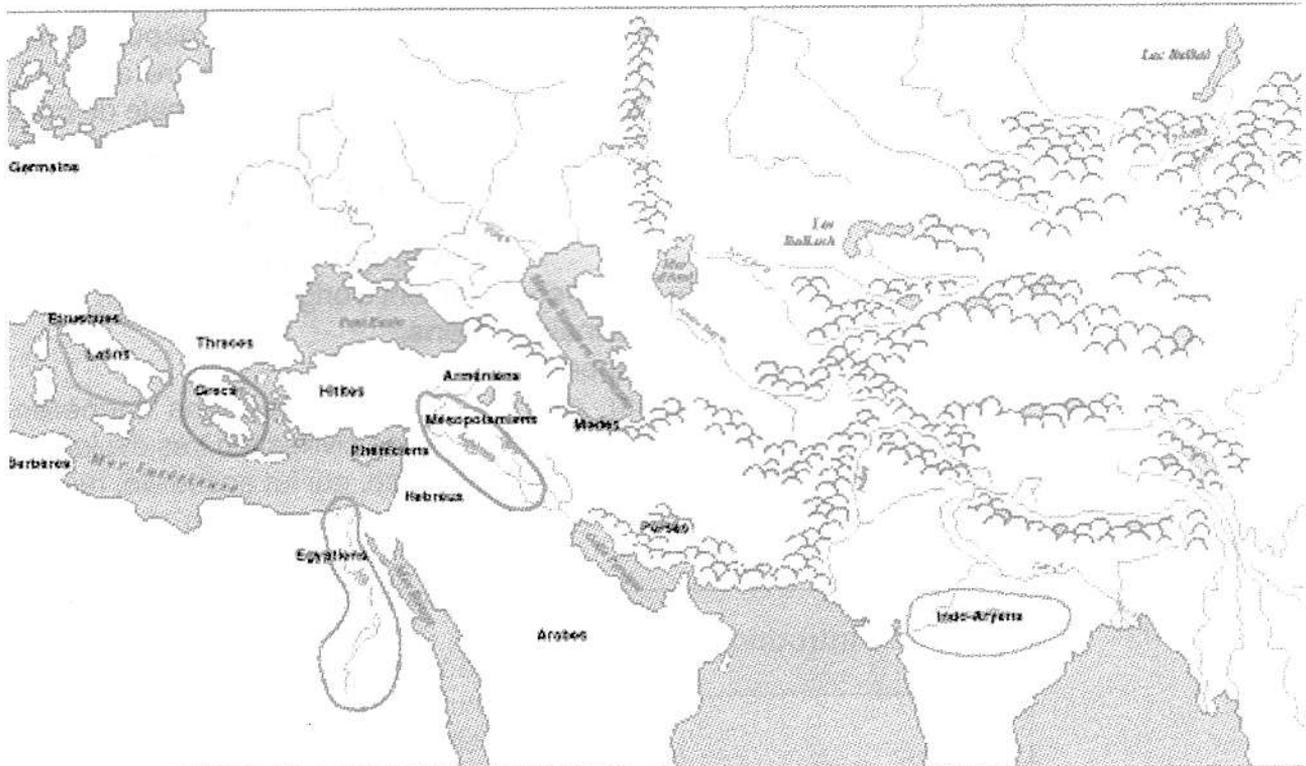


# Babylone et les mathématiques

Livia Giacardi - Turin

À l'occasion de la présentation de l'exposition "Le ciel de Babylone" à ... Bagdad, nous avons voulu faire un retour sur les premières mathématiques. Un article de Livia Giacardi paru dans les actes de l'Université d'été de la commission inter-irem épistémologie à Toulouse en 1986 nous le permet ici.



Les études sur les mathématiques babyloniennes sont très nombreuses.

Jorän Friberg a récemment édité un volume de plus de cent pages sur la bibliographie consacrée à ces mathématiques (1).

Outre l'aspect strictement mathématique, l'examen de textes babyloniens comporte d'autres pro-

(1) Friberg J. : À survey of publications on Sumero-Akkadian mathematic, metrology and related matters (1854-1952), Chalmers University of Technology and University of Göteborg, Sweden, 1982.

blèmes, qui sont surtout d'ordre philologique, de datation, d'interprétation et d'emplacement dans le domaine plus vaste de la culture mésopotamienne.

Pour avoir une vision complète, il faudrait donc aussi prendre en considération ces aspects culturels qui, bien qu'en marge des mathématiques, interfèrent sous certains aspects avec : celle-ci et parfois la déterminent comme par exemple, l'art, l'astronomie, l'urbanisme et la technique.

Compte tenu du temps dont nous disposons, je me limiterai à traiter

Fig. 1  
--- Sumer et Akkad  
et extension du Premier  
Empire Babylonien

rapidement certains facteurs géographiques et historiques qui ont joué un rôle important quant au développement et aux caractéristiques des mathématiques babyloniennes. J'examinerai ensuite certains textes dont je ferai un commentaire et donnerai une interprétation.

Je chercherai, de plus, à mettre en évidence, à travers ces textes, les caractéristiques de la mathématique mésopotamienne en m'arrêtant plus particulièrement sur l'algèbre.

J'espère, ainsi, donner aux personnes qui me lisent une connaissance de base sur ces mathématiques et fournir aussi des arguments didactiques et des suggestions pour une éventuelle application interdisciplinaire.

### Introduction

La fertilité du terrain fut l'un des principaux facteurs qui favorisèrent la naissance de communautés stables et, par conséquent, la formation d'une civilisation. Ce n'est pas un hasard si les plus grandes civilisations du passé se sont développées dans les vallées du Nil, du Tigre et de l'Euphrate ainsi que de l'Indus où le débordement naturel des fleuves déposait chaque année une nouvelle couche de terrain fertile.

Les caractéristiques du milieu ambiant de la plaine située entre le Tigre et l'Euphrate et appelée Mésopotamie (étymologiquement : pays entre les fleuves) (cf. fig. ci-contre) eurent certainement une forte influence dans la formation de la civilisation mésopotamienne.

L'origine des Sumériens, qui furent parmi les premiers habitants de la Mésopotamie, est encore aujourd'hui un problème à résoudre. Ils s'étaient installés, depuis la moitié du IV<sup>ème</sup> millénaire av. J.-C., dans la partie méridionale de cette région appelée ensuite **Babylonie**, alors que dans la partie septentrionale, appelée plus tard **Assyrie**, il y avait des communautés probablement d'origine sémite : les **Akkadiens**.

Les Sumériens donnèrent vie à une civilisation très évoluée et élaborée, qui fut accueillie, réinterprétée et enrichie par les peuples qui se succédèrent au pouvoir dans cette région. Ce phénomène nous permet de déceler un processus historique plutôt homogène qui peut, dans l'ensemble, être indiqué comme civilisation mésopotamienne. Chacun des peuples qui se succédèrent au pouvoir en Mésopotamie tenta de réaliser un empire solide et unifié mais sans jamais obtenir un résultat définitif. Ce fait est dû à l'emplacement géographique de la région, ouverte dans toute direction et donc continuellement exposée aux invasions. La superposition des peuples et les contacts entre gens de différentes races favorisèrent le développement d'une civilisation plus vive que celle de l'Égypte, moins monolithique mais plus articulée et plus riche de curiosités scientifiques et

d'intérêts techniques.

