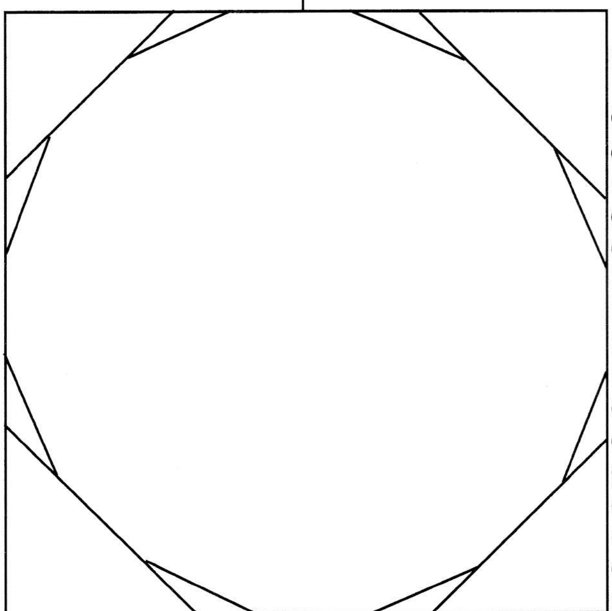


Fig. a.

On part d'un carré, à l'intérieur duquel on construit un octogone régulier, comme indiqué sur le Fig. a. À l'intérieur de cet octogone, on construit un 16-gone régulier, et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de côtés.

Que deviennent, si on continue, les aires des polygones ainsi construits ?

b. Deuxième problème

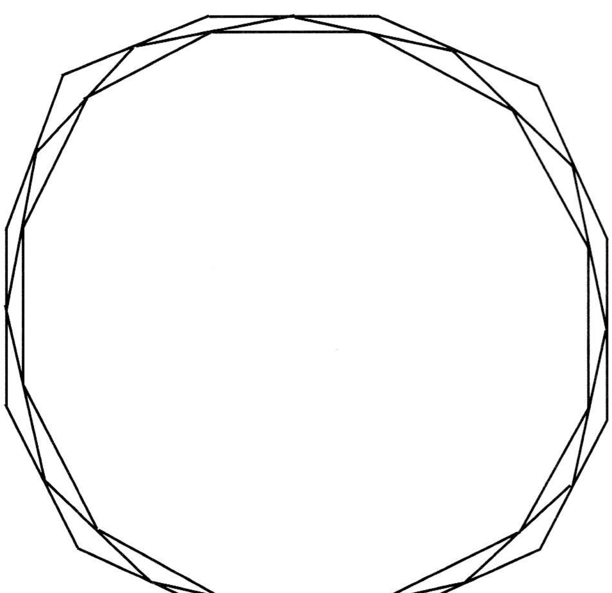


Fig. b.

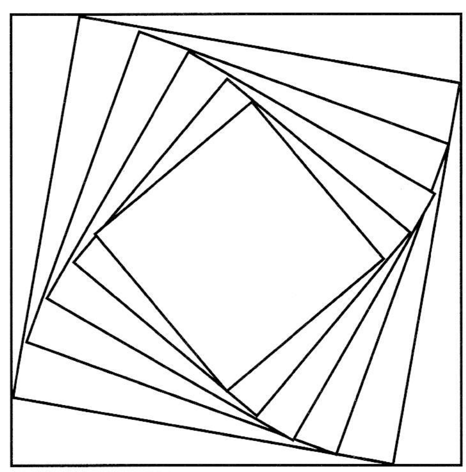
Dans un dodécagone régulier, on en dessine un deuxième en joignant les milieux des côtés du premier, puis un troisième en joignant les milieux des côtés du deuxième et ainsi de suite.

Si on continue, que deviennent les aires des dodécagones ?

c. Comparez ces deux problèmes et leurs résultats.

Des carrés tournants

On part d'un grand carré. On en trace un autre à l'intérieur en plaçant ses sommets comme indiqué sur la figure : chaque sommet est sur un côté du premier carré et à une distance égale à 1 cm d'un sommet de ce dernier. On place de la même façon un troisième carré dans le deuxième, puis un quatrième dans le troisième et ainsi de suite.



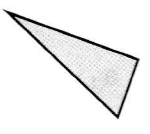
a. Jusqu'où va cette construction ?

b. Comparez ce problème des carrés tournants au problème du zoom de carrés et aux deux problèmes des polygones emboîtés.

Homothéties, spirales et coquillages

Les problèmes ci-après montrent que les suites et séries géométriques ont un lien naturel, en géométrie avec les homothéties et les similitudes, et dans la nature avec de nombreuses formes spirales telles que celles des coquillages.

1• Voici une figure constituée d'un triangle et d'un point 0.

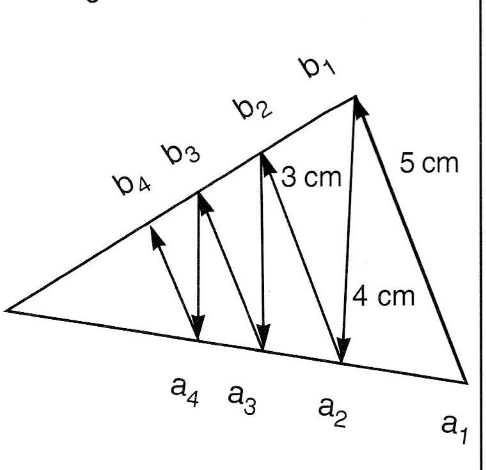


O •

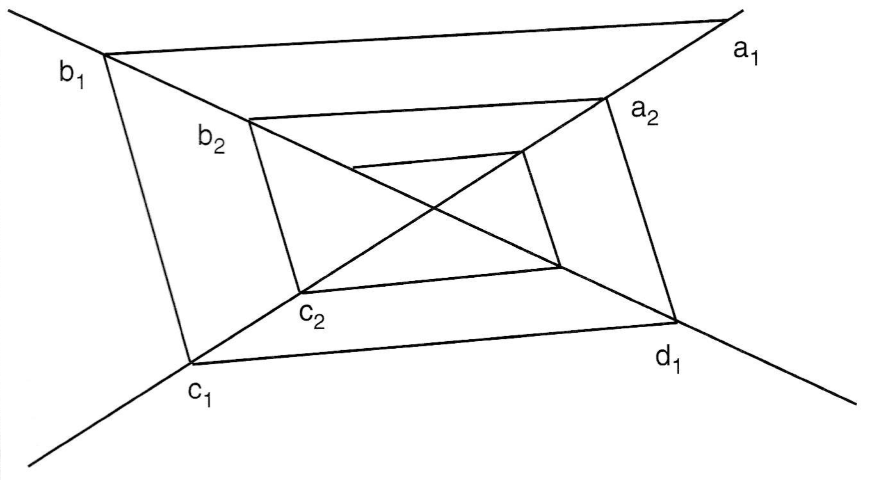
Construisez l'image du triangle par l'homothétie de centre O et de rapport 2/3. Ajoutez juste ce qu'il faut à la figure ainsi obtenue pour qu'elle devienne invariante par l'homothétie.

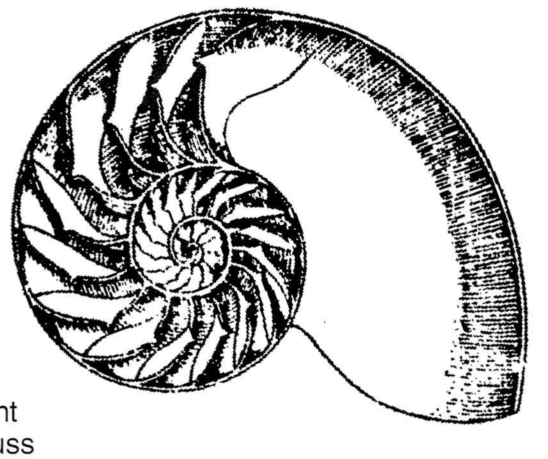
Le dessin tel que vous l'avez complété cache (S'il est correct!) beaucoup de suites géométriques. Trouvez-les.

2• Voici un zigzag $a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ a_3$...... Est-il de longueur infinie ?

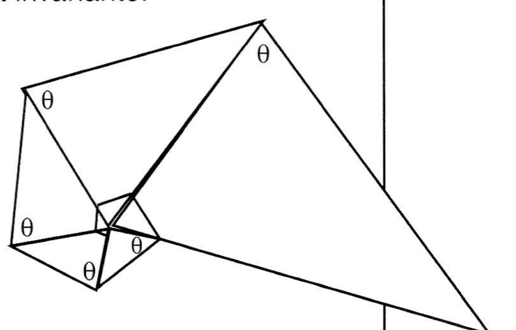


•. Même question pour la spirale $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ a_2\ b_2\ c_2\ d_2$......





3• On considère 5 demi-droites issues d'un point et dessinant 5 angles égaux autour de ce point comme sommet commun. On trace une spirale comme indiqué sur la figure, tous les angles θ étant égaux. Si on suppose cette spirale prolongée indéfiniment vers l'intérieur, mais auss vers l'extérieur, quelles sont les transformations affines du plan qui la laissent invariante.



• Quelles sont les transformations affines du plan qui laissent invariante la figure ci-dessus qui est le dessin en coupe d'un coquillage appelé *nautilus pompilius* ?

4• Considérons à nouveau la spirale de la question 3, mais en la supposant cette fois prolongée (indéfiniment) uniquement vers l'intérieur. Comment peut-on, en rajoutant quelque chose à cette figure, la transformer en une figure semblable, mais plus grande ?

• Même question pour le coquillage.

5• Nous avons étudié jusqu'ici des suites et des séries géométriques réelles (c'est-à-dire dont les termes sont des nombres réels). Rien n'empêche pourtant d'étendre cette théorie aux nombres complexes. Pourriez-vous par exemple étudier la suite géométrique :
1, a, a^2, a^3, ... où a = 4 i / 5 ?

Et la série géométrique correspondante ?

Une balle rebondit

On laisse tomber une balle de ping-pong d'une certaine hauteur sur une table horizontale. Elle rebondit, et ses bonds deviennent de plus en plus petits. Puis elle s'arrête. Combien de fois a-t-elle rebondi?

Est-ce qu'elle s'arrête vraiment? Puisque ses bonds deviennent de plus en plus petits, est-ce qu'elle n'est pas, quand on la croit arrêtée, en train de faire encore des bonds petits, petits ?

Suites arithmétiques, suites géométriques

Le problème posé ici est celui de la comparaison des comportements de deux suites.

