

Trois cercles et un triangle ???

Deux nouveaux bouts d'allumaths

par les allumés des maths !!!

Le groupe des allumaths (les "allumés" des mathématiques) réunit quelques professeurs et inspecteurs de mathématiques de l'Académie de Poitiers pour la plupart.

Ils échangent problèmes et solutions sans autre restriction que leur intérêt. Voici deux nouveaux sujets, l'une géométrique, l'autre numérique, et des éléments de réponses pour les deux précédents sujets parus dans le PLOT n° 87.

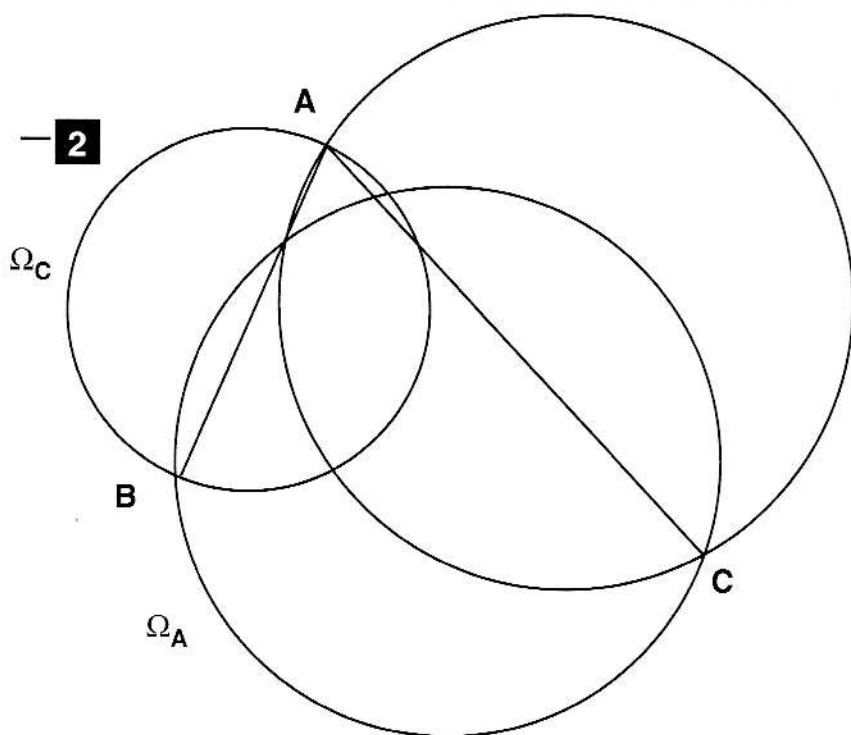
Plot 88 - Situation 1

A, B, C sont trois points non alignés d'un plan..

Ω_A , Ω_B , Ω_C les cercles de diamètres [BC], [CA] et [AB].

Que peut-on en dire ?

Et cela suffit pour se poser des problèmes divers et variés et accessibles à tous !



Plot 88 - Situation 2

Nous avons proposé dans le n° 86 de trouver une explication au texte suivant de Walusinski : "l'histoire des calendriers julien et grégorien étant connue de ... tous, et sachant que le 1er janvier 1900 était un ... lundi, on en déduit par le calcul ci-dessous que le :

31 décembre 2000 sera ... un dimanche !".

Pouvez-vous décrypter ce calcul et vérifier que nos glorieux ancêtres ont pris la Bastille un mardi !!!

31 --> 2

décembre --> 5

Ω_B 2000 --> 2

100
↓
25 --> 4

soit pour le tout : 6 (modulo 7)
D'où du lundi au dimanche !!!

Et quel jour était le 14 juillet 1789 ?

Les bissectrices d'un triangle

À propos des situations 1 et 2 parues dans le Plot n° 87

Plot 87 - Situation 1

ABCD est un parallélogramme noté P .

Que peut-on dire des quadrilatères formés par les bissectrices des angles du parallélogramme ?

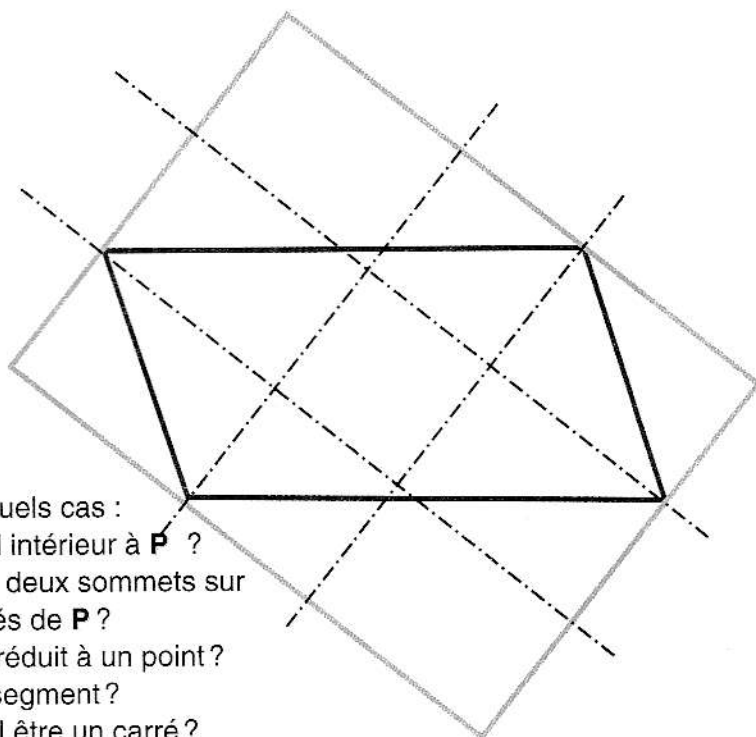
Cette situation est élémentaire et peut être aisément étudiée dès le collège.