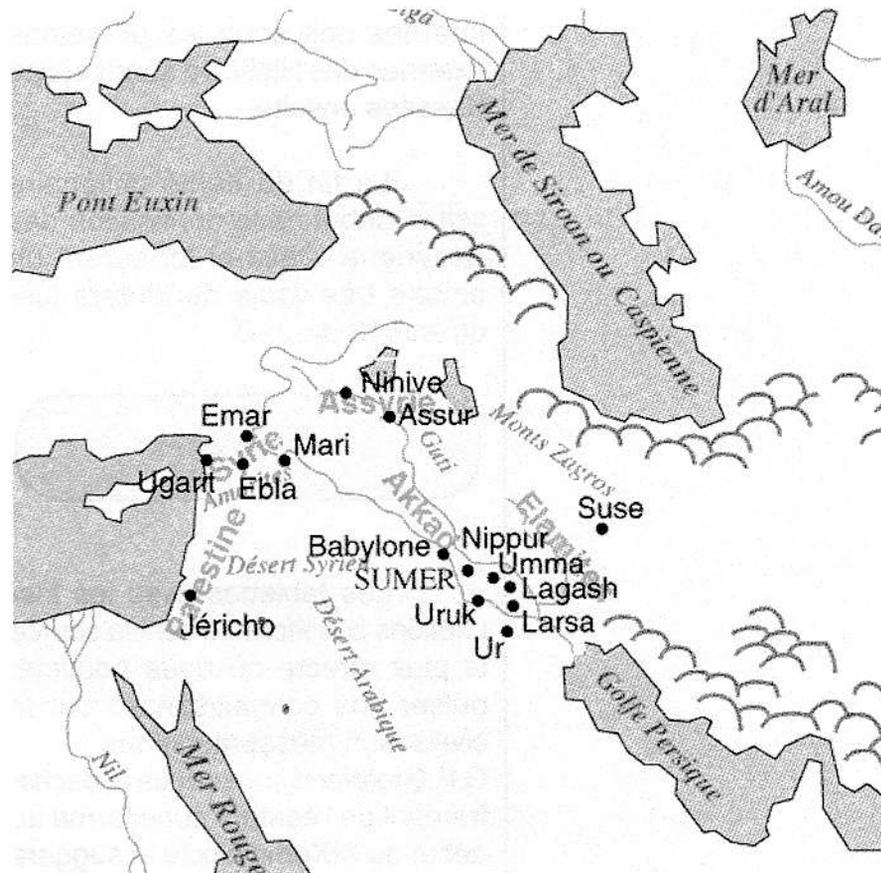
La puissance sumérienne survécut, malgré la parenthèse de la domination akkadienne (2.400-2.150 av. J.-C.), jusqu'en 1850 environ, lorsque les invasions des peuples pour la plupart d'origine sémite, en déterminèrent la crise et ensuite la ruine.

Durant le IV<sup>ème</sup> millénaire, les Sumériens élaborèrent une écriture rudimentaire. Cette écriture fut peu à peu perfectionnée jusqu'à subir en 2.500 av. J.-C. un processus de simplification et d'abstraction qui eut une certaine importance pour l'élaboration du système de numération sexagésimale en usage dans la mathématique suméro-babylonienne.

Vers 1700 av. J.-C., Hammourabi, souverain de Babylone, parvint à étendre son contrôle sur toute la Mésopotamie et fonda ainsi le premier empire babylonien.

Son règne fut caractérisé par un programme grandiose d'œuvres publiques, par une administration correcte de la justice et, par conséquent, par un épanouissement culturel et scientifique remarquable. Des écoles pour l'éducation des fonctionnaires d'état furent fondées en annexe des temples : l'énorme importance donnée à la géométrie, à l'arithmétique et à l'algèbre, ainsi que les surprenants résultats obtenus, sont la conséquence directe des nouvelles exigences culturelles et sociales.

Presque tous les textes mathématiques que nous examinerons appartiennent à L'ancien Âge Babylonien, c'est-à-dire à la période entre



1900 et 1660 av. J.-C..

Fig. 2 :  
vue rapprochée

A cette époque, de plus, la nécessité de matières premières dont la Mésopotamie était dépourvue, pierres, bois, métaux et le perfectionnement des moyens de transports favorisèrent la création de voies de communication commerciale (cf. Fig. 2) entre cette région et L'iran actuel, L'asie Mineure, la Syrie, l'Egypte et l'Inde. La circulation s'effectuait par mer, par fleuve ou sur les nombreux canaux existants. Les contacts commerciaux favorisèrent certainement des échanges culturels entre les différentes civilisations, échanges qui ont aussi une importance considérable pour l'Histoire des Mathématiques.

Le déclin de l'empire babylonien commença après le règne d'Ham-

mourabi soit à cause des luttes internes soit sous les pressions externes des Hittites d'abord et des Kassites ensuite.

La fin du II<sup>ème</sup> millénaire voit le début de la domination des Assyriens. Ceux-ci fondèrent un empire très vaste qui durera jusqu'en 612 av. J.-C.

### Les tablettes

Les tablettes avec les inscriptions cunéiformes sont la source la plus directe où nous pouvons puiser nos connaissances sur la civilisation mésopotamienne.

G.F. Grotefend commença le déchiffrement de l'écriture cunéiforme au début du XIX<sup>ème</sup> siècle et suggéra une clé de lecture qui fut perfectionnée par H.C. Rawlinson en 1847.

Les tablettes ayant un contenu mathématique sont environ au nombre de 300 : certaines remontent à la période sumérienne (3000-2100 av. J.-C.), un groupe plus consistant appartient à la période qui va de l'époque d'Hammourabi jusqu'en 1500 av. J.-C. et d'autres encore, plutôt à caractère astronomique, remontent à l'époque séleucide (environ 311- 50 av. J.-C.).

Les études de ces tablettes sont principalement dues à O. Neugebauer, F. Thureau-Dangin et E.M. Bruins.

Elles peuvent être essentiellement divisées en deux groupes :

- tables de calcul et
- textes de problèmes.

Les premières avaient certainement une fonction pratique : ce sont en effet des tables de multiplication et de division à l'intérieur du système sexagésimal, des listes de mesures qui comprennent les passages d'une unité d'ordre inférieur à une unité d'ordre supérieur et vice-versa.

Les textes de problèmes sont des listes d'exercices de mathématiques avec ou sans solution. Il nous semble opportun de remarquer que les solutions se réfèrent toujours à un cas particulier, sans jamais généraliser en effet, il n'y a aucune formule, aucun théorème, aucune démonstration. Toutefois les Babyloniens connaissaient de nombreuses règles générales, comme nous pourrions le constater en examinant les textes.

### Caractéristiques des mathématiques babyloniennes

Les historiens ont souvent affirmé que les mathématiques suméro-babyloniennes sont essentiellement pratiques : cette affirmation n'est que partiellement exacte et mérite d'être précisée.

Les mathématiques, auprès des peuples mésopotamiens, ne furent certainement pas conçues comme une activité spéculative et abstraite, avec des exigences de logique et de rigueur.

Au contraire, elles furent un produit social, né des besoins d'une société en expansion continue.

Les Babyloniens n'avaient pas d'idéal démonstratif analogue à celui des Grecs; la raison de ce fait se trouve dans le contexte dans lequel se développa la science mathématique.

A l'origine c'était un instrument de connaissance et de pouvoir. Elle est née et s'est développée dans les temples comme moyen indispensable pour l'administration de la ville (construction d'édifices et de canaux, perception d'impôts, division des héritages, calcul des intérêts, etc.), pour le compte du temps et pour régler les activités agricoles et commerciales (v. Fig. 3, à, 5).

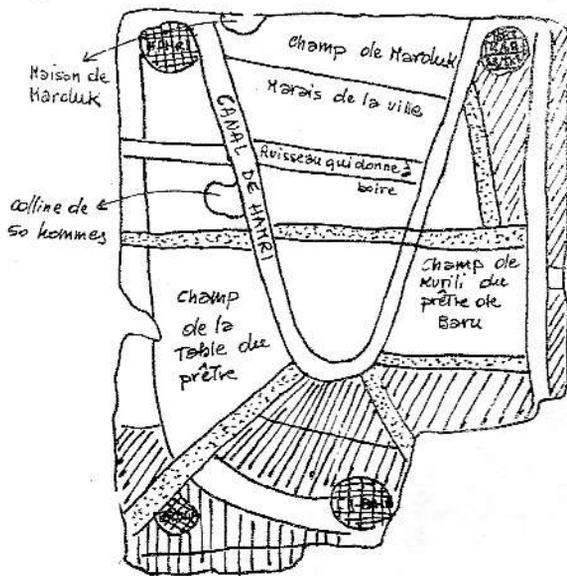


Fig. 3 :  
les travaux pour l'irrigation en Mésopotamie étaient imposants. Cette carte des champs et des canaux près de Nippur, tirée d'une tablette qui date approximativement de 1300 av. J.-C. nous en donne une impressionnante démonstration car elle témoigne d'une technique hydraulique et agricole très évoluée.