1• Comparez en détail les deux suites qui suivent (points de départ, vitesses de croissance, l'une est-elle toujours inférieure à l'autre ?, etc.) :

$a_1 = 1.000.000$ $b_1 = 3$

$a_2 = 1.000.000,3$ $b_2 = 3,4$

$a_3 = 1.000.000,6$ $b_3 = 3,8$

$a_4 = 1.000.000,9$ $b_4 = 4,2$

2• Même question pour les deux suites ci-dessous :

$a_1 = 1.000$ $b_1 = 1,01$

$a_2 = 2.000$ $b_2 = (1,01)^2$

$a_3 = 3.000$ $b_3 = (1,01)^3$

$a_4 = 4.000$ $b_4 = (1,01)^4$

....

N'importe quelle suite géométrique positive croissante finit-elle par dépasser n'importe quelle suite arithmétique ?

Critiquer la proposition suivante: de deux suites géométriques positives croissantes, celle qui a la plus grande raison finit toujours par dépasser l'autre, ceci quels que soient leurs premiers termes. Si elle est fausse, donnez-en des contre-exemples, si elle est vraie prouvez-la.

Vous avez établi que a^n tend vers zéro lorsque o < a < 1. A partir d'un certain indice, les termes a n de la suite peuvent donc être considérés comme de "bonnes approximations" de la limite o.

Pour la suite $(3/4)^n$, combien de pas faut-il pour que ces approximations passent de la précision 1/100 à la précision 1/1.000 ?
Et de $1/10^6$ à $1/10^7$?
Et de $1/10^7$ à $1/10^8$?

Mêmes questions pour la suite $(0,99)^n$.

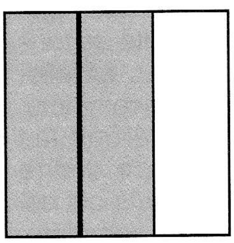
Après avoir décrit le sujet de notre étude et fournit un échantillon des problèmes posés aux élèves, nous consacrons la suite de l'exposé à l'analyse de quelques points épistémologiques particuliers.

Seuil épistémologique

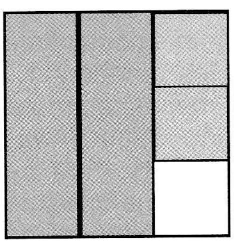
Abordons-le par le biais d'un exemple. Cet exemple montre deux manières radicalement différentes de traiter la série :

$$\sum_{n=1 \text{ à } +\infty} 2/3^n = 2/3 + 2/9 + 2/27 + \dots$$

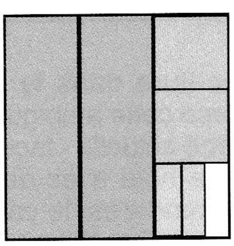
Une première démarche consiste à construire la série dans un carré :



2/3



2/3 + 2/9



2/3 - 2/9 + 2/27.

Ceci fournit à vue le résultat

$$2/3 + 2/9 + 2/27 + \dots = 1$$

que les élèves débutants énoncent par quelque chose comme :
"2/3 + 2/9 + 2/27 + etc. sera finalement égal à 1".

Une deuxième démarche est celle qui consiste d'abord à définir le concept de suite réelle comme fonction de IN * (ou dé IN), dans IR, pour celui de série associée à une suite, puis celui de limite d'une suite et d'une série, pour ensuite étudier les propriétés algébriques (limite d'une somme, ...) des limites.

Pour notre exemple, on a donc une application

(u_n) : IN* -> IR $\quad$ n -> $2/3^n$

une application

(s_n) : IN* -> IR $\quad$ n -> $\sum_{i=1 \text{ à } n} 2/3^i$

par ailleurs on a les résultats suivants

$$\sum_{i=1 \text{ à } n} 2/3^i = 2/3 \bullet \frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3}$$

$$\lim_{n \to \infty} 1/3^n = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 2/3 \bullet \frac{1}{1 - 1/3} = 1$$

Ainsi donc, 2/3 + 2/9 + 2/27 + ... = 1.

Pour une élève qui aborde l'analyse, il y une distance énorme entre des deux voies d'approche. C'est cette distance que nous appellerons seuil épistémologique. Plus généralement, nous désignerons ainsi l'écart impressionnant, le seuil, entre une notion relevant de la pratique quotidienne et bien adaptée à cette pratique, et le concept mathématique correspondant, lui-même bien adapté à la pratique du mathématicien. Il est clair que ce n'est pas pour traiter un cas comme celui de la série $\Sigma\ 2/3^n$ que les concepts formalisés de suite, de série et de limite ont été créés.

Envisageons maintenant ce qui se passe pour un élève débutant qui au moment où il rencontre des concepts formalisés pour la première fois, n'a en tête que des exemples semblables à celui de la série $\Sigma\ 2/3^n$.

Premièrement, il va vraisemblablement se demander ce qu'on lui veut et de ne pas comprendre les raisons, ni le sens profond de ces définitions. Et deuxièmement, on aura dénaturé complètement l'idée première qu'il peut se faire d'une série (idée première qui, pensons-nous, si elle est censurée avant même de pouvoir s'exprimer, a toutes les chances de resurgir insidieusement à un moment ou l'autre).

Évolution de la notion de série

Puisque nous parlons de dénaturation de l'idée première de série, voyons ce que nous avons observé chez les élèves, à savoir : Qu'est-ce qu'une série pour eux, quand ils en ont rencontré d'abord dans des problèmes, sans définitions préalables ?

Essentiellement, une série est perçue comme une somme.

Et en tant que somme, elle possède une valeur, celle qu'on obtiendrait si on continuait à additionner indéfiniment. **Une série est donc un nombre.** Et bien loin,de leurs pensées est l'idée qu'il puisse exister des séries divergentes. Dans la mesure où ils y voient un nombre, les élèves penchent du côté de **la facette infinie** actuelle de la série, envisageant des sommes d'un nombre infini de termes et même souvent possédant un infinième terme, comme semblables aux sommes finies, les seules qu'ils connaissent.

Bien entendu les élèves savent bien qu'ils n'épuiseront jamais tous les termes de cette "somme", qu'il s'agit d'une somme en perpétuel devenir. C'est ici la **"facette infini potentiel"** de la série qui apparaît.

Les élèves oscillent ainsi sans forcément s'en rendre compte de la facette actuelle de la série à sa facette potentielle. Au passage, signalons les effets de notation et de terminologie s'il est vrai que l'on écrit parfois :

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/2^n + ... = 1$

On n'écrit jamais $1/2^n = 0$

ni

$1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ ...,\ 1/2^n\ ... = 0.$

> Voici comment Hilbert (1926) définit les infinis potentiels et actuels "En analyse, nous traitons l'infiniment petit et l'infiniment grand seulement comme une notion limite - comme quelque chose qui devient, qui naît, qui est en train d'être produit - c'est-à-dire que nous traitons, comme on dit, l'infini potentiel. Mais ce n'est pas l'infini réel lui-même. Celui-ci nous l'avons quand, par exemple, nous considérons la totalité de tous les nombres 1, 2, 3, 4, ... en elle-même comme une entité complète, ou quand nous considérons les points d'un segment de droite comme une totalité d'objets qui est actuellement donnée et complète. Cette sorte d'infini est appelé l'infini actuel."

L'écriture dans le cas de la série renforce cette ambiguïté ontologique (facette actuelle - facette potentielle) : on la note avec des + et un signe =, comme c'est le cas pour les sommes finies. Par ailleurs les points de suspension rappellent la facette potentielle. Notons aussi l'effet de la terminologie : on appelle somme de la série la limite de cette dernière, renvoyant une fois encore l'idée de série à celle de somme.

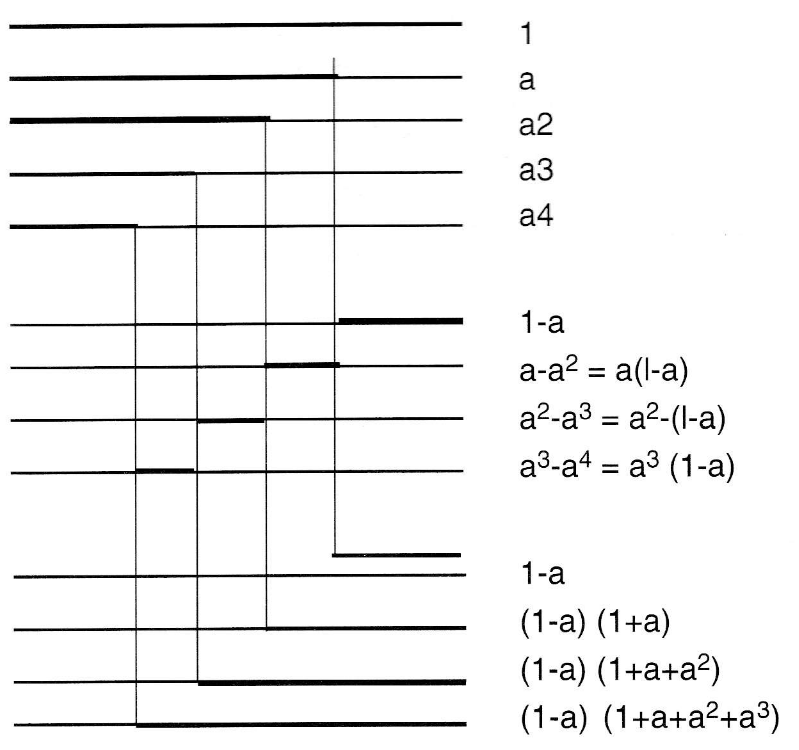
Malgré cette ambiguïté, beaucoup de séries sont traitables. Par exemple, on obtient la valeur limite par un bon emboîtement, un puzzle infini dont nous venons d'avoir un exemple

immédiat, mais dont il existe aussi des exemples moins immédiats.
Ainsi, $1 + a + a^2 + ... = 1 / (1 - a)$ car, comme le suggère le dessin ci-dessous,

$(l - a) + (a - a^2) + (a^2 - a^3) + ... = 1$

ce qui s'écrit aussi :
$(l - a) (l + a + a^2 + . . .) = 1.$

encore de la série comme étant une suite de sommes partielles mais bien de la série comme étant approximée par une suite de sommes partielles. Nous allons voir dans quelles circonstances cette idée primitive de la notion de série s'avérera insuffisante, provoquant dès lors la définition de série que nous connaissons.



Ainsi donc, un bon nombre de séries sont traitables malgré leur ambiguité ontologique. Et s'il est vrai que dans c traitement par les élèves on voit facilement poindre l'écriture générale de la n ième somme partielle, il s'agit bien là d'un outil permettant de voir plus clairement la valeur de la série et non pas de quelque chose qui remettrait en question l'idée de série comme somme d'un nombre infini de termes.

Il ne s'agit absolument pas

Mais par rapport à la perception première, c'est un saut qui dénature ontologiquement leur objet de pensée, en remplaçant ce qui est perçu comme une somme par tout autre chose : une suite de sommes de plus en plus longues.

