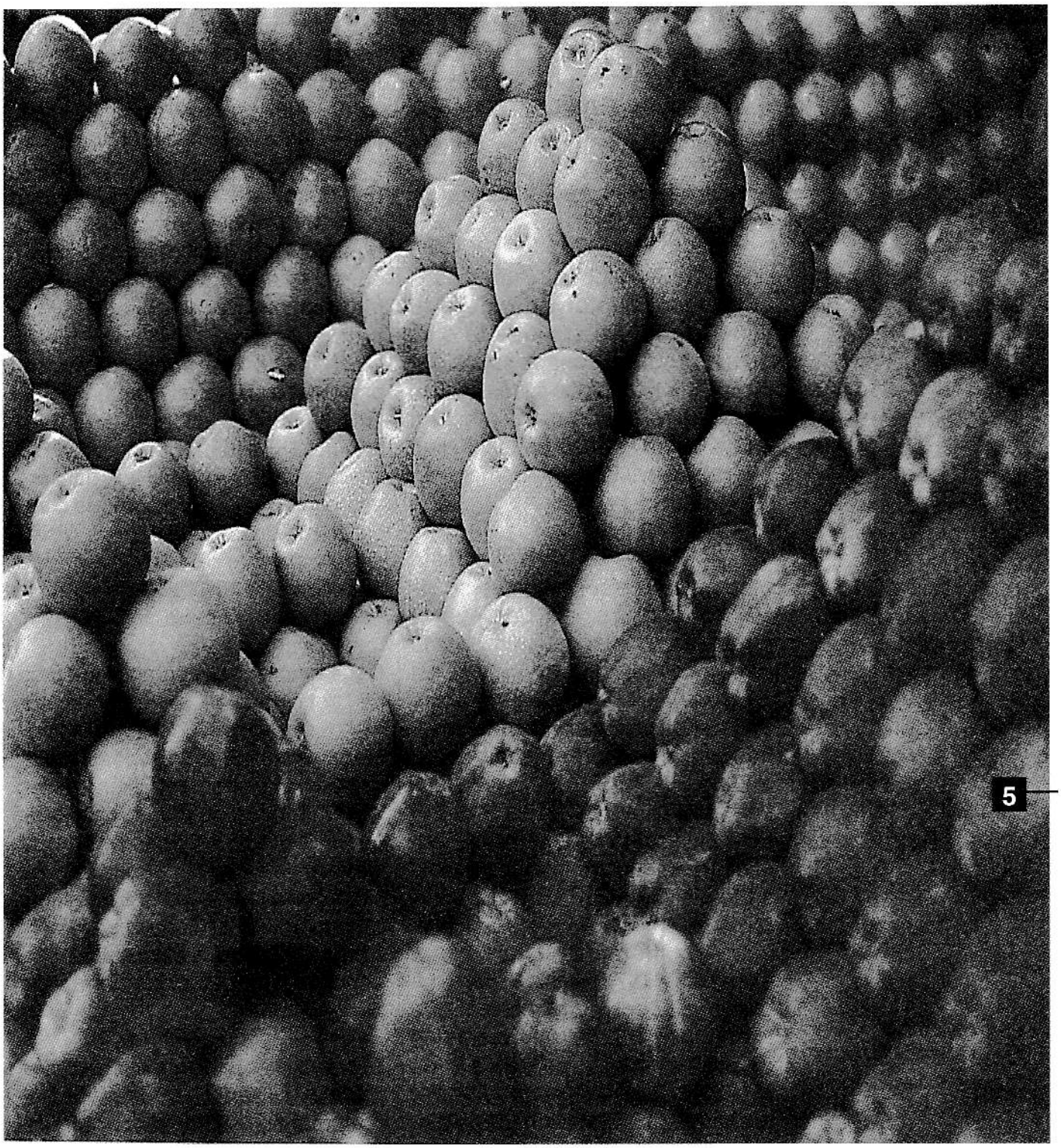
Posé par Képler en 1611
reposé par Hilbert en 1900
un problème résolu en ... 1998



Problème posé par Johannes Kepler en 1611

Comment empiler, de la façon la plus dense possible, des sphères de même rayon dans l'espace ? Cette question est apparue il y a près de quatre siècles, à la suite de travaux de Thomas Harriot - l'assistant mathématicien de Walter Raleigh - concernant les empilements de boulets de canon.

Dans un livret publié en 1611, Johannes Kepler énonce que l'empilement de sphères le plus dense possible dans l'espace est l'empilement cubique à face centré, c'est-à-dire celui qui correspond aux empilements de fruits que l'on peut apercevoir communément sur les étals des marchés.

Cet énoncé, maintenant appelé conjecture de Kepler, a traversé les siècles sans connaître de preuve rigoureuse. 11 figures parmi la liste des problèmes que David Hilbert proposa A la communauté des mathématiciens au congrès international des mathématiciens de 1900.

En fait, à partir de l'empilement cubique à face centrée, il est possible de construire une infinité d'autres empilements de sphères ayant la même densité, égale à :$\pi/\sqrt{18} \neq 0{,}7404\ 8049$. Le problème est donc de démontrer que tout empilement de sphères a une densité inférieure ou égale à ce nombre. En 1947, la meilleure borne connue était de 0,828 (Rankin), et, en 1993, le record était de 0,7731 (Muder), jusqu'à ce que Thomas C. Hales, de l'université du Michigan, rende publique sa solution du problème de Kepler, au début de l'année 1999.
L'approche de Hales diffère significativement des approches antérieures par un usage intensif de l'ordinateur. La preuve complète est contenue dans un d'articles totalisant plus de 250 pages. Le stockage des dossiers informatiques contenant l'ensemble des codes informatiques et des données nécessaires à la preuve exige près de trois gigabits de mémoire.

Le premier progrès important sur le problème avait été effectué par Fejes Toth en 1953.

Celui-ci était parvenu, en utilisant une construction géométrique classique, la décomposition de Voronoi, à ramener le problème à une question d'optimisation d'une fonctionnelle non linéaire.

Cette fonctionnelle comportant près de cent cinquante variables, ce problème d'optimisation échappe complètement à ce qu'il est possible de calculer actuellement, même avec les ordinateurs les plus puissants. Le point de départ de la preuve de Hales utilise des constructions voisines de celles de Toth. Le problème d'optimisation non linéaire étant hors d'atteinte, Hales est conduit à utiliser des méthodes combinatoires plus indirectes.

Une étape importante est la classification, utilisant intensivement programmation linéaire et ordinateurs, de certains graphes planaires. ■

François Lœser
in "La science au présent"
Encyclopedia
Universalis 2000