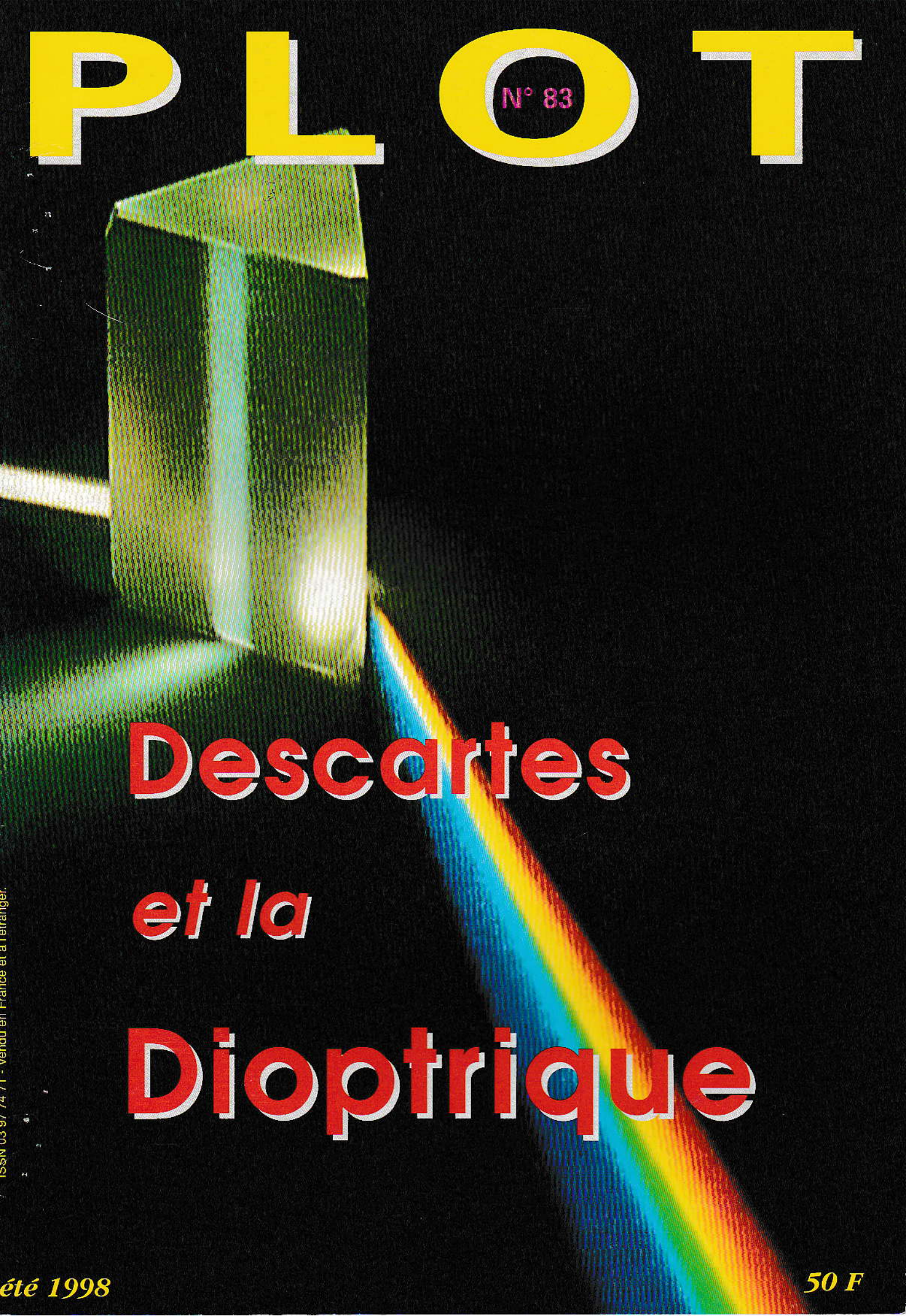


PLOT



N° 83

Descartes *et la* Dioptrique

été 1998

50 F

ISSN 03 97 74 71 - vendu en France et à l'étranger.

Le Plot a 25 ans !

Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Responsable de rédaction
Michel Darche

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk
Daniel Boutté
Michel Clinard
Gérard Chauvat
Roger Crépin
Luce Dossat
Georges Le Nezet
Serge Parpay
Michel Soufflet
Raymond Torrent

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement
150 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 130 F
Abonnement étranger : 150 F
+ tarif avion

Photocomposition et maquette
i.c.e.- Limoges

Impression
Fabrègue - St-Yrieix

Editeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers, Limoges,
Orléans - Tours, Nantes, Rennes,
Rouen, Toulouse, Brest, Caen,
Clermont-Ferrand et La Réunion

Diffusion
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du Ministère de la Coopération et de la Francophonie

SOMMAIRE

1 - Un p'tit bout d'allumath !!! (n°2 et 3)	
Les allumés des maths	02
2 - Descartes, inventeur de machines	
Yves Lemaître - Tours	04
3 - Florimont de Beaune	
Jacques Dubois - Tours	10
4 - Grandeurs et mesures	
Claude Janvier - Montréal	25
5 - Commandes - Abonnements	39-40

EDITORIAL

L'année 1998 aura été l'année du football, mais elle aura été aussi une année stratégique dans la réflexion des horaires des élèves (et des enseignants) mais aussi et surtout des programmes scolaires.

Transdisciplinarité, pluridisciplinarité, culture pour tous et, en particulier, culture scientifique, et donc culture mathématique. Pour amorcer tout cela au mieux, quelle formation pour les enseignants ? formation initiale comme formation continue ?

Les CCSTI, centres régionaux de développement de la culture scientifique, technique et industrielle, mettent pour cela à disposition des jeunes et des adultes (et des enseignants) des outils variés.

L'Académie de Rouen et son CCSTI, Science-Action, celle de Franche-Comté et son CCSTI, le Palais des Sciences, ont acquis un exemplaire de l'exposition "Maths 2000" réalisée par Centre-Sciences et la cité des Sciences de La Villette avec le concours de l'Apmep et de l'Irem d'Orléans-Tours.

D'autres «petites expositions» interactives sont en cours de réalisation par Centre-Sciences : "jeux et stratégies", "les hasards de la vie" ; elles seront présentées pour la 1ère fois à Pau en décembre 98.

De nouveaux outils pour voir comment évoluent les sciences et les mathématiques. D'autres encore circulent en Afrique francophone : Jeux africains, de l'œil au cerveau, Pythagore, Jeux logiques et maths...

Que faire avec un triangle ?

Un p'tit bout d'allumaths

Une nouvelle
rubrique du Plot:
"un p'tit bout
d'allumaths"
avec les allumés
des maths.
Aujourd'hui, deux
p'tits bouts pour
élèves de 3ème et
2de,
ici et
page 27.

Cette nouvelle rubrique vise à faire réfléchir le lecteur et le faire raisonner ... mathématiquement. Réalisée par un groupe d'enseignants et d'IPR de l'académie de Poitiers, les allumaths, elle propose dans chaque numéro, une idée ou une situation de recherche neuve ou peu connue, simple, utile pour les classes du secondaire.

ABC est un triangle

A partir de ce triangle, on construit les 3 rectangles ayant un côté commun avec ce triangle et dont la droite support du côté opposé passe par le troisième sommet du triangle.
A vous d'inventer les questions

qui vont avec cette situation-problème.
Après, vous pourrez lire la suite.

Prenez de la hauteur !

Quelques idées de réponses.

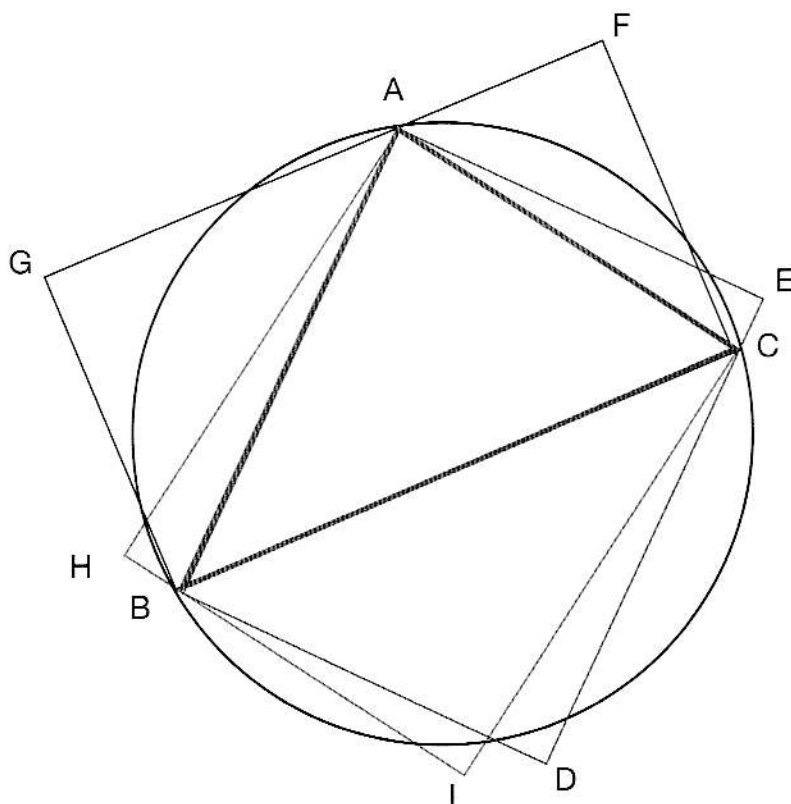
Considérons 3 rectangles :