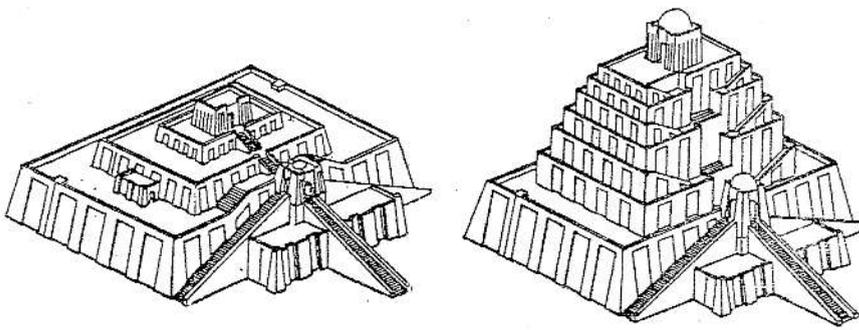


Fig. 4 :  
Ziggourat de la ville de Ur en deux époques successives.  
Les Ziggourats, les éléments peut-être les plus caractéristiques de l'architecture babylonienne, sont des tours à 3, 4, 5 étages ou plus, hautes de 50 à 90 m. Leur but était probablement de faciliter la descente du dieu parmi les hommes durant les cérémonies religieuses.

reproduite sur la figure. Sur la tablette est gravée le plan d'une construction ; sur les côtés sont sculptées en relief une baguette recourbée et une règle graduée. Vraisemblablement le dessin se réfère à une construction projetée par Gudea et il est probable que ce dessin soit aussi la représentation.

Un autre aspect, qui a joué un rôle non secondaire, est la numérogie.

Les textes mathématiques qui nous sont parvenus ont surtout un but pédagogique : ils servent à former les futurs fonctionnaires de l'état.

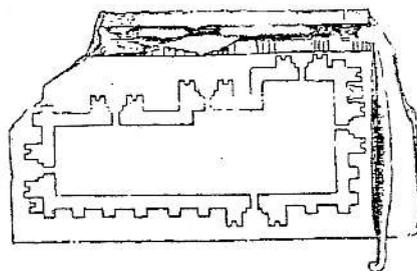
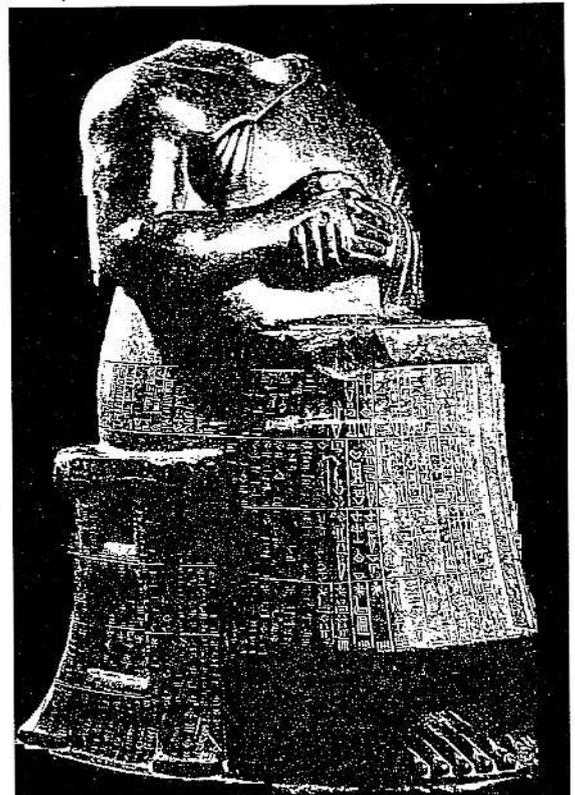


fig. 5



Statue de Gudea qui se trouve au Musée du Louvre, connue comme L'architecte au plan ( 2.000 av. J.-C.). Sur la statue est indiquée l'unité de mesure de l'époque, la coudée sumérienne (49,5 cm) et sur les genoux du roi se trouve la tablette

Dans une telle sorte de transmission des connaissances, qui a des fins politiques de pouvoir, le secret et le ritualisme tendent à prévaloir sur la libre discussion. (cf. Guillemot & Plane : l'algèbre au fil des ages. Irem de Toulouse p 274 à 279).



En outre les Babyloniens ne faisaient pas de nette différence entre les trois branches des mathématiques : arithmétique, algèbre et géométrie, même si certains textes nous font penser le contraire comme par exemple la tablette BM 13901 que nous examinerons ensuite.

Malgré tout, il me semble opportun de donner les précisions suivantes :

- la présentation concrète des problèmes est due, le plus souvent, à la fonction didactique de ces textes,
- le classement des problèmes selon le type de solution dénote

une certaine conscience de la généralité,

- très souvent, des problèmes qui semblent, lors d'une première lecture, inspirés de situations pratiques, comprennent des données qui n'auraient aucune utilisation dans la vie réelle. Ce fait peut indiquer tout autant un aspect ludique qu'un intérêt théorique.

À mon avis, et en examinant les textes nous pourrions le vérifier, de nombreux résultats des mathématiques babylonienne ont une portée théorique, même s'il n'existe ni le symbolisme, ni la démonstration des théorèmes, ni la justification théorique des procédés de résolution utilisés.

**L'arithmétique babylonienne**

L'évolution du système de numérotation et de l'arithmétique babylonienne est étroitement liée à celle de l'écriture. A partir du IV<sup>e</sup> millénaire av. J.-C., les Sumériens inventèrent une forme rudimentaire d'écriture qui, à travers les siècles, se transforma de simple pictographie, perfectionnée ensuite par le phonétisme, en un système purement abstrait.

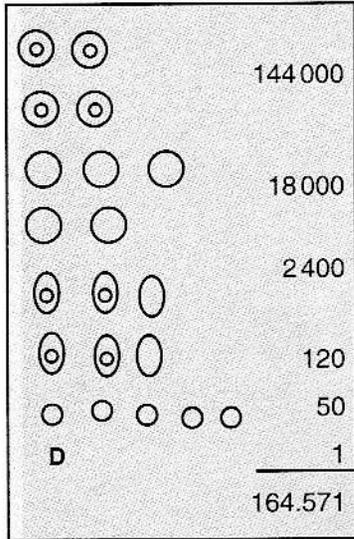
Durant l'époque paléosumérienne le système de numération était sexagésimal fondé sur un compromis entre les bases 10 et 6. Les symboles employés étaient les suivants :

- D** ges : 1      **O** u : 10
- D** ges (ta) : 60
- D** ges-u : 600 (60 x 10)
- O** sar : 3600 (60<sup>2</sup>)
- O** sar-u : 36000 (60<sup>2</sup>x10).

Ils étaient obtenus en imprimant dans l'argile une canne petite pour les unités et les dizaines ou grande pour les soixantaines, tenue obliquement ou verticalement.

Le système de numérotation était additif - un nombre très élevé de signes était donc nécessaire pour représenter certains nombres il fallait, par exemple utiliser 28 signes pour écrire 3599.

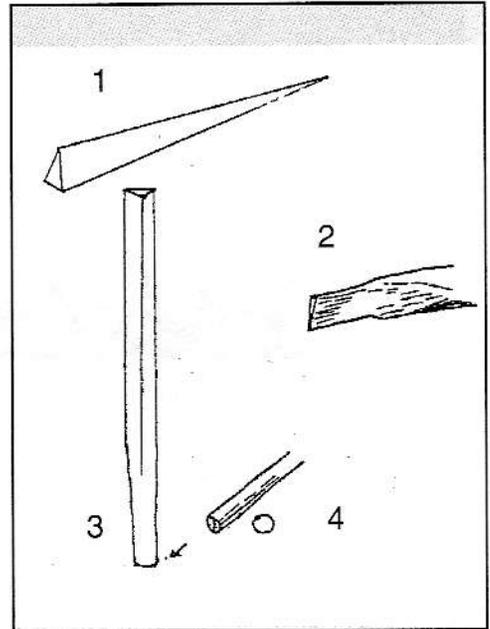
Vérifiez que l'écriture en marge est bien celle du nombre 164.571, comme il apparaît sur une tablette de 2650 av. J.-C.