Venons-en maintenant aux circonstances qui dans notre lot de problèmes ont provoqué cette mise au point de la notion de série. Voici les questions que nous avions posées aux élèves.

Nouveau regard sur les nombres

Les questions suivantes vous feront découvrir une parenté cachée entre les séries et les nombres.

1. Combien le développement décimal exact de 13/25 comporte-t-il de décimales ?

2. Même question pour 13/21.

3. La suite qui suit a-t-elle une limite ?

0,3 - 0,39 - 0,393 - 0,3939 - 0,39393

Si oui, cette limite peut-elle être écrite sous forme de fraction ?

4. Même question pour la suite

0,465 - 0,465465 - 0,465465465

5. Même question pour la suite

0,5 - 0,59 - 0,599 - 0,5999

La première question leur rappelle que certaines fractions s'écrivent sous la forme d'un décimal limité. La seconde leur rappelle que pour d'autres fractions, l'algorithme de la division entre en oscillation, engendrant ainsi un décimal illimité périodique.

Ainsi écrits, de tels nombres (les illimités périodiques) sont encombrants, mais l'habitude est prise dans la pratique de les limiter à quelques décimales utiles, comme le font les calculatrices.

Ils sont ainsi banalisés, ramenés aux dimensions des décimaux limités comme de simples résultats de mesures, et affectés comme ces derniers d'erreurs réputées négligeables. Les questions suivantes vont en refaire des objets insolites.

Les élèves s'aperçoivent d'emblée que la suite de la question 3 amorce le décimal illimité périodique 0,393939.

Certains ont tendance à donner celui-ci comme limite mais ils hésitent:
- d'une part 0,393939 ... est un nombre; il n'y a rien d'étonnant à ce qu'il soit une limite;

- d'un autre point de vue, étant donné les points de suspension 0,393939 ... semble bien lui aussi tendre vers quelque chose sans y arriver jamais.

Cet objet étrange 0,393939 est-il une limite ou une suite ?
Et s'il est une suite, laquelle ?

0,3 0,39 0,393 0,3939 ...

ou bien,

0,39 0,3939 0,393939 ...

ou encore une autre ?

Les élèves sont comme piégés par l'ambiguïté du décimal illimité périodique : ils vont et viennent entre ses deux facettes (la suite et la limite de la suite).

Parfois aidés par nous, des élèves se souviennent d'avoir étudié auparavant les séries Σ $1/k^n$ et réécrivent 0,393939 ... sous la forme

$$39/10^2 + 39/10^4 + 39/10^6 + ...$$

ce qui ne résout pas le problème : ils ne savent toujours pas si 0,393939 ... est une suite ou une limite et si oui, laquelle ?

C'est ce moment que nous avons choisi pour lever la confusion et pour ce faire : faire apparaître explicitement la suite des sommes partielles afin de la distinguer de sa limite. Ainsi apparaissent clairement les liens et les distinctions entre les trois notions *de suite, de séries et de limite*. Une série est définie comme une suite de sommes partielles, cette fois de manière significative.

Nouveau concept de nombres

Cette mise au point a d'autres effets que la construction des trois concepts de suite, série et limite.

• Bien sûr, l'idée de nombre (ici de rationnel) s'approfondit. On croirait à observer certains élèves, même parmi les plus âgés, qu'ils découvrent soudain un lien qu'ils n'avaient pas soupçonné entre les fractions qui leur sont pourtant familières et les décimaux illimités périodiques, toujours intrigants bien que familiers eux aussi.

• Par ailleurs la vision séparée que les élèves avaient de deux domaines des mathématiques s'ébranle soudain : voilà que les nombres et les séries entretiennent entre eux une relation étroite. Pour beaucoup d'élèves c'est un renversement : les nombres étaient conçus comme le matériau premier et pur à partir duquel on construit des séries; on ne se posait pas de problèmes à leur propos. Or voici que ces objets primitifs s'avèrent eux aussi être des objets mathématiquement construits et donc fort abstraits. Cette expérience mentale des élèves, la découverte inattendue de liens unissant les nombres aux séries nous a ramenés à deux citations. La première, de Bourbaki, montre que cette expérience que nous avons observée chez des élèves ressemble étonnamment à celle du chercheur en mathématiques.

"... chaque structure mentale apporte avec elle son Langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières L ... 1; et pour Le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau Le paysage mathématique où il se meut." (Bourbaki - 1948)

La seconde, de Bertold Brecht, montre l'effet d'une irruption de l'insolite dans le banal, ce qu'il appelle distanciation et qui provoque un regard nouveau sur les choses et peut amener une nouvelle compréhension.

"C'est ce que font, et depuis longtemps, les hommes de science quand ils observent et amènent à observer tels phénomènes (tes oscillations des pendules, les mouvements des atomes, ...). Pour comprendre une chose, ils font comme s'ils ne La comprenaient pas; pour découvrir une loi, ils mettent les processus en contradiction avec l'idée traditionnelle qu'on se fait d'eux; de la sorte, ils font ressortir le caractère inouï et particulier du phénomène étudié.

Ainsi certaines évidences ne se comprennent plus d'elles-mêmes, ce qui, à dire vrai, a pour objet de les faire véritablement comprendre [...].

Ce qui va de soi, c'est-à-dire la forme particulière qu'a prise dans notre conscience L'expérience quotidienne, s'abolit Lorsque son évidence est niée par L'effet de distanciation et transformée ensuite en une nouvelle compréhension. [...].

Car ce qui est depuis longtemps inchangé paraît inchangeable [...]. Pour que toutes ces choses données apparaissent comme douteuses, il faudrait pouvoir porter sur elles ce regard étranger avec lequel Galilée observa un lustre qui oscillait.
Lui, ces oscillations l'étonnèrent, comme s'il ne pouvait les expliquer, et c'est ainsi qu'il découvrit que le mouvement pendulaire obéissait à des lois. C'est ce regard, aussi difficile que productif, que le théâtre doit susciter par ses reproductions de la vie en commun des hommes. Il doit contraindre son public à l'étonnement, et y parvient à l'aide d'un mode de jeu qui distancie le familier."

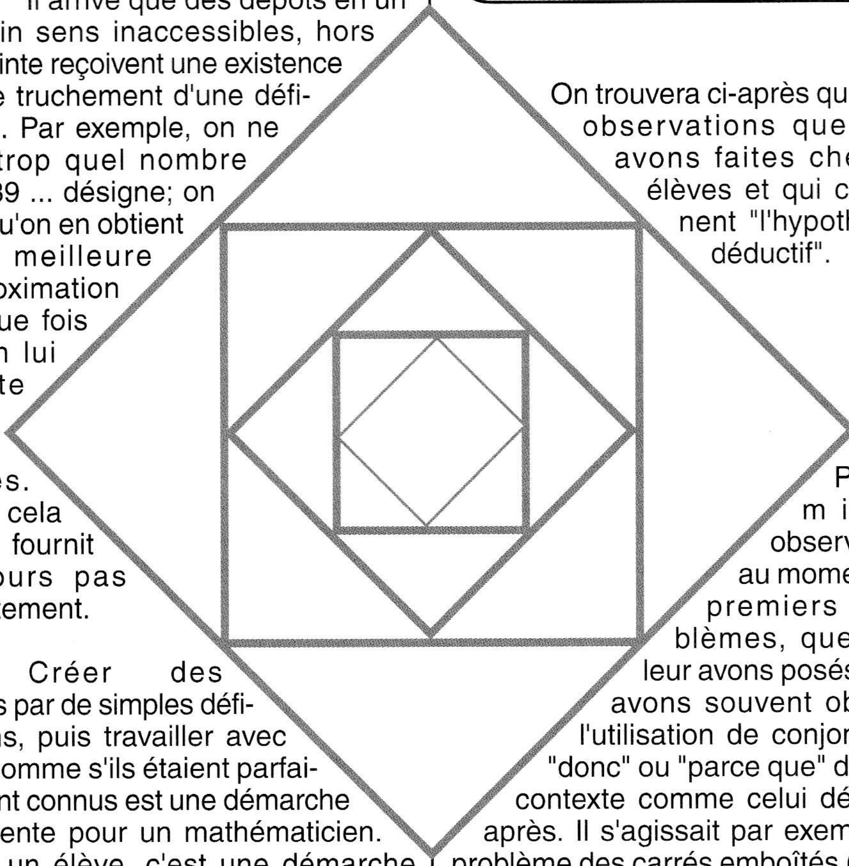
Extraits de B. Brecht

"Les oscillations d'un lustre étonnèrent Galilée, comme s'il ne pouvait les expliquer. Et c'est ainsi qu'il découvrit que le mouvement pendulaire obéissait à des lois. C'est ce regard, aussi difficile que productif, que le théâtre doit susciter par ses reproductions de la vie en commun des hommes. Il doit contraindre son public à l'étonnement, et y parvient à l'aide d'un mode de jeu qui distancie le familier."

Extraits de B. Brecht (Le petit Organon, Écrits sur le théâtre, l'Achat du cuivre), cité par H. Bascis, (1984) Après ces citations, revenons à ce qui nous occupait, à savoir les conséquences de la mise au point de la notion de série. Nous avons déjà cité deux points : le lien retrouvé entre les fractions et les décimaux illimités périodiques, le lien entre les nombres et les séries.

• Il y a davantage : un pas vers la définition abstraite des nombres,

Il arrive que des dépôts en un certain sens inaccessibles, hors d'atteinte reçoivent une existence par le truchement d'une définition. Par exemple, on ne sait trop quel nombre 0,3939 ... désigne; on sait qu'on en obtient une meilleure approximation chaque fois qu'on lui ajoute des décimales. Mais cela ne le fournit toujours pas exactement.



Créer des objets par de simples définitions, puis travailler avec eux comme s'ils étaient parfaitement connus est une démarche fréquente pour un mathématicien. Pour un élève, c'est une démarche abstraite et difficile: à ses yeux, on ne règle pas par une définition le problème de savoir ce qu'est un nombre perçu comme inaccessible, ni ce à quoi il ressemble. Agir de la sorte lui donne le sentiment de "travailler en l'air", de devoir trop "assumer". Nous reparlerons de ces difficultés et de ce sentiment à propos de 1'"hypothético-déductif".

Enfin, la manière dont le concept de série s'est mis au point illustre que ce n'est pas la notion de série, ni celle délimite, ni encore celle de nombre qui évolue chacune dans son coin, mais que toutes ces notions bougent les unes avec les autres et s'adaptent les unes aux autres. (À propos de cette interdépendance, lire I. Lahakos (1976).

L'hypothético-déductif

On trouvera ci-après quelques observations que nous avons faites chez les élèves et qui concernent "l'hypothético-déductif".