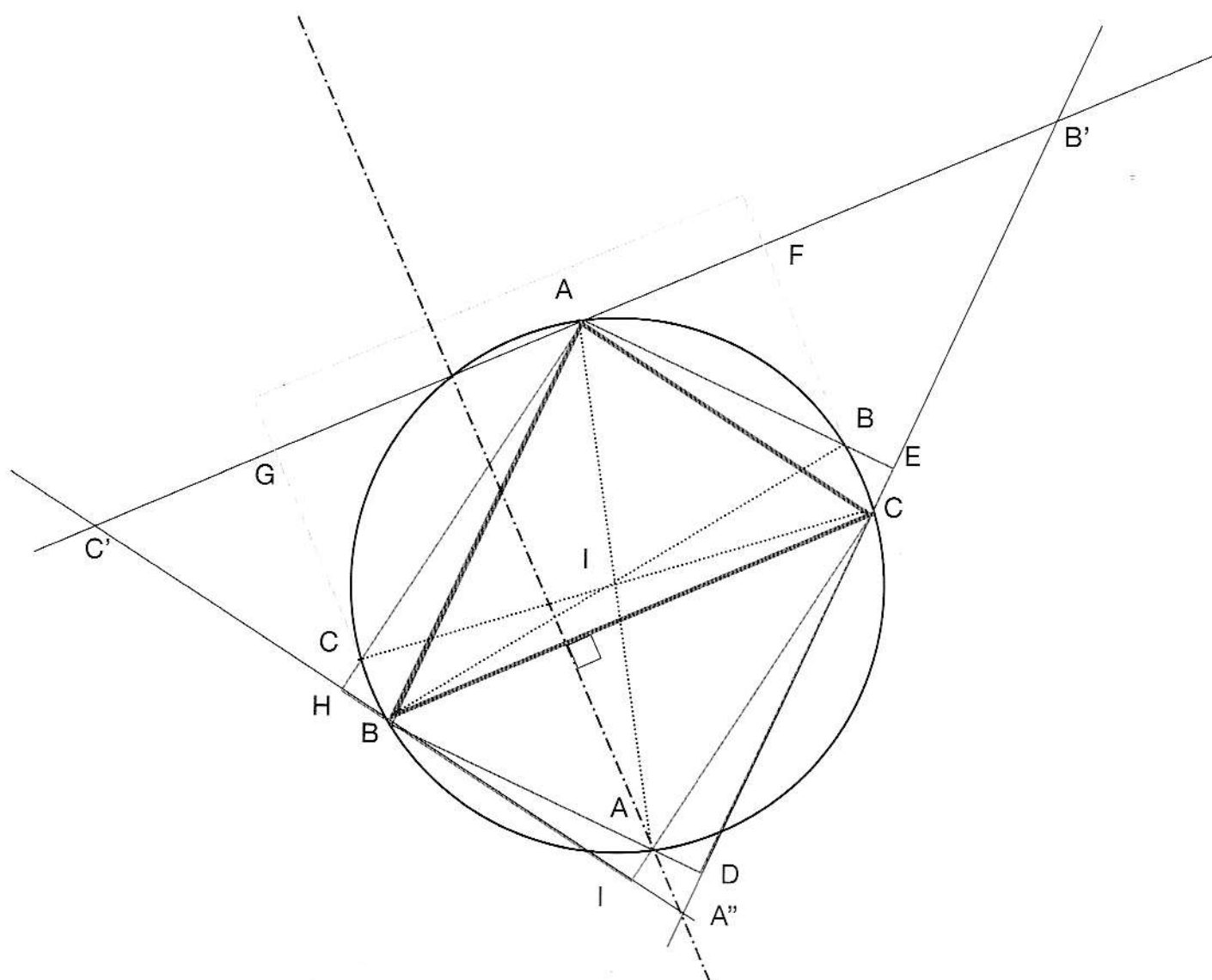
- ABDE tel que $C \in (DE)$,
- BCFG tel que $A \in (FG)$,
- CAHI tel que $B \in (HI)$.

1- Ces trois rectangles ont même aire, le double de celle du triangle ABC.

2 - Les droites (BD) et (CI) se coupent en A' . Le triangle ABA' est rectangle en B et le triangle ACA' est rectangle en C, donc A' est le point diamétralement opposé à A sur le cercle (ABC).

- Les droites (CF) et (AE) se coupent en B' .





Le triangle BCB' est rectangle en C et le triangle BAB' est rectangle en C , donc B' est le point diamétralement opposé à B sur le cercle (ABC) .

- Les droites (AH) et (BG) se coupent en C' .
Le triangle CAC' est rectangle en A et le triangle CBC' est rectangle en B , donc C' est le point diamétralement opposé à C sur le cercle (ABC) .

3 - Si I est le centre du cercle (ABC) alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont symétriques par rapport à I .

4 - La hauteur du triangle $A'B'C'$ relative à A' passe par :

- l'intersection de (FG) avec le cercle (ABC) (autre que A),

- l'intersection A'' de (DE) et (HI) .

• La hauteur du triangle $A'B'C'$ relative à B'

passe par :

- l'intersection de (HI) avec le cercle (ABC) (autre que B),

- l'intersection B'' de (FG) et (DE) .

• La hauteur du triangle $A'B'C'$ relative à C' passe par :

- l'intersection de (DE) avec le cercle (ABC) (autre que C),

- l'intersection C'' de (FG) et (HI) .

5 - ABC est le triangle des milieux de $A''B''C''$.
Le cercle (ABC) est le cercle d'Euler du triangle $A''B''C''$.

6 - $A''B''C''$ et $A'B'C'$ ont mêmes hauteurs. Ils sont homothétiques dans une homothétie de centre leur orthocentre commun et de rapport $1/2$ (ou 2).

7 - Les triangles ABC , $A'B'C'$ et $A''B''C''$ ont même droite d'Euler.

N.B. : on retrouve par une approche réciproque, les 3 rectangles inscrits dans le cercle d'Euler d'un triangle (rectangles dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrangle orthocentrique lié au triangle).

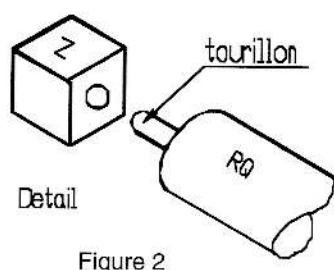


Figure 2

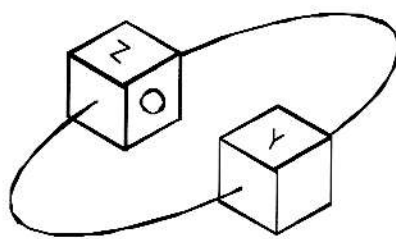


Figure 3

Dans le dessin précédent les deux parallélépipèdes ne sont pas maintenus en contact avec le cylindre QR. Descartes y a pensé après avoir décrit sa machine, et il a proposé dans une lettre peut-être adressée à Florimond de Beaune de les relier par deux anses permettant de les mouvoir (figure 3) et de les maintenir en position l'un par rapport à l'autre. (lettre écrite en 1638 citée page 453 de sa correspondance AT Tome II).

La réalisation pratique est-elle possible ?

1. Un peu de géométrie...

Descartes, s'adressant à ses différents correspondants, puis dans la *Dioptrique*, a donné sans explication les constructions géométriques des éléments de sa machine.

Tout d'abord une hyperbole, laquelle? pour en faire quoi?

L'hyperbole est déterminée par les lois de l'optique (cf. l'étude de J. DUBOIS). Cette hyperbole conçue comme section plane d'un cône de révolution, dans le cas particulier où le plan est parallèle à l'axe du cône sera celle cherchée si l'axe du cône, le plan, et l'angle que fait la génératrice du cône avec son axe de révolution sont connus.

En utilisant des notations différentes de celles de Descartes, mais faciles à rapprocher de sa figure on remarque les propriétés suivantes (figure 4).

La figure 4 représente en vue de face la coupe par un plan passant par l'axe du cône, de ce cône (C) et du plan (P) parallèle à l'axe yy' . Deux sphères tangentes au cône et au plan sont désignées par (Sp1) et (Sp2). En vue par un observateur placé à droite du cône, on voit l'hyperbole inter-

section du cône et du plan.

L'hyperbole a pour sommets S1 et S2 et elle a pour foyers F1 et F2. Ces foyers sont, d'après le théorème de Dandelin, les points de tangence des sphères (Sp1) et (Sp2) avec le plan (P). L'ensemble de la figure 4 admet IH perpendiculaire à l'image de (P) comme axe de symétrie.