Durant l'époque archaïque, il y avait une différence essentielle entre la façon de tracer les signes de l'écriture sumérienne et celle de tracer les symboles numériques. Dès le début les derniers étaient obtenus par impression, alors que les signes de l'écriture étaient incisés.

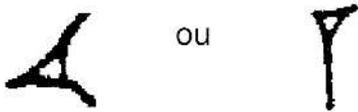
Vers 2700 on passa de l'écriture par incision sur l'argile à celle par impression au moyen d'une petite canne taillée de façon à présenter en section un triangle isocèle

Fig. 6 Reconstitution de calames pour l'écriture cunéiforme



- 1- Les calames, en roseau ou en bois, matières périssables, ne se sont pas conservés. Il nous faut les reconstituer. Leur forme a pu changer au cours du temps, et selon les graphies utilisées.
- 2- Calames à bout triangulaire pour former des coins sur l'argile fraîche.
- 3- Roseau à bout creusé en forme de clou, permettant son impression dans l'argile.
- 4- Bout rond pour imprimer les chiffres de l'époque archaïque.

Selon la façon dont elle était saisie on obtenait les signes :



ou

C'est-à-dire les caractères dits cunéiformes.

Évidemment, de cette façon, le dessin des objets perdit son instantanéité et apparut d'une manière géométrique et schématique.

Après l'apparition de l'écriture cunéiforme, les chiffres sumériens prirent un aspect différent, mais la structure mathématique du système ne fut pas modifiée, comme on peut le voir dans l'exemple suivant, tiré d'une tablette de 2000 av. J.-C. :

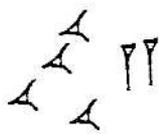
$$\begin{array}{c} \text{T} \\ \text{T} \end{array} \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{T} \end{array} \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{T} \end{array} = 60 + 20 + 6 = 86,$$

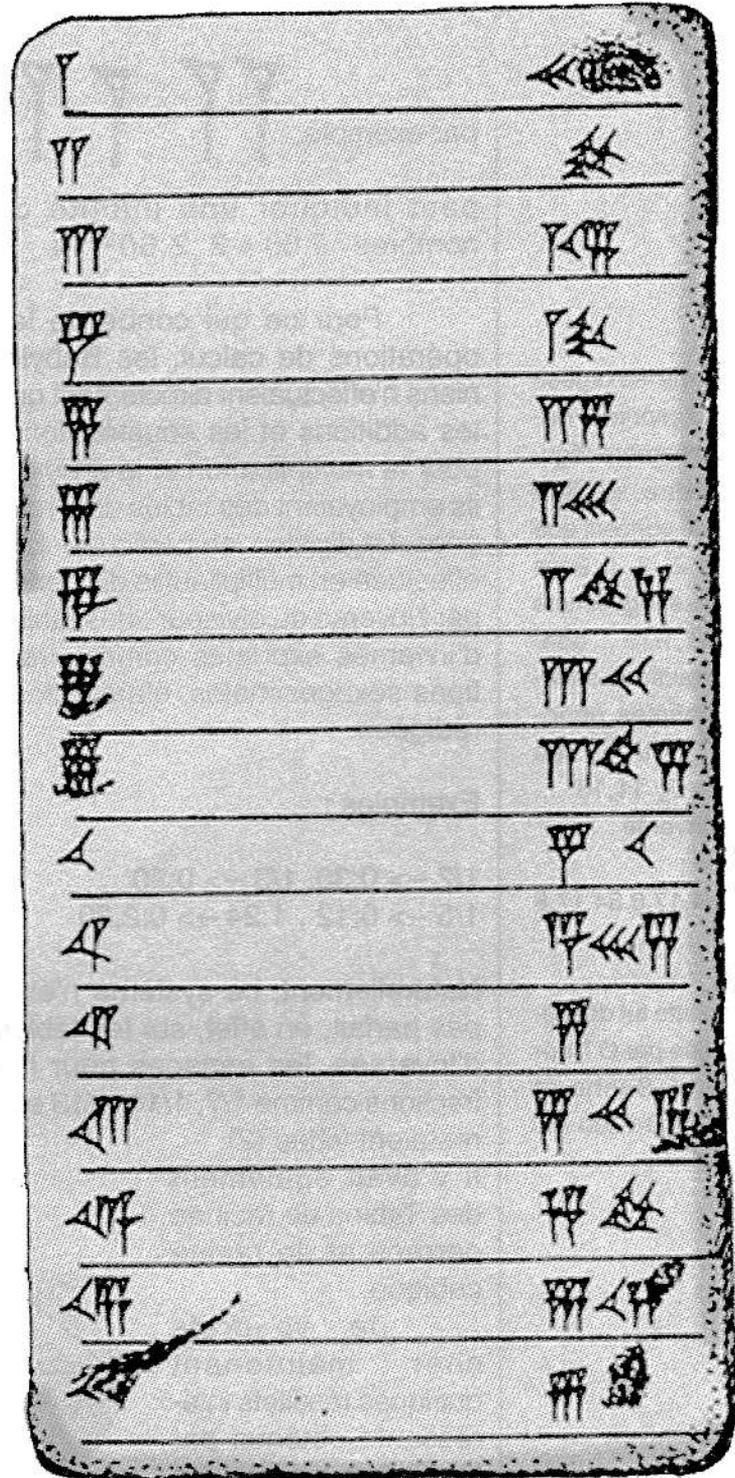
où le symbole  indique 60,  indique 10,  indique 1.

Le système de numération sexagésimale de position parut chez les mathématiciens et les astronomes babyloniens probablement au début du II<sup>e</sup> millénaire av. J.-C.

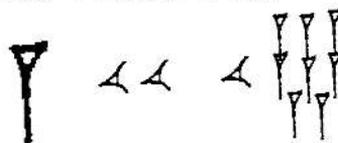
Ce système n'utilise que deux signes (et non 59 comme on pourrait s'y attendre) : le symbole unité  et le symbole  pour indiquer la dizaine.

Les nombres de 1 à 59 étaient écrits de façon additive ; pour les nombres à partir de 60, on employait le système de position.

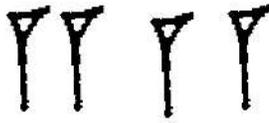
Exemple :  : 42



$$4818 = 1.60^2 + 20.60 + 18 :$$



L'absence d'un symbole pour le zéro et pour la virgule donnait lieu à une certaine ambiguïté ;



par exemple,

peut indiquer une infinité de nombres :  $2.60 + 2$ ,  $2.60^2 + 2$  .....

Pour ce qui concerne les opérations de calcul, les Babyloniens n'effectuaient directement que les additions et les soustractions; pour la multiplication et la division, ils employaient des tables déjà rédigées. La division, en particulier était effectuée en multipliant le dividende par l'inverse du diviseur : des tables d'inverses exprimés comme fractions sexagésimales, étaient donc rédigées.

Exemples :

$1/2 \rightarrow 0;30$ ,  $1/3 \rightarrow 0;20$ ,  
 $1/5 \rightarrow 0;12$ ,  $1:24 \rightarrow 0;2,30$

Naturellement, ce système n'était pas parfait, en effet, sur les tables d'inverses, les espaces pour les fractions comme  $1/7$ ,  $1/11$ ,  $1/13$  etc. restaient vides (2).

Il y avait également des Tables de racines carrées et de racine cubique.

Je voudrais citer maintenant quelques résultats intéressants obtenus par les Babyloniens dans le domaine de l'arithmétique.

La tablette connue sous le nom de Plimpton 322 (3), de la Plimpton Collection de la Columbia University, est un admirable témoignage de leur habilité de calculateurs.

Cette tablette contient une

liste bien ordonnée de mesures relatives à 15 triplets pythagoriciens, c'est-à-dire relatives aux longueurs (rationnelles) des côtés  $a$ ,  $b$  et de l'hypoténuse :  $c$  d'autant de triangles rectangles.