Première observation : au moment des premiers problèmes, que nous leur avons posés, nous avons souvent observé l'utilisation de conjonctions "donc" ou "parce que" dans un contexte comme celui décrit ci-après. Il s'agissait par exemple du problème des carrés emboîtés (Fig. 1) pour lequel les élèves énoncent "les carrés tendent vers le centre parce que les aires sont égales à 1/2, 1/4, 1/8, ...".

Et il nous est apparu que ce qui se passait était plutôt ceci premièrement, ils ont, a priori, le sentiment d'une limite nulle; deuxièmement, ayant ce sentiment en tête, et ne pensant qu'au problème particulier qui les occupe, ils essayent d'argumenter. Ceci les amène à évoquer des propriétés de la figure qui vont dans le sens de ce qu'ils veulent établir (ici la limite nulle).

Ainsi, à notre meilleur jugement, ils perçoivent deux faits comme corrects, et l'un renforce l'autre. Ils obtiennent ainsi une sorte de confirmation que l'un et l'autre sont corrects, et non vraiment une déduction de l'un à l'autre.

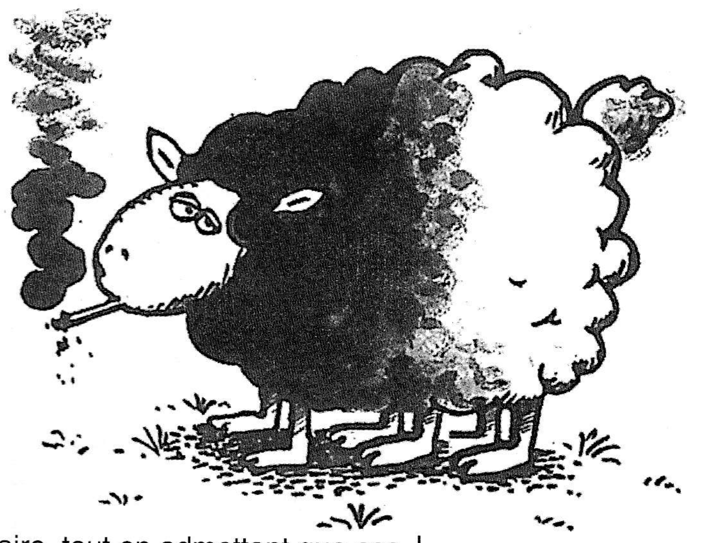
Après cette première observation, voyons ce que nous entendons par *hypothético-déductif.* L'hypothético-déductif consiste à envisager des hypothèses et à considérer des enchaînements comme "Si ceci se passe, alors cela se passe" c'est-à-dire des propositions du type "p implique q" indépendamment des valeurs de vérité de p et de q. Cet hypothético-déductif, Piaget (1978), l'appelle aussi "déduction formelle".

p ==> q
si p alors q

Et il en dit ceci : "elle consiste à tirer les conséquences, non pas d'un fait d'observation directe, ou d'un jugement auquel on adhère sans réserve (et que l'on incorpore ainsi à la réalité telle qu'on la conçoit), mais d'un jugement que l'on assume simplement, c'est-à-dire que L'on admet sans y croire, pour voir ce qu'il comporte. Il faut, dit Piaget, pour raisonner formellement, "que l'on parvienne à rester sur le plan de la pure assomption sans revenir subrepticement au plan de la croyance propre ou de la réalité immédiate. La déduction,pour être formelle, doit donc se détacher du réel et se placer sur le plan du pur possible, qui est par définition, le terrain de l'hypothèse."

Si un mouton a six pattes

Pour illustrer ce point de vue, Piaget donne encore l'exemple suivant. "Si on dit à un enfant : *Admettons que les moutons aient 6 pattes. Combien y aura-t-il de pattes dans une cour où il y a 15 moutons ?,* il arrive fréquemment que l'enfant se refuse à conclure parce qu'il ne peut "assumer" l'hypothèse. Nous-mêmes, au



contraire, tout en admettant que ces prémisses soient absurdes, nous saurons fort bien raisonner sur elles et conclure combien il y aura de pattes dans la cour. C'est que nous distinguons la nécessité réelle ou empirique (les moutons ne peuvent avoir six pattes) et la nécessité formelle ou logique (si les moutons avaient six pattes, ...)". Voilà donc ce que dit Piaget à propos de l'hypothético-déductif. Nous avons observé qu'il n'est pas nécessaire que les prémisses soient absurdes pour qu'il soit difficile de les assumer et qu'il est déjà difficile d'assumer des prémisses simplement arbitraires et de raisonner sur elles comme si on y croyait.

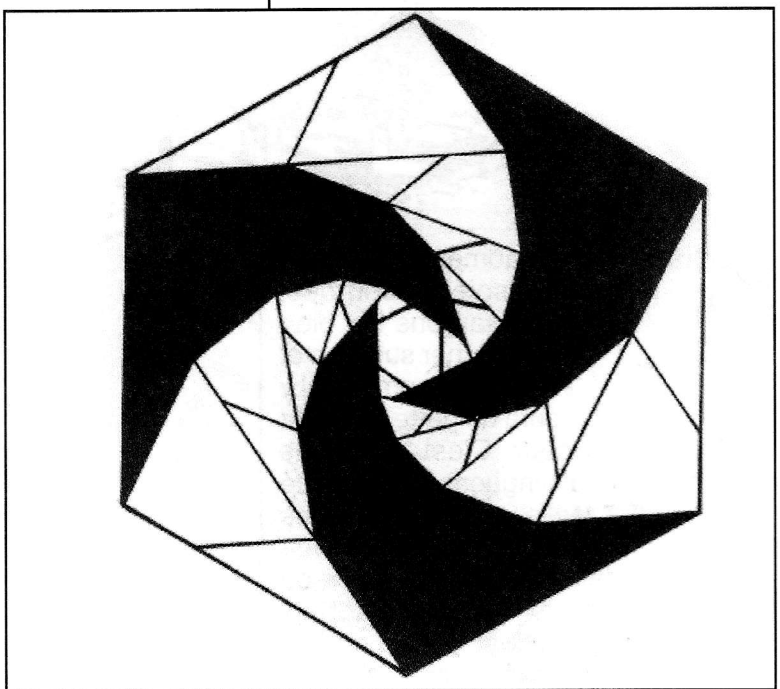
L'hypothético-déductif illustré

Nous avons déjà évoqué la difficulté d'«assumer» à propos de la définition des nombres (par exemple, rendre accessible par le truchement d'une définition un nombre qui est perçu comme inaccessible).

Nous allons maintenant retrouver une difficulté de ce type dans le cas d'une démonstration. Celle dont nous allons parler est issue de la situation suivante :

Des mille-gones

Parmi les problèmes que nous avons travaillés jusqu'à présent, souvenez-vous des carrés emboîtés et



des dodécagones emboîtés

Que se passerait-il si nous considérions maintenant des million-gones emboîtés de la même façon ? Et des milliard-gones ?

Une première remarque s'impose : d'un point de vue mathématique les trois suites (celles des carrés, des dodécagones et des million-gones) renvoient à la même situation (une suite géométrique positive décroissante). Par contre, d'un point de vue intuitif elles sont bien différentes. De manière générale si l'on demande à quelqu'un ce qui se passe dans un processus infini si à chaque étape on enlève au moins la moitié de ce qui reste, il vous répondra sans hésiter que la suite tend vers zéro.

Par contre, si à chaque étape on enlève moins de la moitié, la perception de la limite nulle est instable selon les individus et selon le contexte dans lequel la question est posée. Ainsi pour les dodécagones et pour les million-gones les élèves hésitent : d'une part ils ont encore en tète l'idée que toute suite positive décroissante tend vers zéro et d'autre part la lenteur de décroissance leur fait douter de la limite nulle. Si nécessaire, pour accentuer le doute et provoquer la nécessité d'une démonstration, le professeur a joué le jeu suivant : après avoir annoncé qu'il va dessiner un milliard-gone au tableau, il dessine un cercle; puis il annonce qu'il va dessiner un second milliard-gone et ... il repasse sur le cercle. Enfin, il se retourne vers la classe et demande: et alors ?

Je le crois, mais ...

Pour nous ce problème est immédiat. Il s'agit de montrer que

a_n - > 0 pour $0 < a < 1$.

(On prend $\varepsilon > 0$, quelconque, et on montre que $(1/a)^n > 1/\varepsilon$ à partir d'un certain n en utilisant le fait que 1/a est de la forme $1 + r$, avec $r > 0$ et que :

$$(l + r)^n > (1 + nr).$$

Pour les élèves, la démarche à suivre n'est pas si banale que ça.

Une première étape puisqu'ils étaient dans le doute a été de poser une conjecture :

ici $\lim a_n = 0$ pour $0 < a < 1$.

Entrer dans le jeu d'une conjecture à démontrer présente des difficultés pour qui n'en a pas l'habitude. En effet, supposons que A soit la conjecture à démontrer.

La démarche est du type suivant :

l- je crois bien que A est vraie;

2- je n'en suis pas tout à fait sûr;

3- donc, je vais essayer de démontrer;

4- je vais donc me concentrer sur "A est vraie", mon objectif; mais pour démontrer, je ne pourrai utiliser "A est vraie"; donc je dois d'une certaine manière faire abstraction de mon objectif.

À la fois le '*je crois bien" et le "je ne suis pas sûr" doivent être assez forts chez l'individu sans quoi il n'éprouve pas le besoin de démontrer. Tout comme il peut être difficile dans une déduction formelle d'assumer simplement l'hypothèse, il peut être difficile ici de considérer simplement de manière neutre la proposition que l'on veut démontrer (en gommant notamment les intuitions, les a priori qui l'ont d'abord constituée mentalement). La difficulté est de les gommer dans le raisonnement formel et en même temps de s'en inspirer pour deviner des pistes de démonstration.

Après la conjecture, considérons la démonstration proprement dite. Partant de la proposition que constitue la conjecture, elle a consisté a essayer de remplacer cette dernière par une autre plus maniable, plus accessible et qui l'entraîne; puis celle-ci par une autre, et ainsi à plusieurs reprises, de sorte que de la dernière on puisse revenir à la première et la prouver.

Dans notre exemple, on cherche à voir si les aires des milliongones tendent vers zéro, c'est-à-dire si la suite

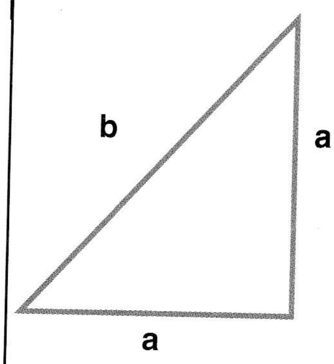
$$A.(\cos \pi/10^6)^n$$

tend vers zéro.
La démarche rebondit comme suit :

• Trouver une proposition plus facile à démontrer et dont on pourrait déduire la limite nulle de $A.(\cos \pi/10^6)^n$ (la calculatrice n'était pas d'un grand secours car elle affichait 1 pour $\cos(\pi/10^6)$).