Dans le plan de la figure 4 on a $S_1K_2 = S_1F_2$ et $S_1K_1 = S_1F_1$ car ce sont des tangentes issues d'un point à un cercle, et, par symétrie:

$$S_1K_2 = S_2F_2 \text{ et } IK_1 = IK_2$$

$$\text{Or } S_1K_2 = S_1K_1 + K_1K_2$$

$$S_1F_2 = S_1S_2 + S_2F_2$$

soit en retranchant membre à membre

$$0 = K_1K_2 - S_1S_2$$

$$\text{d'où } K_1K_2 = S_1S_2 = 2a$$

En utilisant les symétries

$$IK_1 = HS_1 = a$$

$$IS_1 = IK_1 + K_1S_1$$

$$\text{d'où } IS_1 = HS_1 + S_1F_1 \text{ et } IS_1 = c$$

Pythagore nous dit alors :

$$IH^2 = IS_1^2 - HS_1^2 \text{ ou } b^2 = c^2 - a^2$$

d'où $IH = b$ où a, b, c sont les paramètres de l'hyperbole.

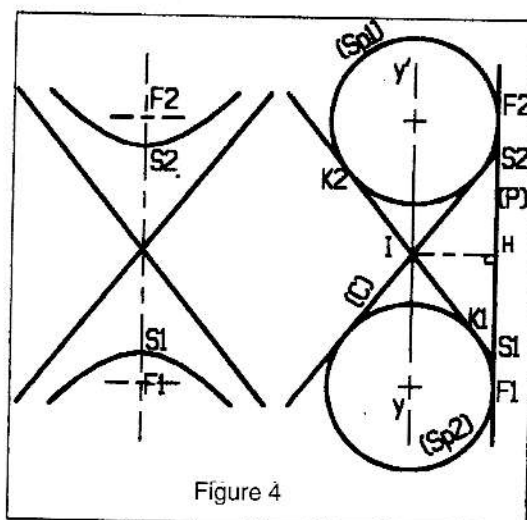


Figure 4

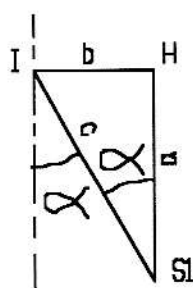


Figure 5

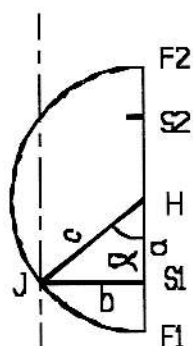


Figure 6

On a alors (figure 5) $\cos \alpha = a/c$ ce qui justifie la construction de l'angle α et de la position de l'axe du cône par rapport au plan (P) d'intersection (figure 6).

Cette construction est citée par J. DUBOIS dans son étude de la correspondance de Florimond de Beaune.

Mais Descartes ne justifie pas en particulier la position de l'axe qu'il donne.

Que veut faire Descartes de cette hyperbole?

Il veut réaliser une surface de révolution engendrée par l'hyperbole dont le plan, passant par l'axe de révolution, tourne autour de celui-ci. L'axe est parallèle ou confondu avec l'axe de symétrie de l'hyperbole ne la traversant pas. Si l'axe de révolution est l'axe de symétrie de l'hyperbole la surface est un hyperboloïde de révolution, sinon la surface est plus compliquée. Descartes ne semble pas avoir bien distingué ces deux cas.

L'hyperboloïde (figure 7) est une surface du second degré. Dans le cas de figure l'hyperbole méridienne contenue dans le plan xOy a pour équation:

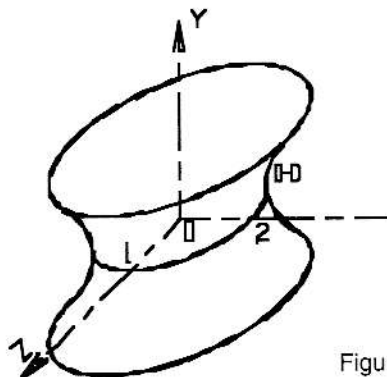


Figure 7

$$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0$$

L'hyperboloïde a pour équation dans ce cas:

$$(x^2 / a^2) + (z^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0$$

Descartes livre "son plus grand secret" (cf. article de J.DUBOIS) dans sa correspondance avec Ferrier.

Il n'a pas repris cette construction dans la Dioptrique. Le but de cette construction était de trouver le profil d'une lame inclinée par rapport au plan méridien du solide de révolution.

Ce secret en restera un, car aucune explication ne le justifie.

Il aurait pu utiliser les propriétés suivantes:

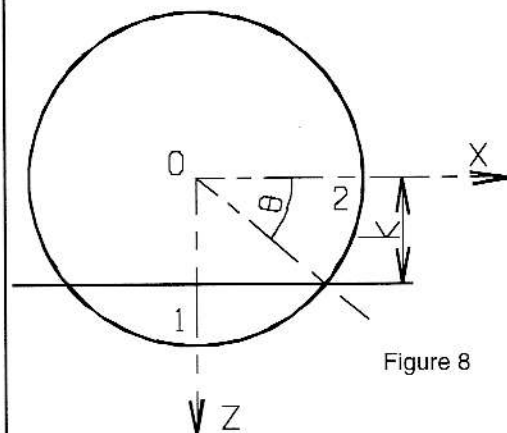


Figure 8

Considérons la figure 8 qui est la section de l'hyperboloïde précédent par le plan xOz , donc suivant son cercle de gorge, coupons cet hyperboloïde par le plan $z = k$ ($k < a$).

L'inclinaison de ce plan par rapport au plan méridien passant par son intersection avec le cercle est θ ; on a donc $\sin \theta = k / a$.

La courbe d'intersection de l'hyperboloïde avec le plan est définie par:

$$\begin{cases} (x^2 / a^2) + (z^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0 \\ z = k \end{cases}$$

Soit en projetant cette courbe sur xOy parallèle à $z = k$ on obtient:

$$(x^2 / a^2) + (k^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0$$

soit:

$$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - [1 - (k^2 / a^2)] = 0$$

$$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - (1 - \sin^2 \theta) = 0$$

$$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - (\cos^2 \theta) = 0$$

$$(x^2 / a^2 \cos^2 \theta) - (y^2 / b^2 \cos^2 \theta) - 1 = 0$$

C'est une hyperbole déduite de la génératrice en multipliant les paramètres de celle-ci par $\cos \theta$, d'où la construction figure 9.

L'angle du cône n'a pas été changé mais le plan d'intersection a été rapproché. On pourrait donc obtenir l'hyperboloïde en faisant tourner autour de son axe de révolution une lame inclinée de θ sur le plan méridien et taillée par la machine de Descartes sans changer l'angle du cône mais en rapprochant les plans de guidage du cylindre QR de l'axe de révolution du cône. Et un plus grand secret serait utilisable, secret que Descartes ne connaissait sans doute pas:

Si le plan de section de l'hyperboloïde est placé à distance $k = a$ on a alors $k/a = 1$, et l'équation

$$(x^2/a^2) + (k^2/a^2) - (y^2/b^2) - 1 = 0$$

devient: $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 0$

ou encore: $(x/a - y/b) (x/a + y/b) = 0$

Equation de 2 droites en projection sur xOy

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

L'hyperboloïde est donc une surface réglée qui pourrait être engendrée par un outil droit dont le tranchant est l'une de ces droites. Voilà qui simplifierait la génération de la roue concave.

Pour les roues convexes la surface est plus compliquée; elle serait mieux décrite par la méridienne (figure 10).

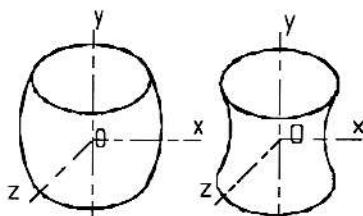


Figure 10

Il en est de même si l'axe de révolution n'est pas celui de l'hyperbole bien que la roue soit concave.

2. De la technologie...

Comment réalise-t-on une surface sur un solide?

Descartes a envisagé sur sa machine les trois types d'outil que nous allons définir. Il a hésité entre plusieurs choix et, après ses échanges de lettres, avec Ferrier en particulier, il a décrit la machine représentée dans la Dioptrique et reproduite en page 4.

Outil de forme

L'arête de cet outil est une ligne dont le déplacement (figure 12) engendre la surface à définir, ici une arête droite engendre un cylindre de révolution. Pour engendrer une surface ayant une hyperbole comme

méridienne, il suffit que l'arête soit une hyperbole. Cet outil qui demande une grande puissance à la machine travaille comme un buteur (bulldozer).

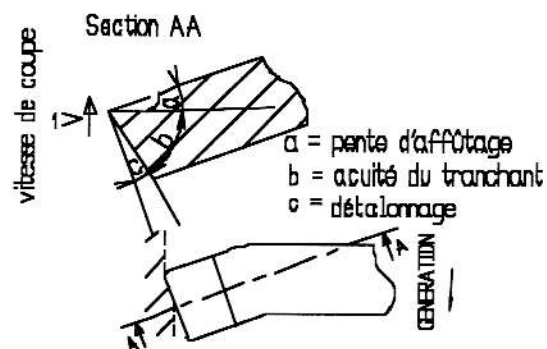
Outil de génération

Il se déplace suivant la ligne génératrice de la surface. Cette génératrice se déplace en même temps pour réaliser la surface.

On obtient une surface approchée car des sillons subsistent. Cet outil travaille à la façon d'une charrue qui engendrerait la surface du champ à labourer sillon après sillon (figures 13 et 14). C'est un outil de ce type que Descartes a situé au contact de la roue d de sa machine.