Plus précisément la tablette Plimpton 322 présente des colonnes de nombres  $b^2/a^2$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $a^2 + b^2 = c^2$

où  $a$  et  $b$  sont choisis de telle sorte que leur rapport  $b/a$  soit décroissant de la première à la quinzième ligne. Le scribe ne donne pas d'explications. Un approfondissement des problèmes que cette tablette nous pose serait trop long et, en outre, les hypothèses des historiens concernant le procédé utilisé par le scribe pour obtenir les 15 triplets sont très nombreuses.

Les Babyloniens furent aussi très habiles à obtenir **les approximations de certains nombres**. Pour indications bibliographiques voir (J. Fribey)

(3) Le système sexagésimal permet d'exprimer l'inverse de tout nombre régulier, c'est-à-dire, de tout nombre qui ne contient que les facteurs 2, 3, 5 avec une fraction sexagésimale finie.  $1/7, 1/11, 1/13$  ... donnent lieu à fractions sexagésimales infinies périodiques; pour les Babyloniens 7, 11, 13 .... n'ont pas d'inverse.

Par exemple :  
 $1/7 \rightarrow 0;8,34,17,8,34,17,8$  .....

(4) Cette tablette fut découverte et publiée par O. Neugebauer et A. Sachs et remonte à -1900-1600 av. J.-C..

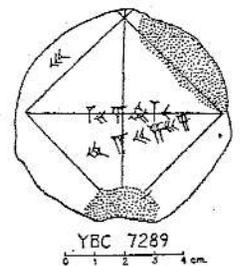
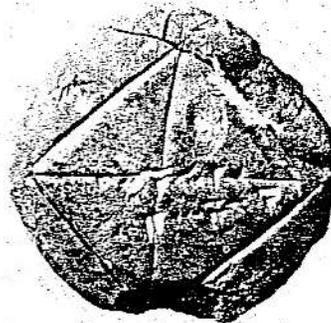


Fig 7

Citons, à titre d'exemple, la tablette YBC 7289 (cf. Neugebauer & Sachs) de la Yale Babylonian Collection de la Yale University, sur laquelle est représenté un carré avec ses deux diagonales tracées

(fig 7) :

Les données reproduites sur la figure amènent à une approximation très bonne de  $\sqrt{2}$ , c'est-à-dire 1 ; 24 ; 51 ; 10 ; qui, en notation décimale correspond à 1,414213 au lieu du nôtre 1,414214 .....

Dans ce cas aussi le procédé qui a amené le scribe à une telle approximation n'est pas indiqué. Ceci est significatif, comme nous l'avons déjà dit plus haut, du fait que le mathématicien babylonien était plus intéressé par les résultats que par les moyens pour les obtenir ou pour les justifier.

Naturellement ceci conduit ceux qui s'intéressent aux mathématiques babyloniennes à avancer des hypothèses pour comprendre les procédés mentaux qui ont amené aux résultats connus dans les tablettes d'argile.

Dans le cas de l'approximation de  $\sqrt{2}$  cité ci-dessus, la méthode suivie par les Babyloniens pourrait être la suivante : partant de l'identité

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.ab$$

qu'ils connaissaient, pour  $b$  petit par rapport à  $a$ , nous pouvons écrire :

$$(1) \quad (a+b)^2 - a^2 \sim 2.ab$$

Posons alors  $a + b = \sqrt{2}$  et considérons une valeur approchée par défaut de  $\sqrt{2}$  soit  $a_1 = 1$ .



De (1) on déduit :

$$(r_1 =) 2 - 1 \sim 2b \text{ ou } b \sim 1/2.$$

Nous pouvons donc considérer une seconde approximation, par excès, de  $\sqrt{2}$ , c'est-à-dire :

$$a_2 = 1 + 1/2 = 3/2 = 1 ; 30$$

De (1) on a :

$$(r_2 =) 2 - 9/4 \sim 3b \text{ ou } b \sim -1/12.$$

Une troisième valeur approchée de  $\sqrt{2}$ , par excès sera :

$$a_3 = 3/2 - 1/12 = 17/12 = 1 ; 25$$

valeur que l'on trouve dans d'autres tablettes. Procédant comme ci-dessus on obtiendra une quatrième

valeur approchée de  $\sqrt{2}$ , par défaut,  
 $a_4 = 577/408 = 1; 24,51,10 \dots\dots$

qui correspond à la valeur lue sur la tablette. La formule générale d'approximation peut s'exprimer ainsi :

$$a_{n+1} = a_n \pm r_n / 2a_n$$

Il est intéressant de faire à ce sujet la remarque suivante.

Le scribe s'arrêtera à la valeur  $a_4$  peut-être parce qu'elle est la première à ne pas avoir d'expression sexagésimale finie : en effet 408 contient le facteur 17, qui n'est pas diviseur de la base 60 (voir note 3)

Les Babyloniens étaient aussi à même de calculer la somme de progressions aussi bien arithmétiques que géométriques et plus encore ; en effet sur la tablette AO 6484 on peut trouver la recette pour calculer la somme des carrés de 1 à 10. Le texte est le suivant :

*Carré depuis 1 fois 1:1  
 jusqu'au 10 : 1,40.*

*Comme quoi est le nombre ?*

*Tu multiplieras 1 par 0,20*

*(ou un tiers) : 0;20.*

*Tu multiplieras 10 par 0,40*

*ou deux tiers : 6;40. 6;40 et 0;20 : 7.*

*Tu multiplieras 7 par 55 : 6,25.*

*Le nombre est 6,25 (7)*

Le problème n'est donc pas résolu en calculant les carrés successifs et en les additionnant ensuite, mais avec le schéma de calcul suivant :

$$(1. 1/3 + 10.2/3) . 55 = 385 \\ (= 6.60 + 25)$$

qui correspond à :

$$(1/3 + 2n/3) . n (n+1)/2 \text{ pour } n = 10$$

et donc à notre formule :

$$\sum_{i=1 \text{ à } n} i^2 = n (n+1) (2n+1)/6.$$

Cette tablette se trouve au Louvre et remonte à l'époque Séleucide. Pour avoir une notation uniforme nous avons introduit le point virgule dans l'écriture des nombres.

De nombreux historiens ont avancé des hypothèses à propos du procédé par lequel les Babyloniens ont obtenu ce résultat. Nous aimerions citer celle de S.J. Lurje ("Archimedes") parce qu'elle est beaucoup plus simple que les autres et peut-être plus conforme à la mentalité babylonienne.

Cette hypothèse de reconstruction du raisonnement du scribe est la suivante :

Compter, en les associant de façon adéquate, les cubes qui forment une construction dans l'espace (on dirait presque un bâtiment semblable aux Ziggourats typiques de l'architecture babylonienne) formée par un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont  $n, n, n+1$  avec l'adjonction d'un escalier de  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n (n+1)/2$  cubes (cf. fig. 8c).

Lurje prend en considération un escalier comme celui de la figure 8a, dont  $n = 5$ . La plus haute marche de l'escalier est constituée par un petit cube unitaire, la deuxième marche par 4 petits cubes unitaires, la troisième par 9, la quatrième par 16 et pour finir, la cinquième par 25.

\* Le Prisme AO 8862 se trouve au Musée du Louvre, il date de l'époque d'Hemourabi (environ 1700 av. J.-C.) et contient 8 problèmes. Il fut étudié par O.Neugebauer (1937) et par F.Thureau-Dangin (1938).

Kuddouru du Musée du Louvre. In exposition "Le ciel de Babylone" de Centre•Sciences

Par conséquent, le nombre total des petits cubes qui forment l'escalier est égal à la somme des carrés des nombres de 1 à 5.

En associant trois constructions comme celle qui est décrite, il obtient un parallélépipède rectangle de dimensions  $n$ ,  $n$ ,  $n+1$ , avec l'adjonction d'un escalier qui, comme on peut voir sur la figure, est la moitié d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont  $1$ ,  $n$ ,  $n+1$ .

De l'observation d'ensemble de ce solide nous pouvons tirer la formule suivante :

$$3 \sum_{i=1}^n i^2 = n \cdot n \cdot (n+1) + n(n+1) / 2,$$

dont suit, avec de très simples passages connus par les Babyloniens, le schéma de calcul qu'ils ont utilisé sur la tablette en question.