• Si on arrive à montrer que $A.a^n$ tend vers zéro quand a est un nombre entre 0 et 1, alors c'est gagné. Cherchons donc à montrer que $A{\bullet}a^n$ tend vers zéro dans ces conditions (généraliser pour simplifier).

- Mais si on arrive à montrer que a^n tend vers zéro quand a est entre 0 et 1, on arrive alors à démontrer que $A.a^n$ tend vers zéro - •••
et ainsi de suite en passant encore par des propositions concernant les suites $(l - x)^n$, A/b^n, $1/b^n$, b^n ou encore $(1 + x)^n$ où x représente un nombre strictement positif et b un nombre strictement supérieur à 1.



$2a^2 = b^2$

Cette démarche de la recherche, spontanée mais difficile car on travaille à chaque étape sur du non sir (la conjecture) est analogue à t'analyse telle qu'on la trouve définie en tant que méthode chez Euclide. L'analyse qui correspond à la recherche de la démonstration fonctionne par régressions successives à partir de la thèse jusqu'au moment où l'on obtient un axiome ou une propriété connue. Elle S'oppose à ta synthèse qui parcourt le chemin inverse : partant de la propriété à laquelle l'analyse a finalement abouti, elle établit la thèse par déductions successives.

Des acquis méthodologiques

Ainsi donc, les élèves ont reconstruit les premiers éléments de la théorie des suites en partant de problèmes posés dans des contextes divers. Au terme de ce travail, leur acquis ne se borne pas à ces éléments théoriques. Leurs expériences de recherche ont développé chez eux une expérience de la recherche qui déborde les suites et les limites.

Si la théorie avait été enseignée d'abord, les occasions de progrès méthodologiques auraient été moins nombreuses. Car alors, il faut moins chercher un chemin, la voie est tracée. L'autoroute théorique peut cacher le paysager empêcher l'initiative, bloquer l'imagination.

Nous terminons cet exposé en relevant quelques points épistémologiques dont on ne saurait exagérer l'importance. Le prix à payer pour ces acquis méthodologiques est celui d'un effort difficile : il n'est pas aisé de se passer d'une théorie qui serve de guide et de secours. L'essentiel est que les élèves s'y essayent, qu'ils apprennent à discerner ce qui est clair de ce qui ne l'est pas, ce qui est résolu de ce qui ne l'est pas, qu'ils arrivent à ne pas craindre leurs erreurs et à ne pas s'en décourager, mais au contraire à prendre appui sur elles pour en tirer des résultats positifs.
Voici donc ce relevé bien sûr incomplet:

- Évaluer et comparer, selon les nécessités, divers supports de pensée : segments bout-à-bout, carré qu'on remplit progressivement, fractions amenées à la forme la plus suggestive, nombres décimaux traités par calculatrice, symboles littéraux.

- Clarifier certaines choses, les amener dans une zone d'évidence par,un changement approprié de point de vue ou d'outil :
a) transformer l'espace dans lequel on travaille (passage de x à 1/x);
b) se ramener d'une suite à une autre par une majoration ou une minoration;
c) embrayer la structure multiplicative sur une suite se présentant naturellement de manière additive.

- Reconnaître une structure sous un vêtement compliqué, hérissé de symboles qui brouillent la vue.
- Discerner le pouvoir éclairant d'un cas particulier au milieu d'une théorie générale.
- Recourir à bon escient au raisonnement par l'absurde, par récurrence.
- Ajuster un procédé de pensée connu à une situation nouvelle.

- Décentrer sa pensée pour résoudre un problème, viser à côté de la cible pour arriver dedans.

- Devenir attentif, à force d'en avoir découvert par hasard, à de surprenantes parentés de structure.

- Réaliser que la théorie se structure parfois, sinon souvent, autrement que l'intuition. La théorie est tout autre chose qu'une intuition habillée scientifiquement.

- Apprendre à parcourir mentalement son propre cheminement vers une solution, en y repérant les difficultés, les fausses pistes, les moyens de résolution.- Étendre l'objet de sa réflexion. "Est-ce toujours comme ça" est une bonne question conduisant à confronter des cas, généraliser, classer.

Bibliographie

• H. Bassis, Je cherche,donc j'apprends! Ed. Sociales, Paris 1984.
• N. Bourbaki, L'architecture des mathématiques, dans F. Le Lionnais (Ed.), Les grands courants de la pensée mathématique, Cahier du Sud, 1948.
• I. Lakatos, Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery, Cambridge Univ. Press, 1976.(trad. en fr.)
• E. Castelnuovo, La mathématique dans la réalité, Cedic, Paris, 1980.
• H. Freudenthal, Mathematics as an educaticnal task, D. Reidel, Dordrecht, 1973.
• C. Hauchart, Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite, dissertation doctorale, 1985.
• D. Hilbert, Über das Unendliche, Mathematische Annalen 95 (1926),.
• M. Kline, Calculus, an intuitive and physical approach, J. Wiley, New York, 1977.
• J. Piaget, Le jugement et le raisonnement chez l'enfant, Delachaux et Niestlé, Paris, 1978.
• G. Polya, La découverte des mathématiques, Dunod, Paris 1967.

Maths et astronomie

Concrétisation de la mathématique

Gilbert Walusinski

A la veille de la dernière éclipse solaire du siècle en France, nous avons retrouvé un texte de Gilbert Walusinski qui retrace les liens qui existent entre mathématiques et astronomie.

Ce sujet présente comme premier intérêt de ne pas être original. D'illustres savants y ont réfléchi déjà, certains s'étant exprimés dans des écrits célèbres. Parmi ceux là, Henri **Poincaré** : "L'astronomie", chapitre VII, "L'analyse et la physique" et "L'histoire de la physique mathématique" dans "La valeur de la science", ou encore "La science astronomique" avec le chapitre sur "La Voie Lactée et la théorie des gaz" dans "Science et Méthode". Pour ne rien dire des ouvrages du même Poincaré sur la mécanique céleste ou ses célèbres et encore aujourd'hui délectables "Leçons sur les hypothèses cosmogoniques" qui datent de 1911 (les théories actuelles sous l'éclairage rasant du récent passé prennent un relief saisissant).

Deux sciences qui s'opposent ?

A ne voir que l'évolution actuelle des mathématiques et de l'astronomie, on pourrait croire que tout oppose ces deux sciences, le niveau d'abstraction auquel se développent les premières, l'attachement congénital à l'observation que marque la seconde. L'histoire des sciences nous apprend pourtant qu'il n'existe aucune discipline totalement étrangère à de que ses voisines peuvent lui apporter ou lui emprunter. Et, en ce qui concerne mathématiques et astronomie, c'est, tout au long de leur histoire, une longue intimité avec ce qu'il faut de conflits ou d'apparente opposition pour souder les alliances qui durent.

Tout cela par l'action en chaîne d'esprits raisonneurs qui ont imaginé des constructions aussi étranges que la sphère, l'ensemble des réels, les calendriers ou l'Univers.

On peut alors se demander qui a aidé au développement de l'autre, qui a bénéficié des découvertes de l'autre. Ce pourrait être un jeu de dresser ainsi des listes sur deux colonnes, à gauche ce que l'astronomie doit aux mathématiques, à droite ce que les mathématiques doivent à l'astronomie. Il ne suffirait d'ailleurs pas de compter les lignes dans chaque colonne; encore faudrait-il apprécier la valeur dechaque apport. Je n'ai pas la prétention, à la fin de cet exposé, de dresser le bilan d'une telle comptabilité.

Il me paraît plus important d'être persuadé dès l'abord que des liens étroits existent entre les deux disciplines et d'inventorier, d'explorer quelques exemples. Il reste pourtant une question de principe à discuter en tout premier lieu: l'opposition qui peut paraître radicale entre les méthodes, la méthode déductive d'une part, l'observation et l'induction de l'autre. N'y a-t-il pas incompatibilité de comportement entre le fervent de la méthode axiomatique et l'infatigable mesureur à la poursuite d'une décimale révélatrice ?

Tous les praticiens, astronomes ou mathématiciens, balaieront sans doute ces interrogations d'un sourire poli ou d'une manifestation plus vigoureuse de leur refus de telles caricatures. Réduire le mathématicien à un déducteur perpétuel est aussi faux que soupçonner l'astronome de ne rien voir en dehors de son télescope. il est vrai que la méthode axiomatique donne aux mathématiques leur solidité et leur fécondité, mais la modélisation qui nourrit la recherche astronomique depuis Anaximandre, et sans doute bien avant, n'a pas fini de fournir aux astrophysiciens modernes sujets d'étude et programmes de recherche. Je risquerai cet aphorisme: "la modélisation est à l'astronomie ce que l'axiomatisation est aux mathématiques".

Et pour ne pas en rester aux généralités, j'en viendrai à quelques exemples, me laissant guider par des mots.

La géométrie

"Ce mot de géométrie signifie, à la lettre, l'art de mesurer la terre", écrit Rollin dans son "Histoire ancienne". Il semble en effet que dans ses débuts elle se soit beaucoup intéressé à de telles mesures. Les inondations du Nil obligeaient les Egyptiens à perfectionner l'arpentage. Aucun savant, alors n'aurait émis des propos désobligeants à l'égard d'une activité aussi importante pour l'économie du pays (ce qui n'était pas le cas, en 1964, dans la préface d'un ouvrage au demeurant fort estimable).

Mesure de la terre, oui, mais aussi mesure de la Terre, de cette boule sur laquelle nous avons choisi, nous l'humanité, de proliférer pour explorer, à partir de là, l'Univers environnant. La mesure du rayon de la Terre par Eratosthène est trop célèbre pour que nous nous étendions ici sur ce sujet.

Signalons le succès des opérations de mesure menées par la même méthode par des groupes scolaires; un groupe de Monistrol/Loire (Haute Loire) s'est associé avec un groupe de Rozoy/Serre (Aisne) :
- distance entre les deux groupes : 489 km,
- valeur trouvée pour le rayon de la Terre : 6185 km.

Que des écoliers, aujourd'hui, remettent leurs pas dans ceux d'Eratosthène c'est de bonne pédagogie scientifique.

Vous avez dit "parallaxes" ?

"Parallaxe est un mot grec qui signifie changement et on entend spécialement par ce mot le changement qui s'opère dans la position apparente d'un astre quand on l'observe d'un point qui n'est pas le centre de son mouvement. (Delambre, "Abrégé d'astronomie"). Aujourd'hui, on dirait plutôt que la parallaxe d'un astre mesure l'angle entre la direction selon laquelle il est vu d'un lieu donné et la direction. selon laquelle il serait vu d'un certain point de référence.

Les coordonnées des étoiles étant rapportées à un système de référence ayant pour origine le centre de la Terre, les observations faites à partir de chaque observatoire doivent en principe être corrigées d'un effet de parallaxe (Fig. 1).