Outil meule

Figure 13



A l'origine cet outil de révolution était en pierre naturelle. Les outils modernes sont composés d'une multitude de petits grains, outils agglomérés dans un liant assez tendre. Ces grains usent la surface à rectifier, puis ils sont arrachés de la meule après usure et le liant est pulvérisé pour faire apparaître de nouveaux grains. La meule a pour génératrice la ligne qu'elle use sur la pièce à réaliser, et, elle se déplace pour engendrer la surface cherchée (figure 15). Pendant ce travail la meule change de géométrie, il faut donc la régénérer. Pour cela

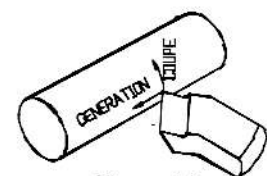


Figure 14

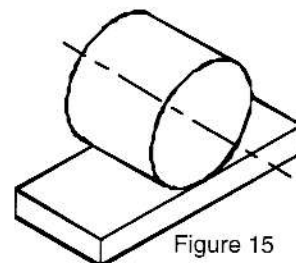


Figure 15

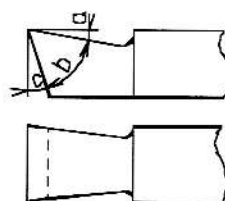


Figure 11

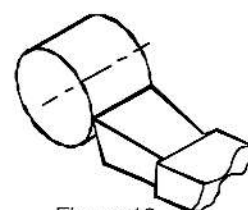


Figure 12

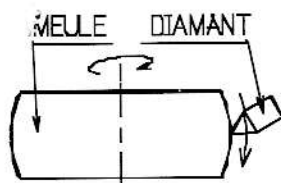


Figure 16

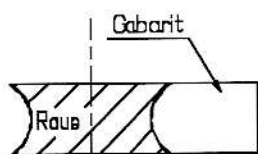


Figure 17

on utilise un outil qui sur les machines modernes est un diamant qui refait le profil de cette meule (figure 16).

Rodage

Deux solides sont en frottement l'un sur l'autre et une pâte abrasive est entraînée entre les deux surfaces qui s'usent et prennent des formes complémentaires. C'est cette solution dérivée de la meule qui est préconisée par Descartes sur sa machine pour rectifier le verre. La roue d dure enduite de pâte abrasive tourne devant le verre à tailler, elle doit être régénérée par l'outil situé à gauche du cylindre QR qui suit une hyperbole.

La vérification du profil est faite à l'aide des lames taillées à la partie droite de la machine (voir figure 1). Cette lame est un gabarit en forme d'hyperbole (figure 17).

La vitesse de l'outil

Elle ne peut pas être quelconque, en particulier une vitesse nulle ou voisine de zéro ne permet pas la coupe. Donc une surface de révolution au voisinage de son axe n'est pas réalisée car il n'y a pas coupe (figure 18) d'où la formation d'un « tétou ».

Descartes y a pensé et il propose une roue tournant autour d'un axe orthogonal à l'axe de rotation du verre à réaliser. Sur l'axe 2 (figure 19) la vitesse relative des deux solides au contact est la vitesse périphérique de la meule ce qui supprime le « tétou » (la Dioptrique pages 148 et 149).

La géométrie de la roue

Dans le cas de la fabrication de la surface convexe d'un verre (à double courbure) la roue est concave, il n'y a pas de problème particulier car en coupe par le plan xOy (section AA figure 19) les surfaces sont de part et d'autre de leur plan tangent commun.

Dans le cas de la surface concave d'un verre (figure 20) la roue est convexe et il y a un problème car la section AA montre que la roue au voisinage du point de contact doit être à l'intérieur du cercle osculateur à l'hyperbole.

Descartes s'en est aperçu et il a donné une directive générale en disant (la Dioptrique page 149 et 150) que la roue soit telle que « sa circonférence ne passe point au dessus de la ligne 1.2. de la même machine » sans autre précision.

La géométrie de la lame

La machine de Descartes doit découper des lames (figure 21) dans sa partie droite. Pour le faire, l'outil quel qu'il soit ne peut couper que dans un sens de déplacement, et, Descartes a vu que les angles de travail ne seront pas bien respectés. Il préconise l'usinage de la lame en deux phases avec retournement de l'outil, peut-être pour que les efforts soient mieux dirigés (la Dioptrique pages 147 et 148).

Le procédé d'obtention de la roue

Descartes préconise trois phases dans la fabrication de la roue d.

- Approche grossière à la lime.
- Utilisation d'une des lames précédentes comme outil pour améliorer la surface (outil de forme).
- Utilisation de la partie gauche de la machine (outil de génération) pour finir et rectifier en permanence le profil de la roue. Il pense ainsi affiner la surface, or l'outil de forme est plus régulier que l'outil de génération. Il aurait été souhaitable qu'il agisse en dernier, mais dans ce cas il devrait être incliné par rapport au plan horizontal méridien de la roue, et le profil de la lame devrait être différent comme nous l'avons vu dans l'étude de la génération d'un hyperboloïde,

ROTATION D'AXE YY
CHAMP DES VITESSES

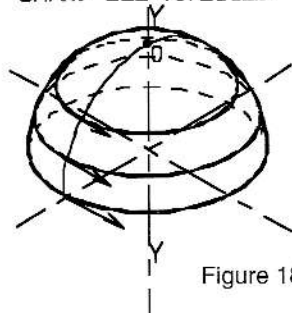


Figure 18

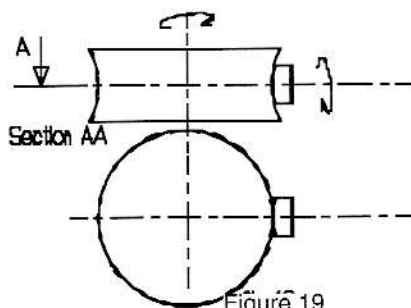


Figure 19

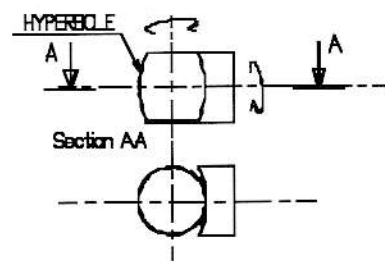


Figure 20

mais la machine ne serait pas celle préconisée par Descartes.

3. Beaucoup d'incertitudes...:

La qualité géométrique des assemblages

Elle est toujours soumise à des erreurs de réalisation qui peuvent être réduites par un travail de retouche très précis.

Les jeux de fonctionnement

Ils sont indispensables et doivent être d'autant plus grands que les surfaces seront moins précises (figure 22), or ces jeux rendent aléatoire la position des objets guidés. Par exemple le cylindre QR par rapport à la règle KL ou bien l'axe du cône générateur par rapport au bâti (figure 23).

L'usure des outils

L'usure des outils et des parties frottantes rendent les erreurs variables.

Les efforts

La tige KL dans son passage à travers le cylindre QR doit coulisser comme un tiroir dans sa glissière. Un risque sévère d'arc-boutement existe dans ce déplacement qui est incliné par rapport à l'axe du cylindre QR.

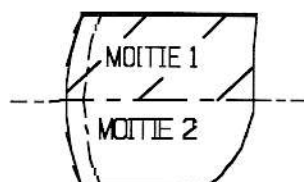
La machine peut-elle fonctionner ?

Dans la version proposée par Descartes (voir page 4) il y a beaucoup de chance pour qu'elle ne marche pas de façon satisfaisante.

On ne sait pas si elle a été utilisée et à notre connaissance aucun exemplaire n'en a été retrouvé. Si cela avait été le cas on aurait pu expérimenter la machine en utilisant les sources d'énergie de l'époque. Descartes a peut être eu quelques doutes car dans une lettre écrite en 1638 à un correspondant dont on pense que c'est Florimond de Beaune il propose un autre procédé qui utiliserait une roue creuse en forme d'auge à profil hyperbolique et d'axe de rotation vertical, dans laquelle une petite roue supportant le verre à tailler tournerait sur elle même en tournant autour de l'axe de la grande roue, l'ensemble étant entraîné par un train épicycloïdal.

Une telle machine poserait de nou-

veaux problèmes. En particulier dans la précision de taillage des roues dentées, et dans le rattrapage de jeu des engrenages qui serait indispensable. □



Vue de dessus

Figure 21

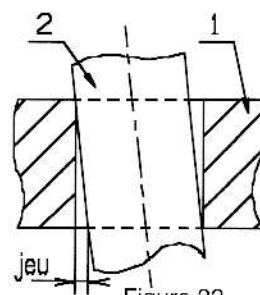


Figure 22

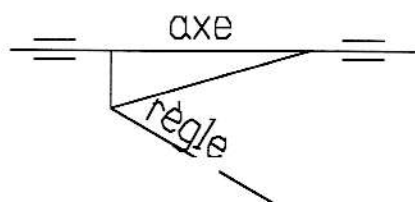
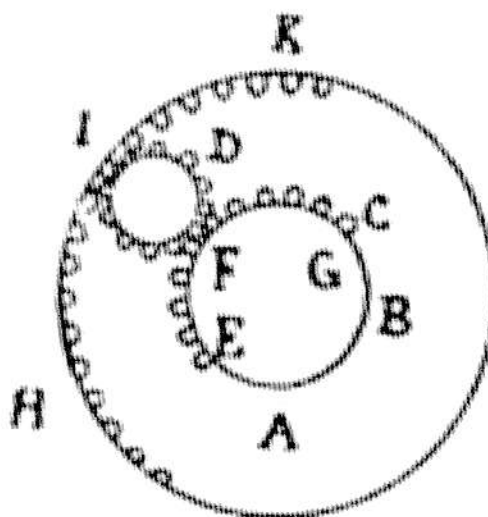


Figure 23



Florimond de Beaune (1601-1652)

Correspondance scientifique

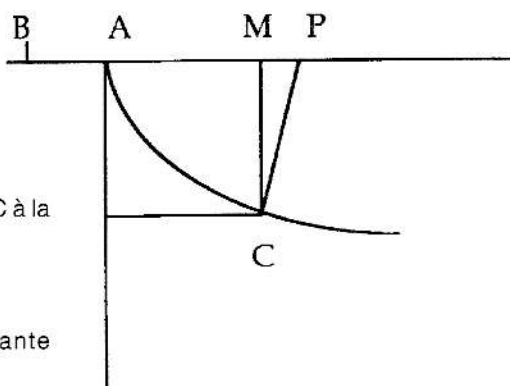
Jacques DUBOIS. Tours

N

ous avons présenté brièvement dans le numéro spécial "Descartes" de Plot (Été 1996) l'œuvre scientifique de Florimond de Beaune. Nous nous proposons ici de revenir plus en détail sur sa correspondance avec René Descartes, Mersenne et Roberval.