Les résultats, que nous venons d'examiner, sont certainement remarquables et intéressants,

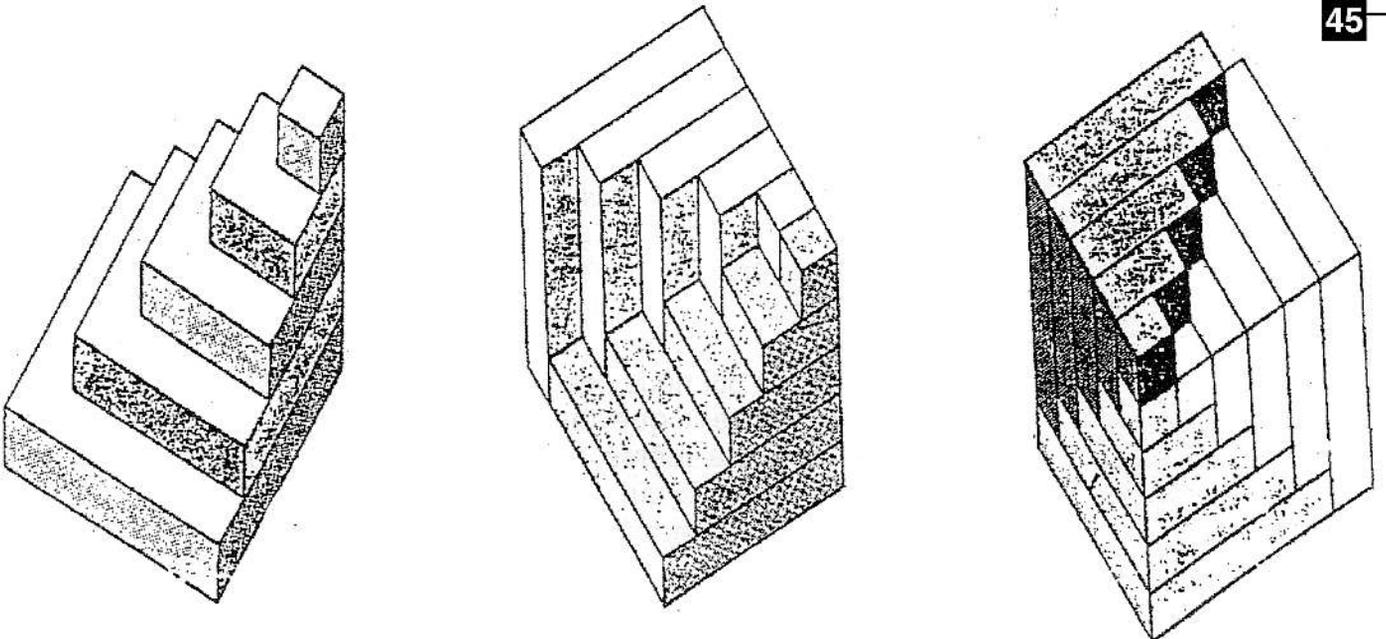


fig 8a, b, c

mais le domaine dans lequel la contribution des Babyloniens fut la plus originale et la plus féconde est celui du calcul algébrique.

### Le calcul algébrique

Le symbolisme algébrique, comme nous l'entendons, est totalement absent dans les textes cunéiformes qui nous sont parvenus. Les inconnues du problème sont indiquées par des termes tirés de la géométrie tels longueur (**us**), largeur (**sag**), aire (**a-sa**), volume (**sahar**).

Ces termes sont, cependant, utilisés de façon tout à fait abstraite ; en effet les Babyloniens additionnaient sans aucun scrupule aires et longueurs ou aires et volumes, ils ne se souciaient donc pas du sens géométrique.

Il ne faut pas se laisser détourner par la terminologie géométrique des problèmes parce que les procédés mentaux des Babyloniens étaient essentiellement algébriques et la géométrie n'avait qu'un rôle auxiliaire.

Les tablettes qui nous sont parvenues démontrent que les Babyloniens étaient à même de résoudre des problèmes qui, formulés de façon moderne, correspondent aux différentes sortes d'équations qui suivent :

- équations du premier degré,
- équations du second degré,
- certaines équations du troisième degré,

- équations de degré supérieur, mais qui peuvent être ramenées à celles du second ou du troisième degré.

Les solutions se réfèrent toujours à un cas particulier, on ne généralise jamais : les Babyloniens connaissaient plusieurs règles géniales d'algèbre, mais il n'y a aucune formule, aucun théorème, simplement des recettes de calcul.

Ils appliquaient aussi ce qu'on appelle les identités remarquables :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

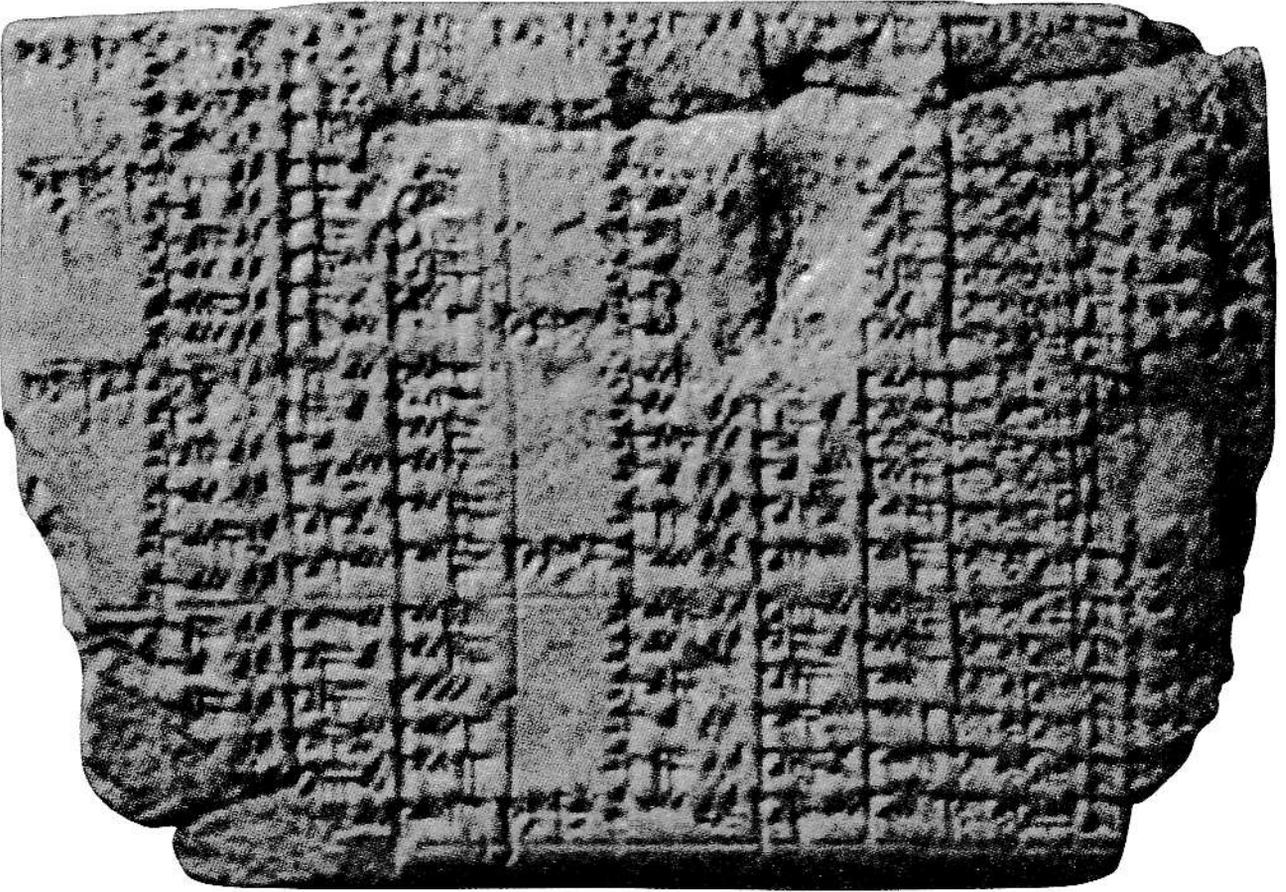
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

À partir de quelques exemples, voyons de plus près les techniques utilisées.