Ainsi la parallaxe du Soleil (ou de la Lune ou d'une planète) désigne telle en abrégé la parallaxe horizontale de cet astre, c'est-à-dire, pratique ment,l'angle sous lequel on verrait le rayon équatorial de la Terre à partir du centre de cet astre. On comprend pourquoi les mesures de distances en astronomie résultent de soigneuses mesures d'angles (ce qui n'a été rendu possible qu'après l'invention des lunettes: encore une des acquisitions essentielles du XVIIème siècle !).

Dans le sens précédent, la parallaxe d'une étoile autre que le Soleil n'a pratiquement pas d'existence. D'ailleurs, qu'une constellation soit haute ou basse sur l'horizon, elle a toujours la même forme à nos yeux. On a alors défini la parallaxe d'une étoile comme l'angle sous lequel, de l'étoile, on verrait le rayon de l'orbite terrestre (encore baptisé unité astronomique). Mesurer cet angle n'était pas facile puisqu'il fallut attendre Bessel en 1840 pour mesurer la première parallaxe stellaire, celle de l'étoile 61 du Cygne, un angle de 0", 348 (on donne plutôt aujourd'hui 0", 294 ce qui place l'étoile à plus de onze années lumière de nous). On comprend que nombre d'astronomes aient passé de nombreuses nuits blanches avant de réussir à mesurer un tel angle, quitte, comme Bradley en 1826 à découvrir l'aberration de la lumière et donner, par conséquent, une preuve indubitable du mouvement de translation de la Terre autour du Soleil.

La sphère céleste

Les traités classiques d'astronomie commencent tous par l'étude de la sphère. C'est le cadre obligé de toutes les observations, de toutes les mesures, de tous les calculs. Longue et juste tradition qui remonte au moins à Autolycos de Pitane dont l'ouvrage "La sphère en mouvement", date de plus de trois siècles avant notre ère (voir la belle traduction par G. Aujac, éditions Les BellesLettres).

Les graphiques de relations ou de fonctions ont vite fait de rendre familières les coordonnées cartésiennes. La

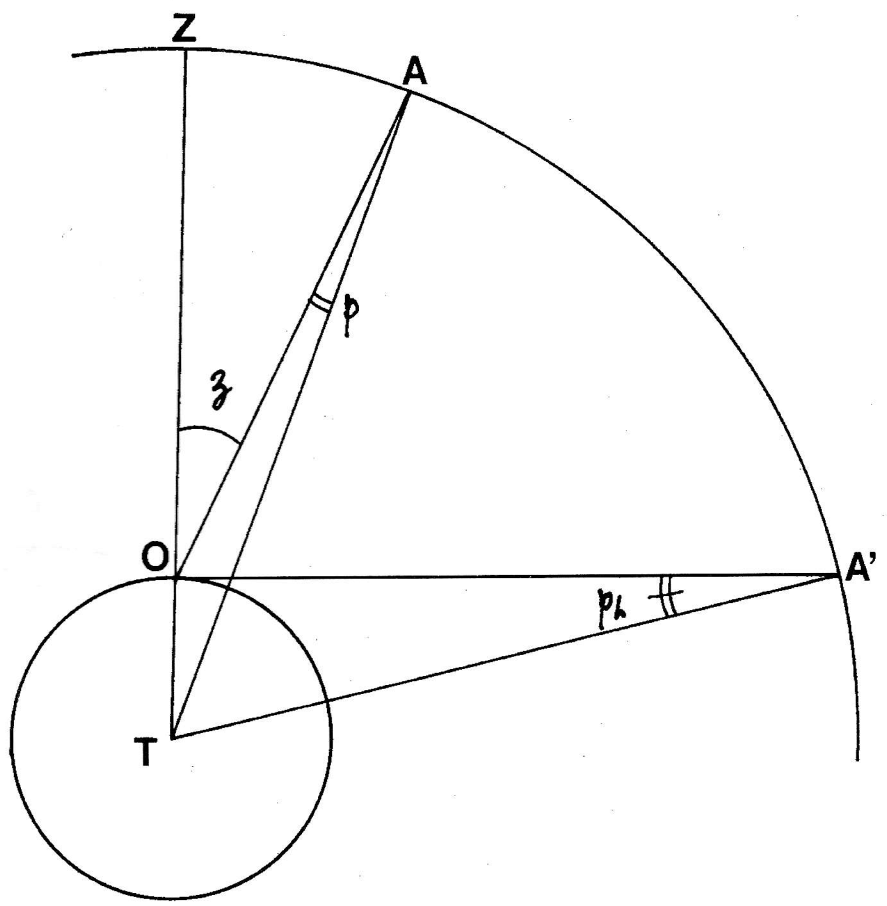
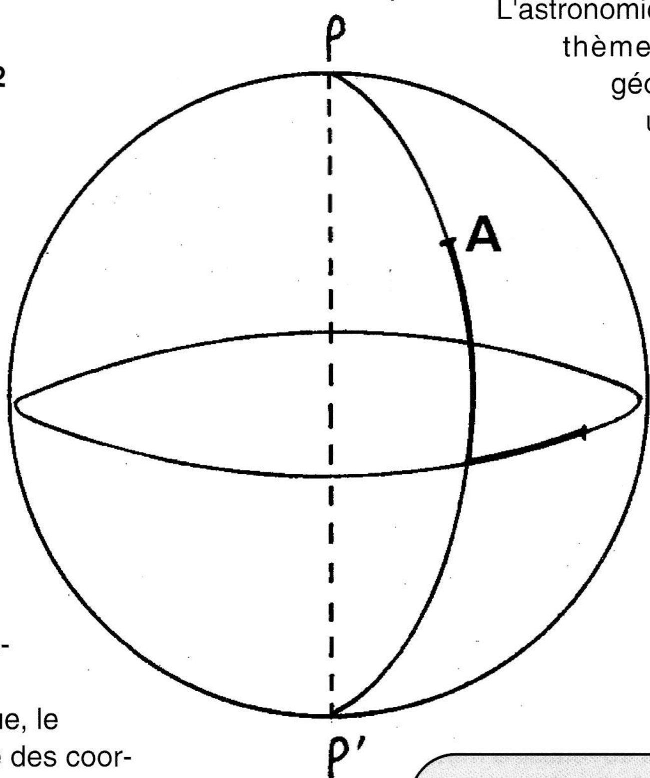


Figure 1 :
L'astre A, observé de 0, est à une distance zénithale z. De T, centre de la Terre, l'angle ZTA est égal à z - p, p parallaxe de A.
Lorsque A est à l'horizon de 0, soit A', la parallaxe horizontale est ph', angle sous lequel de A' on voit le rayon de Terre.

géographie comme l'astronomie exigent la compréhension des coordonnées sphériques. Le principe est aussi simple que celui des coordonnées planes: un grand cercle de la sphère et ses pôles, sur ce grand cercle une origine arbitrairement choisie, sur un demi grand cercle ayant pour diamètre les pôles, un arc allant du grand cercle au point repéré (Fig. 2). Pour parler comme un géographe, la longitude mesurée sur l'équateur, la latitude sur le demi-cercle méridien.

figure 2



En astronomie sphérique, le passage des coordonnées horizontales aux coordonnées équatoriales propose un joli problème élémentaire de trigonométrie sphérique: le triangle ZPA (Z, zénith du lieu d'observation, P, pôle céleste boréal, A, étoile visée) a pour côtés PZ, colatitude du lieu d'observation, PA, codéclinaison de l'astre, ZA, distance zénithale de l'astre, pour angles en P, l'ascension droite de l'astre, en Z le supplément de son azimut. Connaissant les coordonnées équatoriales, les formules du triangle sphérique permettent le calcul des coordonnées horizontales.

Application immédiate: les Ephémérides donnant les coordonnées équatoriales du Soleil, en déduire la discussion de la durée d'insolation locale selon les saisons.
Que signifie le Soleil de minuit? Pourquoi ne parle-t-on pas de la pleine Lune de midi ? Pourquoi Dostoïevsky a-t-il intitulé un de ses romans "Lesnuits blanches de Saint-Pétersbourg"?

L'astronomie fournit ici maints thèmes d'exercices de géométrie sphérique, une mine à exploiter.

Le calendrier

L'alternance du jour (au sens de la nonnuit) et de la nuit entraîne le **comptage des jours** (au sens de la durée entre deux passages du Soleil au méridien du lieu). Le retour des saisons motive le groupement de ces jours en **années.** Les données de base sont l'année tropique (365,2422 jours) et la lunaison (29,5 j) qui doit avoir donné l'idée du sous-groupement en mois et en semaines.

Chez les Hébreux, l'année de douze mois de 29 ou 30 jours alternativement n'avait donc que 354 jours; en trois ans, ils compensèrent le déficit en inventant le treizième mois.

Chez les Egyptiens de l'Antiquité, l'année vague de douze mois de trente jours prend une dérive de un mois en 120 ans, de une année en 1461 années, durée appelée période sothiaque. Du nom de Sothis l'étoile du Grand Chien (Sirius) dont le lever héliaque au début de la période annonçait les inondations du Nil.

L'ingéniosité des Grecs de l'antiquité est assez remarquable dans l'invention de la périodicité ocaétéride: l'année de douze mois de 29 ou 30 jours alternativement soit 354 jours était la même que celle des Hébreux, mais en ajoutant trois mois de trente jours à huit années de 354 jours on trouve un total de 2922 jours dont le huitième est 365,25 et le 99ème est 29,5 jours.

L'histoire des calendriers julien et grégorien est trop connue pour qu'on y revienne ici. Je propose seulement le petit calcul suivant :

31 décembre 1999 --> 96 --> 3

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3\ + & 5\ + & 1\ + & 3 \equiv 5 \end{array}$$

(mod 7)

sachant que le premier janvier 1900, premier jour du siècle était un mardi, on en déduit que le dernier 31 décembre avant l'an 2000 sera un vendredi. Je laisse aux curieux le plaisir de décrypter le calcul et de vérifier ensuite que nos glorieux ancêtres ont bien pris la Bastille un mardi.

A comme Aristarque
A comme Archimède

Ce sont des considérations géométriques bien connues qui permirent à Aristarque de Samos d'évaluer correctement la distance Terre-Lune, soit soixante rayons terrestres. Je voudrais m'attarder sur son estimation plus hasardeuse de la distance Terre-Soleil car elle est révélatrice de la puissance des méthodes géométriques.