Les problèmes de Florimond de Beaune

Premier problème : Rappelons que la première ligne est telle que ⁽¹⁾ :



AB = b donné
AM = x
MC = y
PC = s, normale en C à la courbe
AP = v

b étant une constante

$$\frac{b+y}{y} = \frac{v}{x}$$

C'est à dire $y^2 = xy + bx$. C'est une hyperbole, mais de Beaune ne le verra pas tout de suite ! Il veut trouver la tangente en chaque point.

En fait, dans une première lettre à Mersenne du 25 septembre 1638 ⁽²⁾, il nous apprend que Beaugrand a résolu le problème : ce dernier donnera sa solution dans une missive contre la géométrie de Descartes envoyée en 1640, mais comme il utilise la méthode de Fermat pour la construction de la tangente, de Beaune, qui ignore encore ce procédé, n'est pas satisfait de la réponse... Il indique simplement sa recherche par la méthode de Descartes dans un calcul concernant l'équation aux coefficients indéterminés, à comparer à l'équation de la courbe.

On apprend aussi dans une lettre de F. de Beaune du 16 octobre à Roberval ⁽³⁾

que ce dernier a trouvé la solution, mais n'a pas reconnu l'hyperbole, pas plus que de Beaune.

Ce n'est qu'après une lettre de Descartes du 11 octobre 1638 que Florimond, détrompé, va s'en sortir ! Malheureusement cette lettre du 11 octobre est perdue : elle était jointe à la lettre à Mersenne de la même date ⁽⁴⁾, celle dont le début est très célèbre, contenant le jugement de Descartes sur Galilée et son œuvre : *"Je trouve en général qu'il philosophe beaucoup mieux que le vulgaire ... mais il me semble qu'il manque beaucoup en ce qu'il fait continuellement des digressions et ne s'arrête point à expliquer tout à fait une matière ..."*

Toujours est-il que le 13 novembre, de Beaune est en mesure d'envoyer à Mersenne la démonstration prouvant que sa première ligne est une hyperbole :

Il veut montrer que si on a la relation de définition de la courbe et que l'on fait passer par un point courant une certaine hyperbole, elle se confond avec la courbe ...

En réalité, utilisant la terminologie de Descartes (qui est encore celle des coniques d'Apollonius !) dans la résolution du problème de Pappus à 4 droites présentée dans la livre II de la Géométrie, il propose une hyperbole dont les caractéristiques sont tirées de l'équation $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$ de sa courbe, et la démonstration n'en est pas une ...

F. de Beaune sera plus rigoureux dans ses Notes brèves, dont Descartes accusera la réception le 20 février 1639. Dans l'observation seconde ⁽⁵⁾, de Beaune commence par faire remarquer que dans le cas "où il n'y a pas de m" dans l'équation des coniques du problème de Pappus, la figure de Descartes ne convient pas, et il propose en exemple l'équation de sa 1ère ligne :

$$y^2 = xy + xb \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \sqrt{xb + \frac{1}{4}x^2}$$

C'est une hyperbole, annonce-t-il, car le coefficient de x^2 est positif. Il nous dit ensuite qu'il va construire l'hyperbole par

points, puis il détermine ses caractéristiques (sommets, "côté droit", "côté traversant"...)

Cette mise au point sera d'ailleurs acceptée par Descartes en complément de sa Géométrie, à condition d'y changer un point de détail concernant l'axe de l'hyperbole.

Un peu plus loin dans les Notes brèves, sur "l'invention pour trouver les contingentes des lignes courbes", de Beaune reprend le même exemple de sa première ligne, mais cette fois construit la tangente ⁽⁶⁾. Il commence par reprocher à Descartes de n'avoir donné que des exemples convenant pour l'optique, en vue de la construction des "verres brûlants", c'est à dire des lentilles...

Puis il coupe la courbe $y^2 = xy + xb$ d'abord par une droite, comme Fermat, pour trouver la tangente. L'ennui est qu'il ne donne pas de figure ! Ensuite, il compare avec la méthode de Descartes, qui est plus longue, pour trouver la normale en coupant la courbe par un cercle.

J'ai déjà dit combien ces Notes brèves avaient été appréciées par Descartes pour compléter sa Géométrie : elles seront d'ailleurs annexées aux éditions latines de cette Géométrie, en 1649 et 1659.

Deuxième problème : Rappelons son énoncé :

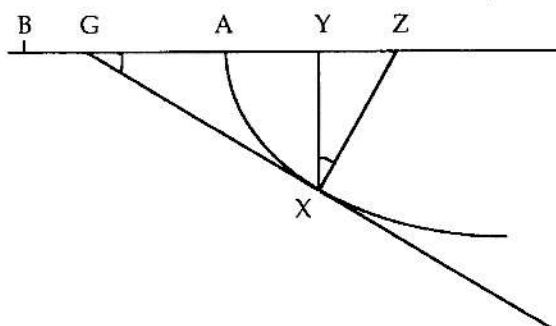
XZ est la normale en X

GX la tangente

AB = b donné

YX = x AY = y

On suppose que la courbe passe par A.



On veut que $\frac{ZY}{YX} = \frac{b}{YX - AY}$

Connaissant une propriété de la tangente en chaque point (en réalité ici la sous-normale), on veut trouver l'équation de la courbe.

Nous avons montré qu'en notation moderne on arrivait à :

sous normale

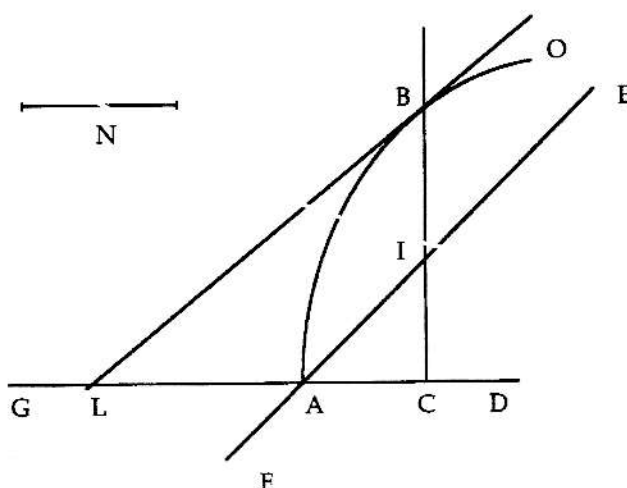
YZ

$$\frac{x \frac{dx}{dy}}{x} = \frac{b}{x - y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{b}$$

$$\text{D'où } y = x - b + b e^{-x/b}$$

Remarquons que dans les ouvrages actuels proposant le problème de F. de Beaune, on trouve l'énoncé suivant donné en juin 1645 par Descartes (mais ce n'est pas celui donné par de Beaune...) :



"Etant donné une longueur de référence, N, menons deux lignes droites infinies, GD et FE, qui se coupent au point A, selon un angle EAD de 45 degrés ; on demande la façon de décrire la ligne courbe ABO, telle que, si d'un point quelconque pris sur cette courbe on mène la tangente et l'ordonnée par rapport au diamètre GD (de quelque façon qu'on mène ici, à partir du point B, la tangente BL et l'ordonnée BC), le rapport entre cette ordonnée BC et CL, segment du diamètre intercepté entre cette ordonnée et la tangente, soit constamment égal au rapport du segment donné N à BI, segment de l'ordonnée abaissée de la courbe sur la droite FE."

$$\frac{BC}{CL} = \frac{N}{BI}$$

$$\begin{aligned} BC &= y \\ AC &= IC = x \end{aligned}$$

$$CL = | \text{sous-tangente} | = y \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{y}{y \frac{dx}{dy}} = \frac{N}{y - x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{N}{y - x}$$

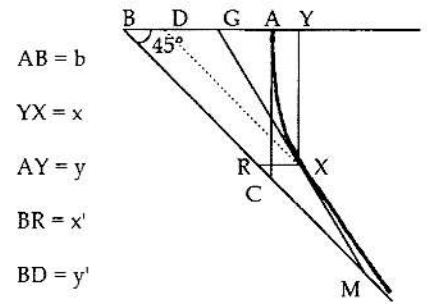
C'est bien la même équation avec des axes permutés.