En particulier nous allons examiner la tablette BM 13901 (note a : Guillemot & Plane : l'algèbre au fil des âges. Irem de Toulouse. 1984) sur laquelle se trouvent 24 problèmes qui peuvent être classifiés, selon notre terminologie en trois groupes :

- étude de la méthode de résolution d'une équation du second degré à une inconnue (problèmes 1-7).

- étude de la méthode de résolution des systèmes de deux équations, où la valeur de la somme des carrés des deux inconnues figure dans la première et la somme (ou la différence ou un certain rapport ou le produit) des inconnues figure dans



la seconde (problèmes 8-14),

- exercices d'application de ces méthodes à des cas intéressants ayant un nombre quelconque d'inconnues (problèmes 15-24) (cf. Ibrah : Histoire universelle des chiffres. Ed. Seghers 1981 et note b)

Les deux premiers groupes nous fournissent un enseignement de base qui comprend deux méthodes fondamentales de résolution ; celle de la complétion du carré, dans le cas d'une seule équation, et celle de la demi-somme et la demi-différence des inconnues, dans le cas d'un système de deux

#### Note a

La tablette BM 13901 se trouve au British Museum, elle fut transcrite, traduite en français et commentée en 1936 par F. Thureau-Dangin. En 1937, O. Neugebauer en fit aussi une transcription, une traduction en allemand et un commentaire. Les deux auteurs s'accordent à dater cette tablette du début du 2<sup>e</sup> millénaire av.J.-C. environ.

#### Note 10

Nous préférons cette classification adoptée par M. Caveing, plutôt que celle de O. Neugebauer ou autres, car elle ne se fonde pas sur des critères de classement qui dérivent de la façon actuelle de raisonner, mais est cohérente avec la mentalité babylonienne.



équations.

**Analyse du Problème, BM 13901**

*J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 0; 45*

*Tu poseras 1, l'unité.*

*Tu fractionneras en deux 1 : 0; 30*

*Tu croiseras 0; 30 et 0; 30 : 0; 15*

*Tu ajouteras 0; 15 à 0; 45 : 1*

*Tu soustrairas 0; 30, que tu as croisé, de 1 : 0; 30, le côté du carré.*

L'équation du problème, formulée de façon moderne est :

$$x^2 + x = 3/4 \quad (= 0; 45)$$

Il s'agit donc de résoudre une équation du type :

$$ax^2 + bx = c \text{ avec } a, b, c > 0.$$

La méthode utilisée sur la tablette est celle de la complétion du carré, qui, étant dans ce cas  $a = b = 1$ , amène à :

$$x^2 + x + (1/2)^2 = c + (1/2)^2$$

Le scribe alors ne doit plus qu'extraire une racine carrée pour obtenir  $x + 1/2$  et effectuer une soustraction pour obtenir  $x$ .

Les instructions du texte amènent :

$$x = \sqrt{(0.30)^2 + 0;45} - 0;30 = 0;30$$

Ce qui équivaut donc à l'application de la formule

$$x = \sqrt{(1/2)^2 + c} - 1/2,$$

qui est notre formule pour la racine positive de l'équation.

À partir de ce texte, nous pouvons déduire que les Babyloniens devaient connaître l'identité

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

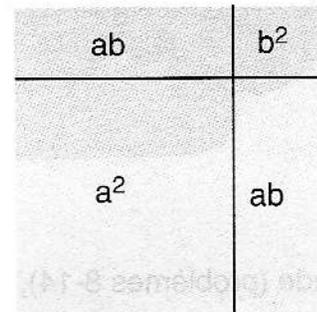
D'une manière analogue la résolution d'équation du type

$$x^2 + x = c$$

au moyen de la complétion du carré (Problème 2, BM 13901, par exemple), suppose la connaissance de l'autre identité :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

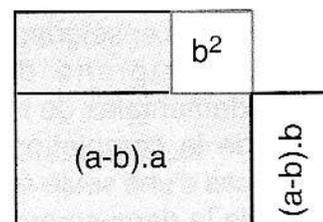
Nous ne savons pas comment ils ont pu obtenir ces identités. D'après van der Waerden, leur intuition fut facilitée par l'observation de diagrammes semblables à ceux qui se trouvent dans le second livre des Éléments d'Euclide :



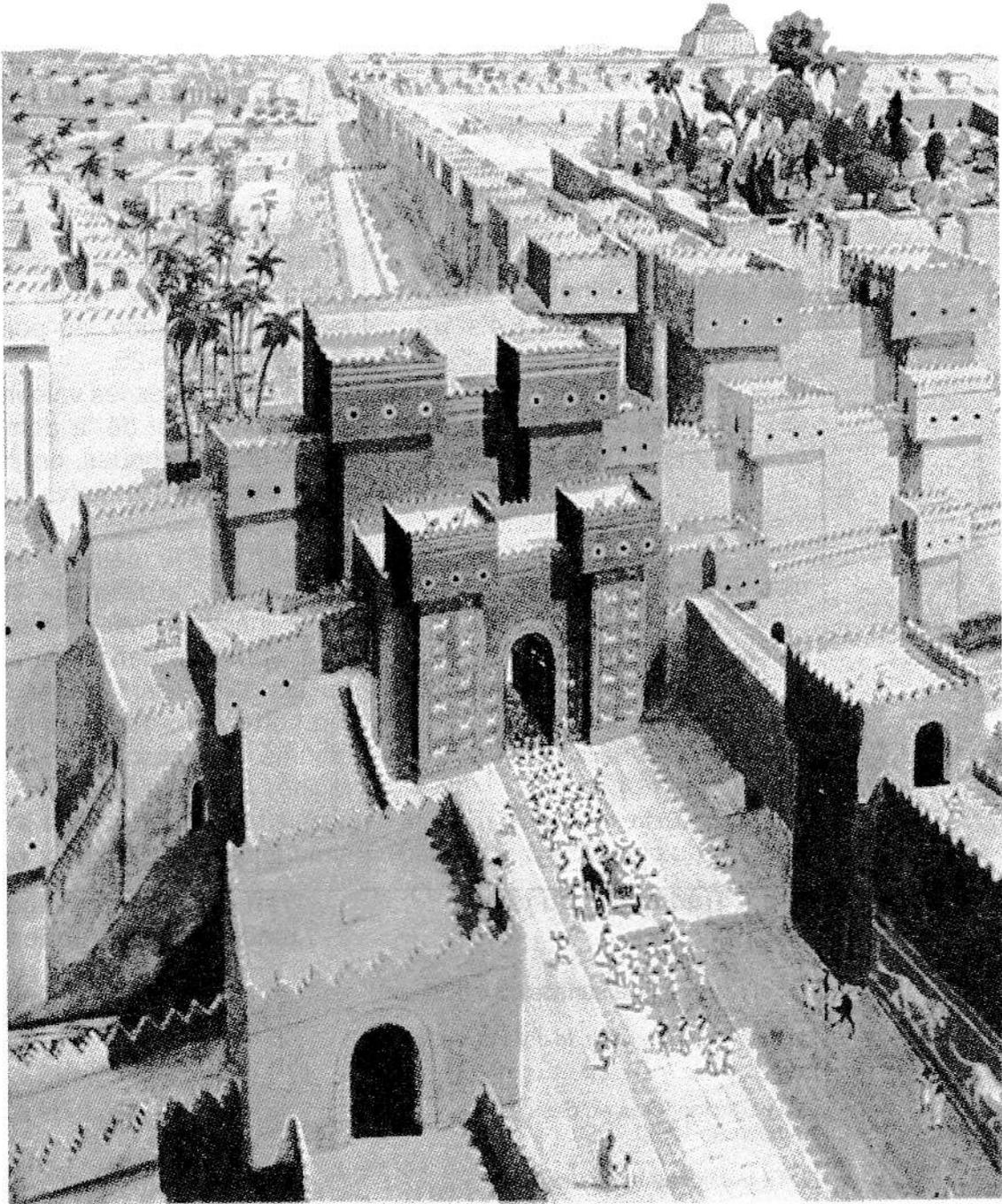
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Toutes les équations quadratiques abordées dans ce texte, sont du type suivant :

$$ax^2 \pm bx = c, \quad (a, b, c > 0)$$



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



et sont résolues avec un algorithme qui équivaut à l'application de notre formule qui donne les solutions de l'équation du second degré.