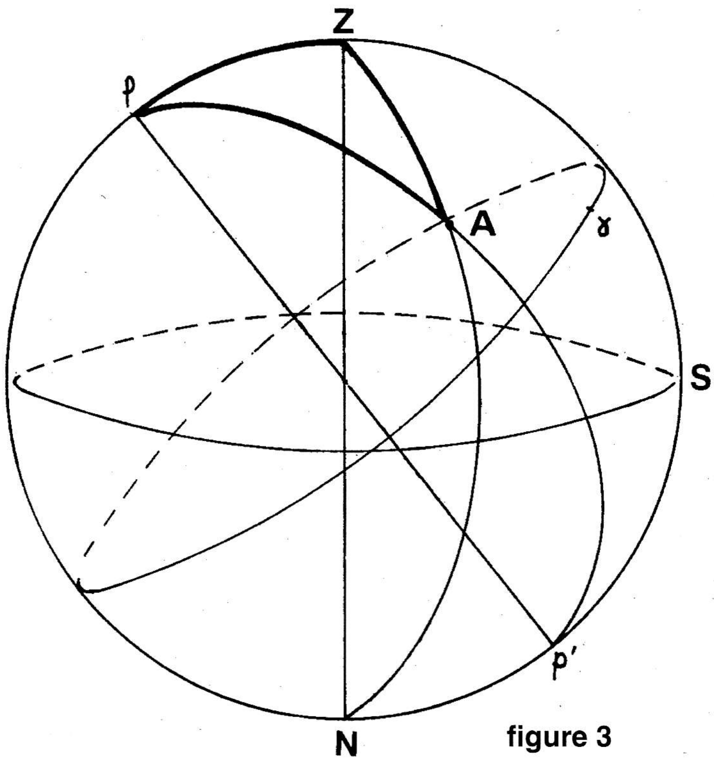


figure 3

La donnée dont part Aristarque est l'angle qu'il évalue à 3° entre la position de la Lune en quadrature (l'angle STL" est égal à 90°) et sa position en quartier (angle SLT = 90°) (Fig. 4).

L'évaluation est grossièrement fausse, il fallait dire 9' et non 30, mais Aristarque ne dispose pas de lunette et on ne sait pas, de surcroît, s'il connaissait l'alidade. De plus, il ne dispose pas de trigonométrie pour exploiter sa donnée. C'est un géomètre ingénieux, suivons sa démarche telle que nous la restitue A. Pannekoek dans son **History of Astronomy** (Fig. 5)

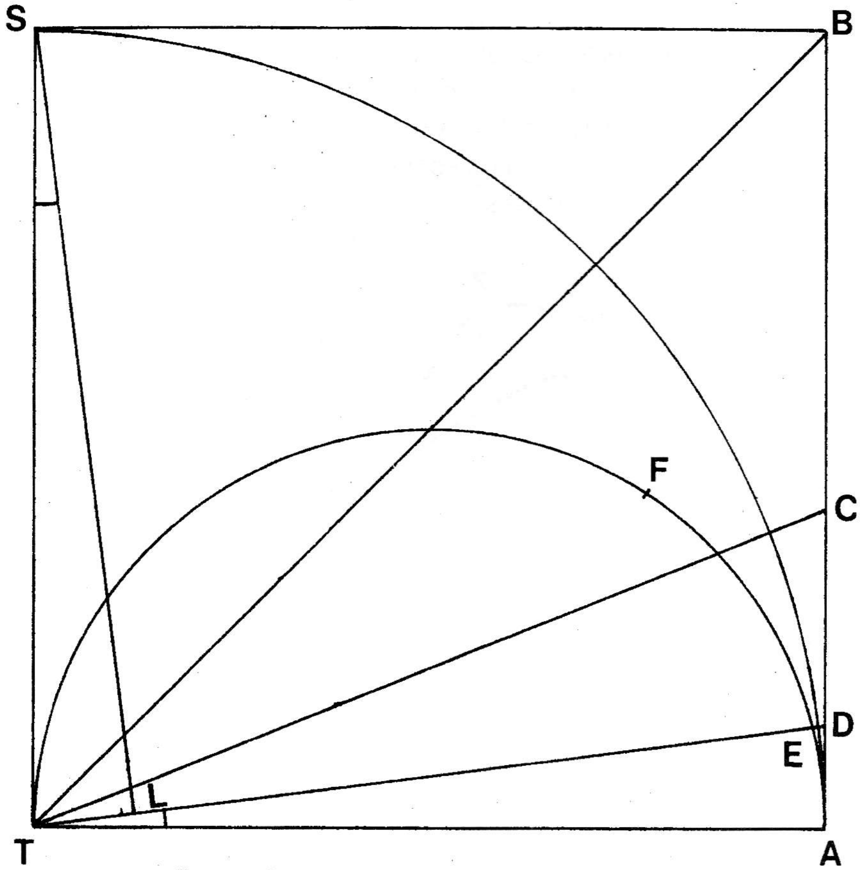


figure 5

Soleil S, Terre T, Lune L: carré STAB, cercle de centre T et de rayon TS, cercle de diamètre TA, diagonale TB, TC bissectrice de l'angle ATB.

L'idée d'Aristarque est d'évaluer le rapport TS/TL en l'encadrant.

1• TS/TL = TD/AD > AB/AD

AC et AD sont des segments de la tangente au cercle en A ;

leur rapport est supérieur à celui des arcs de cercle correspondant :

AC/AD > (1/4) / (1/30) = 15/2

TC étant la bissectrice de l'angle T du triangle ATB,

CB/CA = TB/TA = $\sqrt{2}$ > 7/5

donc AB/AC > 12/5

Conclusion: AB/AD = (AB/AC)(AC/AD) > (15/2)(12/5) = 18

Soit finalement TS/TL > 18

2• Dans le cercle de diamètre TA, l'arc AE mesure 6° ;

soit alors un arc AF de 60°

cordeAF/ corde AE< arc AF/ arc AE = 10

Conclusion :

TA/ corde AE < 20

soit finalement TS/TL < 20.

Le rapprochement des deux conclusions conduit à l'affirmation : le Soleil est 19 fois plus loin de la Terre que la Lune. Archimède en tirera la conclusion que le rayon du Soleil est au moins cinq fois celui de la Terre; il est donc vraisemblable que c'est la Terre qui se déplace autour du Soleil plutôt que l'inverse, malgré les apparences.

Les polyèdres réguliers

Pour les Coperniciens de la Renaissance, il y a six planètes. Rheticus, disciple enthousiaste, va jusqu'à trouver une preuve du système de Copernic dans le fait que six est le premier naturel parfait !

L'idée du jeune Kepler est plus ingénieuse, plus étrange, et pourtant plus riche. Dans son "Mystère Cosmographique" qu'il publie en 1595 (il a 24 ans), il maintient comme Copernic que les planètes décrivent des orbites circulaires tracées sur six sphères, concentriques, les orbes. Et pour soutenir les six orbes les unes dans les autres, il intercale les cinq polyèdres réguliers: "La Terre est la mesure de

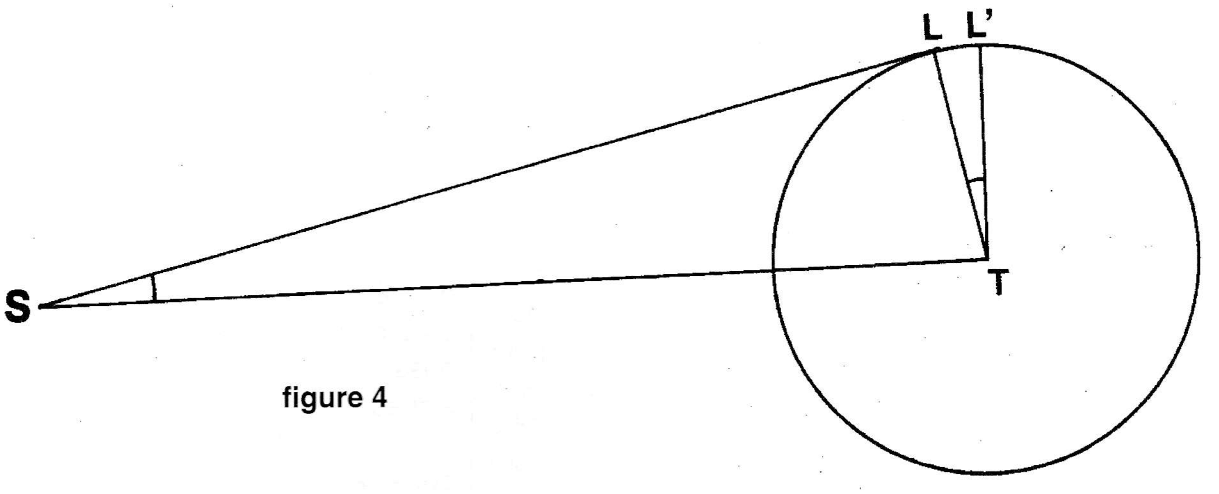


figure 4

tous les autres orbes. Circonscris-lui un dodécaèdre: la sphère qui l'entoure est celle de Mars; circonscris à l'orbe de Mars un tétraèdre : la sphère qui l'entoure est celle de Jupiter. A l'orbe de Jupiter, circoncris un cube: la sphère qui l'entoure est 5aturne. Place maintenant dans l'orbe de la Terre un icosaèdre : la sphère qui lui est inscrite est Vénus; place dans l'orbe de Vénus un octaèdre, la sphère qui lui est inscrite est Mercure. Tu as là la raison du nombre des planètes".

Bien sûr, Kepler abandonnera par la suite cette séduisante construction: en bon mathématicien, il n'aurait pas prétendu tracer des orbites elliptiques sur des sphères. Mais il conservera l'essentiel, une échelle des distances des planètes au Soleil en relation avec leurs périodes, sa troisième loi. Plus tard, ressurgira l'idée d'une loi des distances au Soleil avec la formule de Titius-Bode.

La prosthaphaeresis

Les astronomes ont souvent de longs calculs à effectuer et ils ont donc été les premiers à chercher des simplifications; par exemple chercher un moyen de remplacer les multiplications par des additions ou, pour donner son joli nom à cette méthode, la prosthaphaeresis.

Elle vient de loin. Ibn Yunnus, compagnon de Alhazen, popularise vers l'an mil la formule :

$$2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x - y)$$

qui a fait la joie de ma jeunesse studieuse.

Mais l'événement c'est la belle histoire d'amour qui a conduit aux logarithmes. En 1850, John Craig, médecin du roi James VI d'Ecosse, accompagne son souverain qui va chercher sa fiancée Anne de Danemark. La tempête fait échouer le bateau sur l'île où Tycho Brahé a construit Uraniborg son célèbre observatoire. Craig apprend de Tycho ce que prosthaphaeresis veut dire. Au retour il le raconte à son ami Neper qui en fait ses choux gras : "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" paraît en 1614.