On sait que ⁽¹⁾ de Beaune a voulu utiliser la méthode directe des tangentes pour résoudre un problème inverse et qu'il n'a pas abouti...

Quant à la solution de Descartes, elle a donné lieu à de nombreux commentaires et reste encore à la fois géniale et mystérieuse.

" La lettre dans laquelle Descartes communique à de Beaune ses idées sur cette question d'un nouveau genre, qu'il regarde comme l'inverse de sa règle des tangentes, nous paraît mériter de figurer comme l'un des documents les plus importants dans l'histoire des nouveaux calculs " écrit Charles dans son Aperçu historique ⁽⁷⁾. " Il serait curieux que l'analyse par laquelle Descartes parvint à cette solution nous fut connue ; mais on n'en trouve aucune trace dans ses lettres " remarque cependant Montucla... ⁽⁸⁾.

Rappelons que par un changement d'axe ⁽¹⁾, Descartes ramène l'équation précédente à :



$$\frac{dx'}{dy'} = -\frac{b\sqrt{2}}{y'}$$

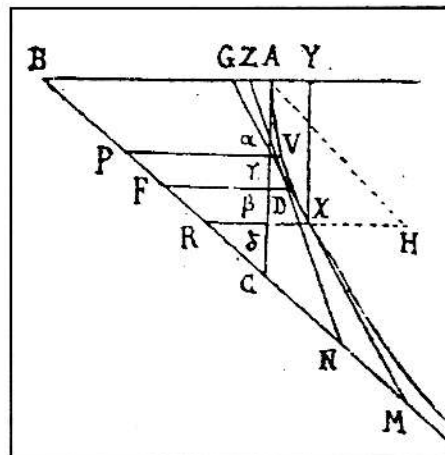
$$x' = -b\sqrt{2} \operatorname{Log} \frac{y'}{b} \text{ avec } \operatorname{Log} = \log_e$$

$$x' = b\sqrt{2} \operatorname{Log} \frac{b}{y'}$$

La sous-tangente $\overline{RM} = -y' \frac{dx'}{dy'} = b\sqrt{2}$ est constante

En réalité, dans sa lettre à de Beaune du 20 février 1639 ⁽⁹⁾, il fait la démonstration suivante :

Ayant divisé $AB = b$ en m parties égales et ayant pris une ordonnée quelconque PV qui en contient n , il envisage la suivante RX qui en contient $n - 1$.



ZVN et GXM : tangentes à la courbe en V et X ; elles se coupent en D.

$$PV = \frac{nb}{m} \quad RX = \frac{n-1}{m} b$$

$$\frac{NP}{PV} = \frac{NF}{FD} \quad \frac{b\sqrt{2}}{\frac{nb}{m}} = \frac{b\sqrt{2} - \varepsilon}{FD}$$

$$\rightarrow FD = \frac{nb}{m} - \frac{n\varepsilon}{m\sqrt{2}}$$

$$\frac{MR}{RX} = \frac{MF}{FD} \quad \frac{b\sqrt{2}}{\frac{n-1}{m}b} = \frac{b\sqrt{2} + \omega}{FD} \rightarrow FD = \frac{n-1}{m}b + \frac{(n-1)\omega}{m\sqrt{2}}$$

$$\frac{nb}{m} - \frac{n\varepsilon}{m\sqrt{2}} = \frac{n-1}{m}b + \frac{(n-1)\omega}{m\sqrt{2}} \rightarrow \frac{b}{m} = \frac{n\omega - \omega + n\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ et } b\sqrt{2} = n\omega - \omega + n\varepsilon \quad (1)$$

$$b\sqrt{2} = (n-1)\omega + n\varepsilon \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow PR = \varepsilon + \omega = \frac{b\sqrt{2} + \varepsilon}{n} > \frac{b\sqrt{2}}{n}$$

$$(2) \rightarrow \omega(n-1) = b\sqrt{2} - n\varepsilon \quad \omega = \frac{b\sqrt{2} - n\varepsilon}{n-1}$$

$$\varepsilon + \omega = \frac{(n-1)\varepsilon + b\sqrt{2} - n\varepsilon}{n-1} = \frac{b\sqrt{2} - \varepsilon}{n-1}$$

$$PR = \varepsilon + \omega = \frac{b\sqrt{2} - \varepsilon}{n-1} < \frac{b\sqrt{2}}{n-1}$$

PR est donc compris entre $\frac{b\sqrt{2}}{n}$ et $\frac{b\sqrt{2}}{n-1}$
de sorte que a b est compris entre $\frac{b}{n}$ et $\frac{b}{n-1}$

(il remplace les abscisses x et les intervalles Δx suivant l'asymptote par les verticales $A\alpha$ et les intervalles $\alpha\beta$ pour supprimer les $\sqrt{2}$).

Puis il écrit : $A\alpha = \sum_{i=n}^m \alpha\beta$

$$\sum_{i=n+1}^{i=m} \frac{b}{i} < A\alpha < \sum_{i=n}^{i=m-1} \frac{b}{i}$$

Exemples :

$$\text{Si } m = 8 \quad PV = \frac{3}{4}b = \frac{nb}{m} \quad n = 6$$

$$\sum_{i=7}^{i=8} \frac{b}{i} < A\alpha < \sum_{i=6}^{i=7} \frac{b}{i}$$

$$\frac{b}{7} + \frac{b}{8} < A\alpha < \frac{b}{6} + \frac{b}{7}$$

$$0,268 b \quad 0,309 b$$

De même si $m = 16 \quad n = 12$

$$\frac{b}{13} + \frac{b}{14} + \frac{b}{15} + \frac{b}{16} < A\alpha < \frac{b}{13} + \frac{b}{14} + \frac{b}{15} + \frac{b}{16}$$

$$0,277 b \quad 0,298 b$$

En augmentant à l'infini le nombre m, on resserre $A\alpha$ entre deux sommes et on obtient une très bonne valeur approchée.

Puisque $A\alpha$ est une fonction logarithmique, cela revient à écrire, nous dit Paul Tannery ⁽¹⁰⁾ :

$$Aa = b \log \frac{b}{y'} = b \log \frac{m}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} < \log \frac{m}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m-1}$$

Reste à savoir comment Descartes a trouvé cette fonction logarithmique !

En effet, ayant PV (par exemple $\frac{3}{4}b$) et $A\alpha$, on a le point V et on peut construire mécaniquement la courbe, dit Descartes. Il va effectivement maintenant proposer une construction mécanique avec les mouvements de deux règles : l'une qui se meut de AH vers BR (c'est y' qui varie) à vitesse constante ($v = -1$ par exemple, puisque y' diminue), l'autre qui descend de BA parallèlement à RH (c'est ici x' qui varie) avec au départ la même vitesse que l'autre règle, et si elle a un degré de vitesse en commençant, elle en a $\frac{8}{7}$ lorsque la première règle a parcouru $\frac{b}{8}$, $\frac{7}{8}$ lorsque la première a parcouru $\frac{b}{8}$, etc ...

Pour la règle qui se meut de AH vers BR d'un mouvement uniforme :

$$y' = vt + b = -t + b \quad \rightarrow \quad t = b - y'$$

y'	b	$\frac{7b}{8}$	$\frac{6b}{8}$	$\frac{5b}{8}$	$\frac{4b}{8}$	$\frac{3b}{8}$	$\frac{2b}{8}$	
$t = b - y'$	0	$\frac{b}{8}$	$\frac{2b}{8}$	$\frac{3b}{8}$	$\frac{4b}{8}$	$\frac{5b}{8}$	$\frac{6b}{8}$	
$v = \frac{dx'}{dt}$	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{2}$	
$\frac{1}{v} = \frac{dt}{dx'}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	

$$\rightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{dt}{dx'} = Kt + K_0$$

$$t = 0 \quad \frac{1}{v} = 1 \quad K_0 = 1$$

$$t = \frac{b}{8} \quad \frac{1}{v} = \frac{7}{8} \quad \frac{7}{8} = K \frac{b}{8} + 1$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{dt}{dx'} = -\frac{t}{b} + 1$$

$$\text{Or : } dt = -dy' \rightarrow -\frac{dy'}{dx'} = \frac{y' - b}{b} + 1$$

$$\rightarrow -\frac{dy'}{dx'} = \frac{y'}{b} \quad x' = -b \log \frac{y'}{b}$$

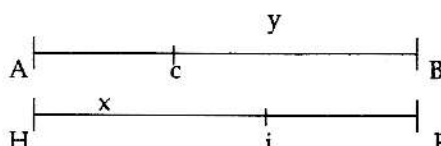
C'est l'équation de la courbe de de Beaune (à $\sqrt{2}$ près...).

Comme chez Néper, x' , c'est à dire $A\alpha$, croît pendant que y' décroît.

Cela prouve que Descartes a sûrement aperçu la fonction logarithmique (bien qu'il n'écrive pas le mot logarithme...) entre x' ou $A\alpha$ et $y' = PV$ (les deux traités de Néper datent de 1614 et 1619).

C'est une courbe mécanique (autrement dit transcendante), s'exclame Descartes, et ce n'est pas étonnant que mes autres méthodes de calcul ne conviennent pas !