Appelons **I** le quadrilatère formé par les bissectrices intérieures et **J** celui formé par les bissectrices extérieures, on montre successivement que :

- **I** et **J** sont des rectangles dont les côtés sont parallèles.
- leurs éléments de symétrie sont :
 - le centre du parallélogramme,
 - les parallèles aux bissectrices passant par ce centre.
- le parallélogramme $A'B'C'D'$ a ses côtés parallèles à ceux de P , les mêmes bissectrices intérieures et extérieures que P , le même périmètre et la même aire.
- Les diagonales de **I** et **J** sont les médianes communes de P et P' .

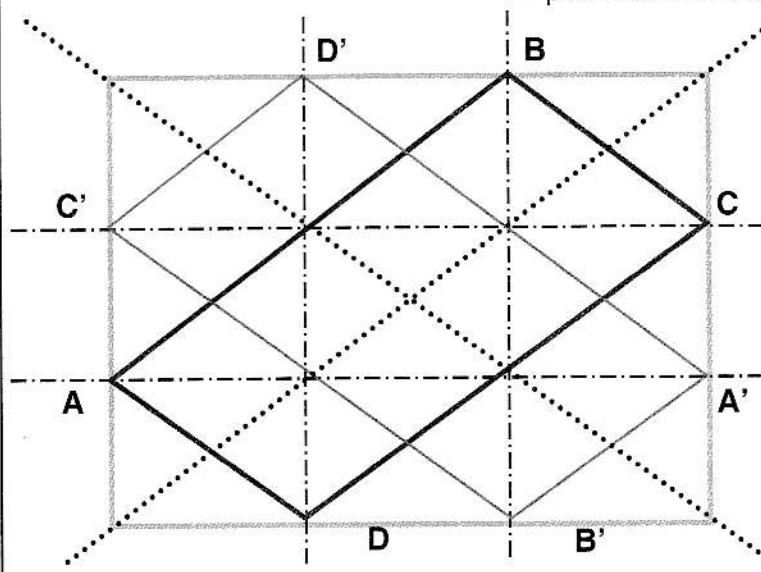
- la longueur des segments diagonaux de **I** (resp. **J**) est la différence (resp. la somme) des longueurs de deux côtés consécutifs d'un parallélogramme.
- dans le cas où **I** est intérieur à P :

$$\text{Aire}(\mathbf{J}) - \text{Aire}(\mathbf{I}) = 2 \text{ Aire}(P)$$



Dans quels cas :

- **I** est-il intérieur à P ?
- **I** a-t-il deux sommets sur les côtés de P ?
- est-il réduit à un point ? à un segment ?
- peut-il être un carré ?



Il serait enfin intéressant d'étudier des groupes qui laissent (globalement) invariants les rectangles et un parallélogramme (ou les deux).

Autres remarques :

• Si a et b sont les longueurs des côtés du parallélogramme ABCD (avec $a > b$), alors :

- les longueurs des côtés du petit rectangle sont :

$$(a - b) \cdot \cos \widehat{BAC}/2 \text{ et } (a - b) \cdot \sin \widehat{BAC}/2$$

- celles des côtés du grand rectangle sont :

$$(a + b) \cdot \cos \widehat{BAC}/2 \text{ et } (a + b) \cdot \sin \widehat{BAC}/2,$$

- celles des diagonales des rectangles (médianes des parallélogrammes) sont $a - b$ et $a + b$.

Nous invitons le lecteur à poursuivre l'étude avec un parallélogramme articulé (a, b fixés et $\widehat{BAC}$ variable).

Ces dernières remarques s'inspirent largement d'une étude fouillée de Raymond MILLON de Montigny-le-Bretonneux.

Plot 87 - Situation 2

Et si l'on décidait qu'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ était divisible par un autre $\frac{c}{d}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que :

$$\frac{a}{b} = k \times \frac{c}{d}$$

Dans l'ensemble des rationnels strictement positifs, cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre partiel !

Notons que si les deux rationnels (positifs) sont irréductibles alors :

$$\frac{c}{d} \text{ divise } \frac{a}{b} \iff b \mid d \text{ et } c \mid a$$

On peut introduire les notions de PGCD et de ppcm ;

en notant $a \Delta c$ (resp. $a \vee c$) et $b \Delta d$ (resp. $b \vee d$) les PGCD (resp. ppcm) de a, c et de b, d , on établit que :

$$\frac{a}{b} \Delta \frac{c}{d} = \frac{a \Delta c}{b \vee d}$$

et

$$\frac{a}{b} \vee \frac{c}{d} = \frac{a \vee c}{b \Delta d}$$

C'est un cas particulier d'un résultat plus général relevant de la théorie des treillis.

• 0 est un élément maximal ($\mathbf{Q}_+, \mid$), comme dans ($\mathbf{IN}, \mid$).

• Notons qu'un rationnel non nul est toujours "divisible" par une infinité d'autres ($a/b = n \times a/nb$).

• Si on se limite à l'ensemble $\mathbf{Q}_n$ ($n \in \mathbf{IN}^*$ fixé) des rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme a/n ($a \in \mathbf{Z}$), alors on peut définir une division euclidienne :

$$\frac{a}{b} = q \times \frac{b}{n} + \frac{r}{n}$$

(avec $0 \leq r < b$) et donc développer une arithmétique dans $\mathbf{Q}_n$ analogue à celle de $\mathbf{Z}$.

N'hésitez pas à nous envoyer vos commentaires et remarques et, bien sûr, toute idée de solution.

Nous sommes également ouverts à toute proposition de texte et idée permettant d'allumer nos mathématiques !