Newton and company

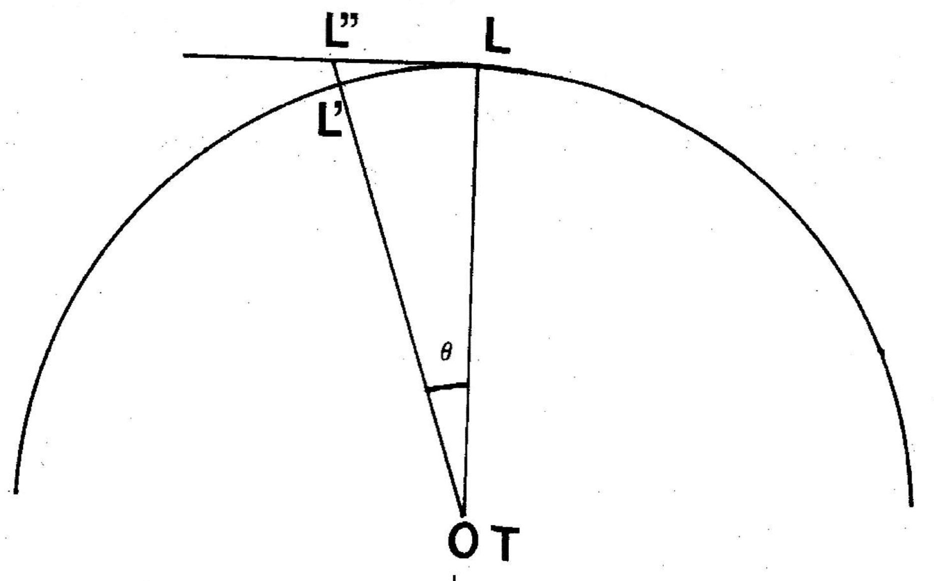
Alors que pour les Anciens on l'a vu avec Aristarque il n'y avait aucun obstacle à utiliser la géométrie, conçue à partir de l'expérience terrestre, dans des situations célestes longtemps on distingua deux physiques, la terrestre et la céleste. Mais vint Newton: Il fallait être Newton pour apercevoir que la Lune tombe, quand tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas". (Paul Valéry, "Carnets", XIV, 280)

En une seconde, la Lune passe de L à L' sur son orbite. Si la Terre ne l'attirait pas, elle serait en L"; elle est donc tombée de L"L' :

Avec Newton, vous venez de mettre en évidence la loi de gravitation avec sa proportionnalité à l'inverse des carrés des distances puisque TL est approximativement soixante rayons terrestres.

À partir de là, je veux dire à partir de Newton, les relations entre mathématique et astronomie ne sont plus seulement géométriques mais aussi mécaniques c'est-à-dire phy siques.

L'analyse mathématique en porte la marque, y compris dans le vocabulaire: l'attraction universelle explique les marées et Newton appelle "fluxion" la variation des "fluentes" c'est-à-dire des variables.



$L''L' = 2\ TL \sin^2(\theta/2) / \cos\theta$

soit $L''L' \sim TL\ \theta^2/2$

En une seconde, θ est facile à calculer : $\theta = 2\pi / 27{,}322 \times 84400$

soit L"L' = 1,36 mm

Or, en une seconde, la pomme, pour reprendre l'image voltairienne, tombe de 4,9 m.

Vous vérifiez :

4,9/0,00136 ~ 3603 ~ 60°

Les liens entre mathématiques et astronomie apparaissent chez presque tous les mathématiciens du XVIIIème siècle. Les astronomes leur proposent de calculer les perturbations des planètes les unes sur les autres. Le mouvement de la Lune soumise à l'attraction principale de la Terre et du Soleil pose immédiatement le problème des trois corps. Clairaut, après avoir étudié la forme de la Terre, calcule avec une bonne approximation de combien Saturne et Jupiter retarderont le retour de la comète de Halley en 1759. Il échange avec Euler une correspondance sur le problème des n corps. En 1846, Arago fera un triomphe à la découverte de Neptune par Le Verrier "à la pointe de sa plume", autrement dit grâce au calcul des perturbations d'un astre hypothétique sur le mouvement d'Uranus.

Modèle

"Une représentation schématique, suffisamment proche du réel, et assez complète pour permettre l'extrapolation raisonnable et les confrontations fructueuses du lendemain" (Jean Claude Pecker, "L'atmosphère solaire"). C'est un astrophysicien qui parle ainsi. Représentation schématique: elle s'exprime par des lois, des formules mathématiques grâce auxquelles des résultats nouveaux peuvent être prévus: "l'extrapolation raisonnable".

Le modèle newtonien n'a pas suffi lorsque l'extrapolation a envisagé des vitesses qui n'étaient plus négligeables vis-à-vis de celle de la lumière.

L'existence de cette vitesse limite donne poids nouveau à la critique de notions qui paraissaient triviales comme celle de la simultanéité. L'histoire de la relativité est étroitement liée à celle de l'astronomie. Contentons-nous ici de rappeler l'importance des mesures effectuées par Arthur Eddington lors de **l'éclipse totale de Soleil de 1919** : oui, les rayons lumineux en provenance d'étoiles lointaines étaient bien légèrement déviés quand ils frôlaient la masse solaire.

Modèle newtonien, modèle relativiste, la science perfectionne les modèles qu'elle utilise sans renier ceux qui furent, un temps à la pointe de la découverte et qui restent performants dans leur domaine.

Vous avez dit "parallaxes" ?

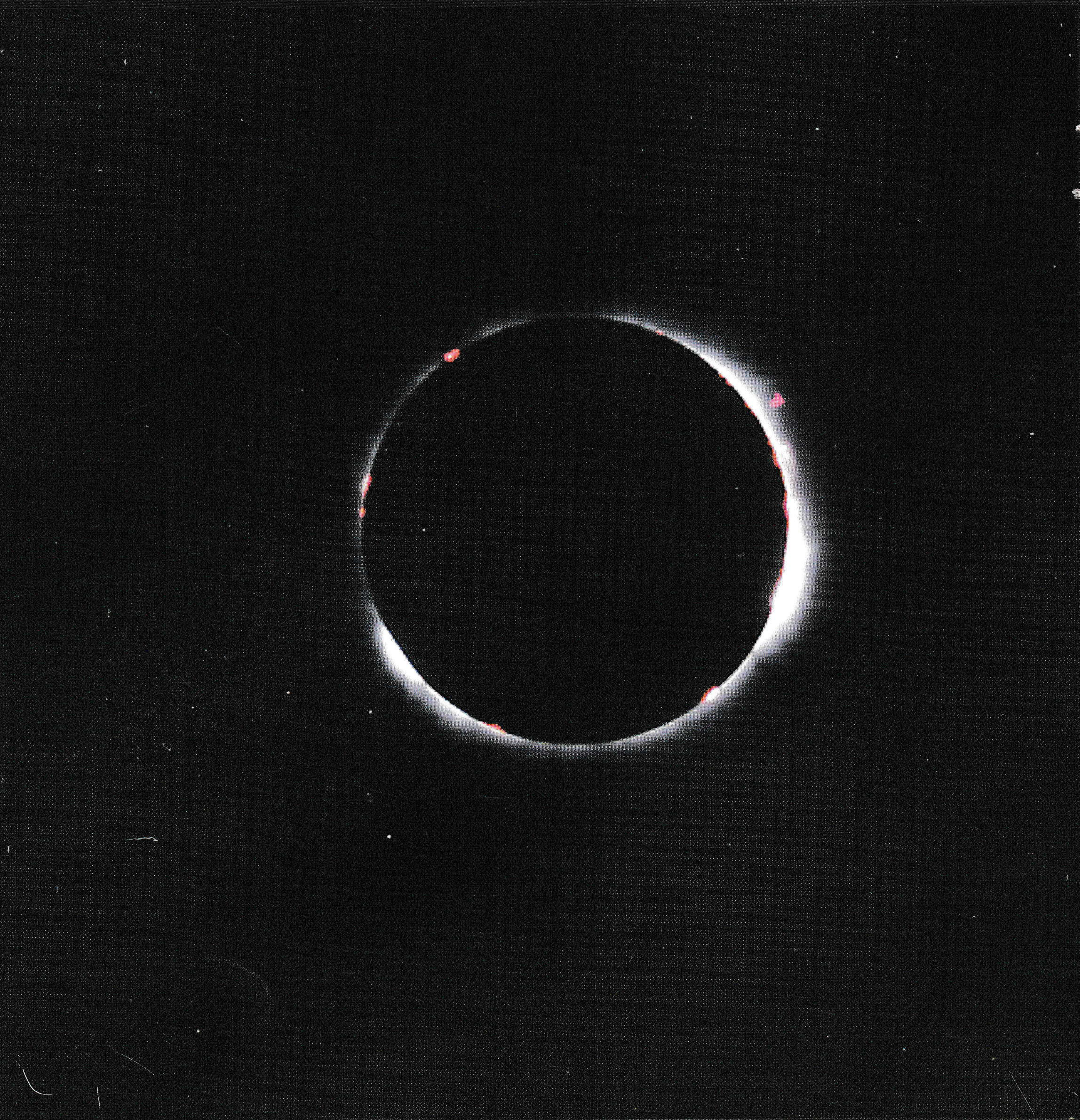
Alors, pour conclure, faut-il dire "C'est l'astronomie qui nous a appris qu'il y a des lois" (Henri Poincaré, "La valeur de la science").

Ou bien "Que serait la pensée, humaine si nous ne pouvions pas percevoir les étoiles?" (Jean Perrin, préface à "L'architecture de l'Univers" par Paul Couderc).

Faut -il dire que sans l'astrono mie il n'y aurait pas de mathématiques?

Ce serait aussi peu justifié que d'imaginer une astronomie privée des ressources mathématiques, une science limitée à l'observation des apparences, qui serait bien débile en comparaison des méthodes de l'astronomie moderne. Faux débat que vouloir décider qui a mieux servi l'autre.

Pour nous autres qui enseignons des mathématiques, l'astronomie est à la fois une mine d'exercices, l'aspect astronomique ajoutant à l'intérêt mathématique de leur étude, et la source de considérations épistémologiques fort instructives. Une occasion merveilleuse de faire comprendre qu'aucun domaine scientifique n'est



Eclipse de Soleil du 11 août 1999
photo : Olivier Morand

isolé des autres. Chaque science particulière vit de sa spécialité et de ses liens avec les autres spécialités.

Dans "L'Avenir de la Science", Renan écrivait: "La condition essentielle d'un spectacle de marionnettes, c'est de ne pas apercevoir le fil". Si nous voulons, dans notre enseignement aussi bien que dans un grand musée des sciences, ne pas donner de la science l'idée d'une agitation de pantins étrangers les uns aux autres, nous devons montrer les fils. ■

Bibliographie

A. Pannekoek:
A history of Astronorny, 1961 éd. Allen and Unwin, London

Henri Poincaré:
La Valeur de la Science, éd. Flammarion

Science et Méthode, éd. Flammarion