On est tout naturellement conduit à comparer ce calcul à celui de la méthode de Néper pour introduire les logarithmes.



$$\overline{Bc} = y$$

$$\overline{Hi} = x$$

c et i partent simultanément de A et H avec la même vitesse initiale v_0 respectivement vers B et F.

Pour c : $v = y$ à chaque instant et pour i : mouvement uniforme.

gente WC étant menée jusqu'à l'axe, XC soit toujours égal à une même constante a . Alors XW ou w [est] à XC ou a , comme dw à dx : donc si dx (qui peut être pris à volonté) est pris constant, soit toujours le même,

c'est-à-dire b , ou si les x mêmes ou AX croissent uniformément, W sera fait égal à $\frac{a}{b} dw$, et ces W mêmes seront ordonnés par les dw mêmes, leurs accroissements, soit les différences, proportionnels, ce qui est si les x sont la progression arithmétique, les w seront la progression géométrique, ou si les w sont des nombres, les x

$$\text{Pour c : } -\frac{dy}{dt} = y \quad \frac{dy}{y} = -dt \quad \text{Log } y = -t + k \quad \text{Log} = \log_e$$

$$t=0 \quad k = \text{Log } y_0 = \text{Log } v_0 \quad \text{Log } y = -t + \text{Log } v_0 \rightarrow \text{Log } \frac{y}{v_0} = -t$$

$$\text{Pour i : } x = v_0 t \quad t = \frac{x}{v_0} \rightarrow \text{Log } \frac{y}{v_0} = -\frac{x}{v_0} \quad *$$

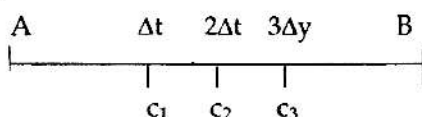
$$\text{Pour le problème de de Beaune on a trouvé : } -\frac{dy'}{dx'} = \frac{y'}{b}$$

$$ix' = -b \frac{dy'}{y'} \quad \frac{dx'}{y'} = -\frac{b}{y'} \rightarrow x' = -b \text{Log } \frac{y'}{b'}$$

$$\text{Log } \frac{y'}{b} = -\frac{x'}{b}$$

$$\text{Le logarithme défini par Néper est : } x = v_0 \text{Log } \frac{v_0}{y} = v_0 \log_{1/e} \frac{y}{v_0}$$

Remarque :



$$B C_2 = B C_1 - C_1 C_2$$

$$C_1 C_2 = v_1 \Delta t = B C_1 \Delta t$$

$$B C_2 = B C_1 (1 - \Delta t)$$

$$B C_3 = B C_2 - C_2 C_3$$

$$= B C_1 (1 - \Delta t)^2$$

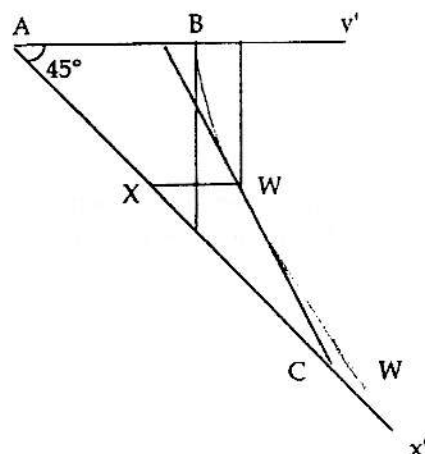
Les distances Bc sont en progression géométrique décroissante, alors que les distances parcourues par i sont en progression arithmétique.

Finalement, la solution différentielle sera donnée par Leibniz dans le célèbre texte des Acta Eruditorum de 1684 :

Nouvelle méthode pour les Maxima 1684 ⁽¹⁾

"Il plaît d'ajouter en lieu d'appendice la solution du Problème qu'a proposé de Beaune (NIV), que Descartes tenta mais ne résolut pas, au Tome 3 des Lettres. Trouver la ligne WW de telle nature que la tan-

seront les logarithmes: donc la ligne WW est logarithmique."



$$AX = x = x'$$

$$dw = dy' \quad XW = w = y'$$

La sous-tangente XC = a = constante

$$\frac{w}{a} = \frac{dw}{dx}$$

$$a = w \frac{dx}{dw} = \text{sous-tangente (au signe près...)}$$

$$w \text{ (et non } W) = \frac{a}{b} dw \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{a} dx$$

avec $b = dx$

$$\text{Log } w = \frac{1}{a} x + k$$

Si $AB = a$

$$x = 0$$

$$w = a$$

$$\text{Log } a = k \quad \frac{1}{a} x = \text{Log } w - \text{Log } a$$

(on a perdu le signe - ...)

$$x = a \text{Log } \frac{w}{a}$$

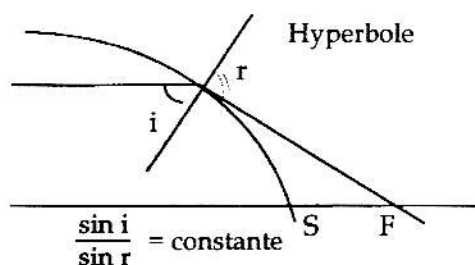
¹ Leibniz G. Oeuvre concernant le calcul infinitésimal. Traduit par Jean Payroux

Que conclure ? Peut-on dire avec Gaston Milhaud ⁽¹¹⁾ que Descartes, s'il en avait eu le temps, était tout prêt à entreprendre des recherches sur les séries infinies, vu la facilité avec laquelle il les avait introduites, ou au contraire avec Vincent Jullien ⁽¹²⁾, reprenant Vuillemin et Belaval, que Descartes ne veut pas s'engager plus dans les régressions à l'infini dont le résultat ne peut être compris par les hommes : autrement dit, *"cette ligne est du nombre de celles que j'ai rejetées de ma Géométrie"* affirme Descartes, car il ne veut pas tomber dans le piège des séries infinies et des limites...

Les questions d'optique

Dans un précédent article ⁽¹⁾ j'écrivais que la dioptrique, préoccupation principale de Descartes depuis 1626, allait aussi constituer à partir de 1638 un important sujet d'échanges épistolaires avec Florimond de Beaune. Depuis, j'ai montré ⁽¹³⁾ que Descartes seul, partant de Képler, avait trouvé que toutes les coniques convenaient comme anacastique, c'est-à-dire la coupe d'un dioptrique transformant un faisceau de lumière cylindrique en faisceau convergeant sur l'axe, même s'il avait eu besoin de Beeckman pour lui rafraîchir la mémoire concernant l'hyperbole...

Rappelons que dans toute hyperbole, si d'un point quelconque de la courbe on mène les droites suivantes : la parallèle à l'axe, la droite qui joint le foyer extérieur, la perpendiculaire à la tangente, on définit deux angles dont le rapport des sinus est constant quelque soit le point.



$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{constante} = \frac{\text{distance des sommets}}{\text{distance des foyers}} = \frac{1}{e}$$

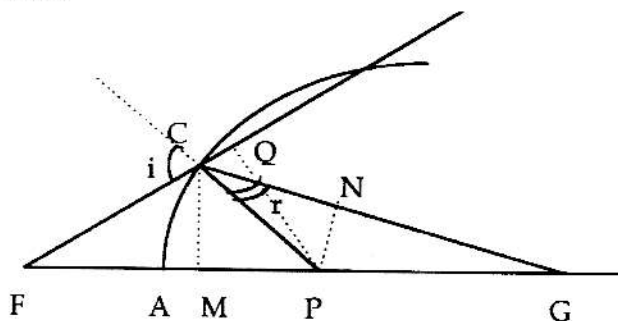
C'est cette relation géométrique qui a dû suggérer à Descartes la fameuse loi de la réfraction $\frac{\sin i}{\sin r} = \text{indice de réfraction du deuxième milieu par rapport au premier}$ ($\frac{1}{n}$ si l'on passe d'un milieu plus réfringent dans un milieu moins réfringent).

En effet, si les directions précédentes (parallèle à l'axe de l'hyperbole et droite joignant le foyer extérieur) représentent celles de rayons lumineux traversant un dioptrique dont la méridienne est l'hyperbole, il suffira que $e =$ l'indice du milieu pour que tout rayon parallèle à l'axe se réfracte vers le foyer !

Et ceci est valable pour toutes les coniques. Par conséquent si l'on veut réaliser une lentille stigmatique pour un point objet à l'infini sur l'axe, il suffit de tailler une face suivant un hyperboloïde (ou un ellipsoïde) dont la coupe est la courbe précédente, l'autre face étant plane ou sphérique.

Enfin, pour les cas du stigmatisme entre deux points quelconques, un point objet sur l'axe à distance finie donnant un point image, Descartes a inventé les ovales, qui sont les anacastiques réalisant exactement ce stigmatisme.