Les Babyloniens ignoraient les nombres négatifs et ne tenaient donc en considération que la racine positive de l'équation.

Mais il y a des problèmes, contenus dans d'autres tablettes, qui amènent à la résolution d'une équation quadratique du type :

$$x^2 + c = bx \quad (c, b > 0),$$

qui a deux racines positives, qui sont explicitées.

Les Tablettes de Suze datent de la fin de la Première Dynastie Babylonienne, c'est-à-dire aux environs de 1500 av. J.-C..

Le Problème III du texte IX des Tablettes de Suse, par exemple, demande la solution de l'équation

$$x^2 + 2,6 = 32;30 x$$

En notation décimale elle correspond à :

$$x^2 - 65x/2 + 126 = 0,$$

qui a pour solutions

$$x_1 = 28 \text{ et } x_2 = 18/4 = 4 + 1/2.$$

Le scribe résout cette équation par des passages équivalents à l'application de la formule suivante :

$$x = (32;30) / 2 \pm \sqrt{(32;30/2)^2 - 2,6}$$

c'est-à-dire :

$$x = 16;15 \pm 11;45.$$

Il écrit textuellement :

*Additionne 11;45 à 16;15*

*Tu trouves 28.*

*En second lieu soustrais-les :*

*16.45 - 11.45*

*Tu trouves : 4;30*

Analyse du problème 9, BM 13907

Pour résoudre le problème, le scribe utilise l'identité :

$$(x^2 + y^2)/2 = [(x+y)/2]^2 - [(x-y)/2]^2$$

Que l'on obtient de :

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Puisque le problème lui fournit les valeurs de  $x^2 + y^2$  et de  $x - y$ , en extrayant la racine, au point 6, il trouve  $(x+y)/2 = 25$ .

Une fois connues les valeurs de la demi-somme et de la demi-différence des inconnues, on peut en déduire ces dernières (voir points 8 et 9.).

Ce n'est pas la méthode de résolution arabe, qui détermine la valeur d'une inconnue par une équation et la substitue dans l'autre. Celle qui est utilisée par le scribe est une méthode dans laquelle la demi-somme et la demi-différence des racines jouent le rôle d'inconnues auxiliaires et permettent d'obtenir simultanément les deux racines.

### Traduction du texte

1. J'ai additionné la surface de mes deux carrés : 21,40.

Le côté de l'un excède le côté de l'autre de 10.

2. Tu fractionneras en deux 21,40 : tu inscriras 10,50.

3. Tu fractionneras en deux 70 : 5.

4. Tu croiseras 5 et 5 : 25

5. Tu soustrairas de 10,50 : 10,25.

6. C'est le carré de 25.

7. Tu inscriras 25 deux fois.

8. Tu ajouteras 5, que tu as croisé au premier 25 : 30, le côté du (premier) carré

9. Tu soustrairas 5 du second 25 : 20 le côté du second carré.

### Transcription en langage mathématique moderne

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1.300 (=21,40) \\ x - y = 10 \end{array} \right.$$

$$x - y = 10$$

$$(x^2 + y^2) / 2 = 650 (=10,50)$$

$$(x - y)/2 = 5, [(x - y)/2]^2 = 25$$

$$(x^2 + y^2)/2 - [(x-y)/2]^2 = 625 (=10,25)$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2)/2 - [(x-y)/2]^2} = 25$$

$$= (x + y)/2$$

$$(x + y)/2 + (x - y)/2 = 30 (= x)$$

$$(x + y)/2 - (x - y)/2 = 30 (= y)$$

Une autre caractéristique de l'algèbre babylonienne est la réduction en utilisant des moyens adéquats, d'un problème quadratique au problème suivant :

**"Trouver deux nombres dont on connaît la somme (ou la différence) et le produit, ce"**  
qui équivaut à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \cdot y = P \\ x + y = S \end{cases}$$

Par exemple, dans le Problème 1 du Prisme AO 8862 qui peut être formalisé comme suit :

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x \cdot y + (x - y) = 3,3. \end{cases}$$

Le scribe procède de la façon suivante : il additionne les deux équations  $x \cdot (y + 2) = 3,30$ , il opère comme s'il faisait la substitution  $y + 2 = y'$  et obtient le système :

$$\begin{cases} x \cdot y' = 3,30 \\ x + y' = 29 \end{cases}$$

Il procède ensuite à la résolution par la méthode de la demi-somme et de la demi-différence des racines. Le schéma de résolution peut être traduit par la formule suivante :

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \left| = (x + y')/2 \pm \sqrt{(x/2 + y'/2)^2 - xy'} \right.$$

qui utilise l'identité :

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4 ab;$$

on a donc sous le radical :

$$(x/2 - y'/2)^2,$$

c'est-à-dire le carré de la demi-somme et de la demi-différence des inconnues.

La présence de nombreux exemples de ce genre nous conduit à penser que, pour résoudre les problèmes quadratiques plus complexes, les Babyloniens ramenaient ces derniers à cette forme qui, nous venons de le voir, était pour ainsi dire, une forme normale.

### Conclusion

C'est, sans aucun doute, à l'algèbre que les Babyloniens apportèrent leur contribution la plus considérable et la plus originale. Et, suite aux exemples que nous avons examinés, nous pouvons affirmer comme O. Neugebauer que :

*"Nier à l'algèbre babylonienne l'emploi d'une formule générale serait essentiellement faux !*

*Les séries de problèmes étroitement liés et les règles générales qui accompagnent la solution numérique constituent, en fait, un instrument qui est très proche d'une opération purement algébrique."*

Par rapport aux composantes algébrique et numérique de la mathématique babylonienne, le rôle de la géométrie n'est pas très important. Les Babyloniens savaient calculer l'aire du carré, du rectangle et du triangle rectangle.

Ils connaissaient, au moins du point de vue arithmétique, le théorème de Pythagore (voir § 4).

Ils connaissaient aussi le triangle équilatéral, l'hexagone, les polygones réguliers et savaient qu'on peut les inscrire dans un cercle. Quant au rapport entre la circonfé-

rence et le diamètre, ce qu'aujourd'hui nous appelons  $\pi$ , ils utilisaient en général, pour des usages pratiques, la valeur approximative 3, mais ils connaissaient aussi une approximation meilleure, c'est-à-dire 3 ; 7,30 qui correspond, en notation décimale, à 3,125.

Les Babyloniens savaient aussi calculer correctement le volume de certains solides, des autres ils ne connaissaient que des formules approximatives.

Par contre, la géométrie comme science démonstrative ainsi que les notions abstraites, sont totalement absentes du moins dans l'état actuel des données que nous possédons.

Il y a encore sûrement beaucoup de tablettes à découvrir et il y en a de nombreuses dans les Musées d'Europe qui n'ont pas encore été étudiées. D'après nos connaissances actuelles nous pouvons, en suivant M. Caveing, décrire

les caractères généraux des mathématiques babyloniennes comme suit :

*"La distinction que nous faisons depuis les Grecs n'est pas faite à Babylone. Même les distinctions que nous venons de voir vont un peu au-delà des textes. Dans les textes, le scribe fait flèche de tout bois. Il combine des nombres, des procédures algébriques et des données géométriques ; il combine des propriétés qu'il connaît ; il ne les explicite pas. Il donne la marche à suivre à son élève sur des exemples ; la répétition des exemples doit inscrire dans l'esprit de l'élève la marche à suivre. On a des codes, on n'a pas une théorie. Ce qu'on peut dire, c'est que, dans l'usage des codes, il y a un élément de gratuité qui apparaît à certains moments, un élément qu'on pourrait appeler ludique, ou l'on se complique la tâche un peu par plaisir, et peut-être aussi pour le plaisir qu'il y a à discuter entre initiés de choses qu'on est seuls à comprendre !"* (Parrot : Sumer. Gallimard)