Il commence par chercher une courbe telle que, en coordonnées bipolaires, les deux rayons vecteurs fassent avec la normale en chaque point de la courbe deux angles dont les sinus sont dans un rapport donné. C'est donc encore ici vouloir résoudre un "problème inverse des tangentes". C'est à ce propos qu'il va imaginer sa méthode de recherche des tangentes, ou plutôt des normales, en coupant la courbe par un cercle, la courbe étant définie dans la Géométrie ⁽¹⁴⁾ de la façon suivante :



$CP = s$, normale en C à la courbe
 $PQ \perp FC$
 $PN \perp CG$

La courbe est telle que :

$$\frac{CF - FA}{GA - GC} = \frac{d}{e} \quad (\text{la présentation est différente pour la construction des ovales})$$

$$\frac{CF - c}{b - CG} = \frac{d}{e}$$

$$\rightarrow e CF + d CG = db + ec = \text{constante}$$

$$er_1 + dr_2 = \text{constante}$$

C'est l'équation du 1^{er} ovale de Descartes.

$$\text{Posons } FC = AF + z \quad MA = y \quad PA = v$$

$$GC = GA - \frac{e}{d} z \quad CM = x$$

En coupant la courbe par le cercle

$$x^2 = s^2 - v^2 + 2vy - y^2$$

et en cherchant la racine double, on obtient:

$$v = AP = \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{bde + cd^2 + d^2z - e^2z}$$

Puis il montre, à l'aide de triangles semblables, que pour tout trajet partant de F et aboutissant en G, on a :

$$\frac{PQ}{PN} = \frac{d}{e} = \text{constante} \quad \text{Mais } \frac{PQ}{PN} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

L'ovale a la même propriété géométrique que les coniques.

Donc le rayon lumineux FC devient CG par réflexion.

Comment Descartes a-t-il été amené à écrire $er_1 + dr_2 = \text{constante}$? Sans doute en généralisant les cas $r_1 \pm r_2 = \text{constante}$, c'est-à-dire les équations des coniques... Notons déjà qu'au point de vue utilisation pratique, la réalisation de tels dioptrés ovales présente de sérieuses difficultés, quoique Descartes d'abord ⁽¹⁵⁾, puis d'autres ⁽¹⁶⁾, aient décrit des dispositifs pour construire les ovales en continu.

Finalement, ce sont les surfaces hyperboliques qui auront sa faveur car, dit-il, après les planes et les sphériques, ce sont les plus faciles à réaliser, et en outre il montre que, étant moins courbées que les elliptiques, elles réalisent mieux le stigmatisme approché pour des points voisins de l'axe, c'est-à-dire l'aplanétisme. Je rappelle que, n'est rigoureusement aplanétique que le dioptré sphérique pour les points de

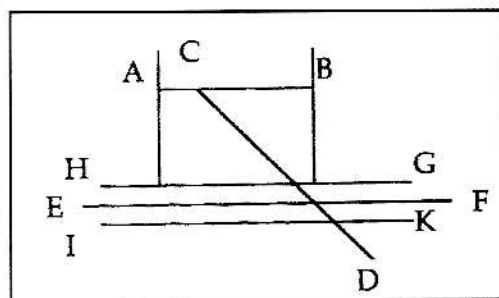
Weierstrass, satisfaisant à la condition des sinus (condition d'Abbe). Notamment le dioptré ovale, même s'il réalise le stigmatisme parfait pour un couple de points (les foyers...), n'est pas aplanétique pour ce couple.

Il est vrai que l'on n'avait pas encore songé à diaphragmer convenablement, à combiner les lentilles, les substances transparentes et les courbures de faces pour diminuer les aberrations géométriques. Quant aux aberrations chromatiques, autrement importantes, Descartes n'en parle pas!

Reprenons donc la démarche historique de Descartes pour faire réaliser des verres hyperboliques. Il y a d'abord en 1629 la correspondance avec Ferrier, un habile artisan qui s'y connaissait, en outre, assez en mathématiques et physique et travaillait avec Mydorge. Voici les premières recherches.

Dans une lettre à Ferrier du 8 octobre 1629 ⁽¹⁷⁾, Descartes lui rappelle le principe des deux machines qu'il lui a précédemment décrites.

Une pièce CD tourne autour d'un axe AB, engendrant un cône droit d'axe AB. Si l'on coupe par un plan EF parallèle à AB, on obtient une hyperbole. On peut donc :

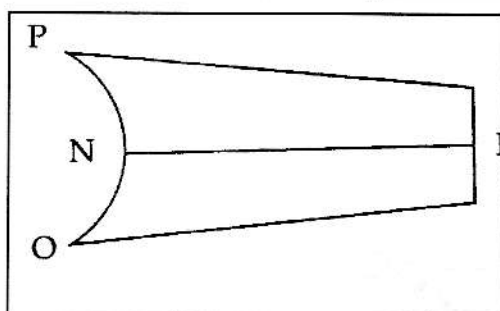
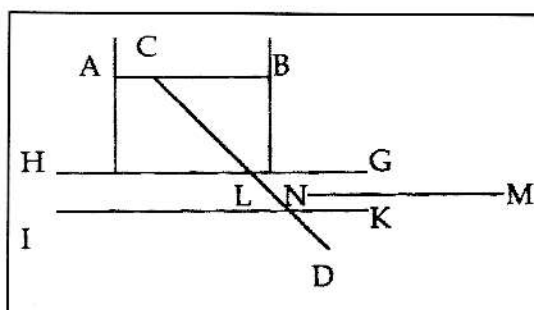


- soit avoir la pièce CD mobile à travers AB mais solidaire d'un cylindre EF se déplaçant entre deux planches parallèles HG et IK et portant à ses extrémités un outil pour tailler le verre.

- soit astreindre l'outil CD à être solidaire de AB, mais pouvant limer des lames d'acier trempé NM qui serviront de gabarit pour tailler des meules à polir le verre. On note déjà une erreur de dessin : avec l'inclinaison donnée à CD, la partie taillée PNO doit être convexe et non concave ...²

La meule en pierre Q taille un verre R solidaire d'un tour S qui tourne égale-

2 Note de Y.Lemaître. Le dessin de Descartes ne tient pas compte des épaisseurs des pièces



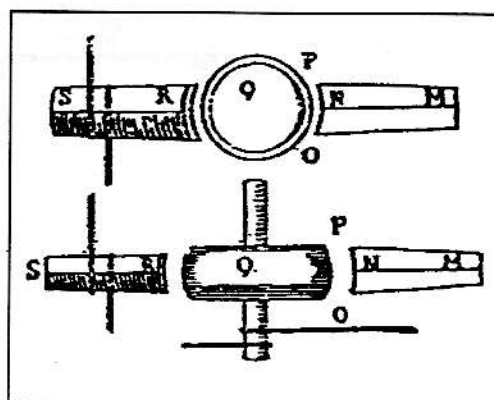
ment afin que le centre du verre soit attaqué autant que ses extrémités...

La lame NM doit rester au contact de la meule pendant que celle-ci travaille, afin de la rectifier si nécessaire.

Là encore, il y a une erreur de représentation : la roue est figurée successivement en vue de face et vue de dessus, alors que la lame NM reste dans le même plan !³

Ferrier va répondre dans une lettre du 26 octobre 1629⁽¹⁸⁾, en notant qu'en changeant l'inclinaison de la pièce CD on peut tailler soit des lames concaves, soit des lames convexes, et il rectifie l'erreur de représentation de Descartes. Puis il suggère de remplacer la lime CD par une pierre afin de finir d'aiguiser les lames, mais au risque de ne pas conserver la bonne inclinaison... En outre, la roue Q pourrait être en métal : elle s'userait moins.⁴

Enfin Ferrier demande à Descartes comment dessiner l'hyperbole méridienne du verre à tailler à partir de l'étude expérimentale de la réfraction de la lumière dans un échantillon triangulaire : Mydorge sait tracer cette ligne, mais est méprisant vis-à-vis de Ferrier, alors que Descartes l'apprécie à sa juste valeur ! J'ai d'ailleurs déjà dit⁽¹³⁾ que la concurrence pour la taille des verres, mais aussi pour l'énoncé exact de la loi de la réfraction n'était pas, alors, entre Snell et Descartes, comme on continue à l'écrire, mais entre ce dernier et Mydorge, et Descartes veut absolument garder le secret sur ses recherches...

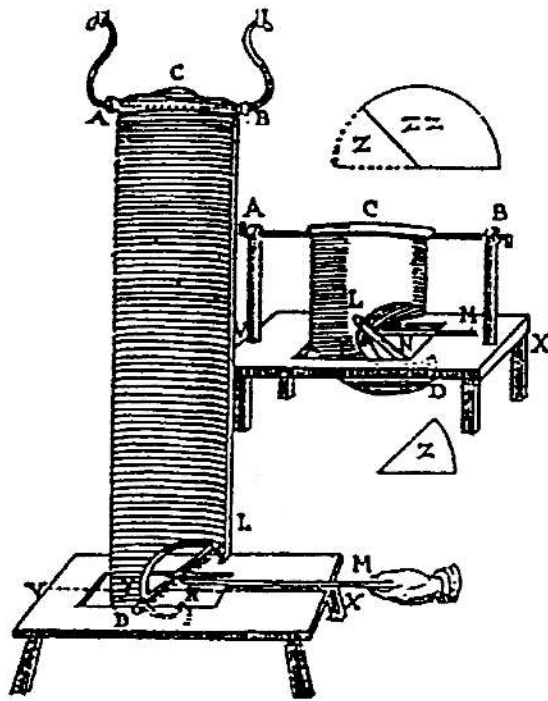


Il répondra le 13 novembre à Ferrier⁽¹⁹⁾ en donnant de son dispositif une réalisation concrète.

Mais il se trompe encore une fois sur le résultat à obtenir : la petite machine ne taillera pas des lames concaves comme il le prétend, mais des lames convexes.

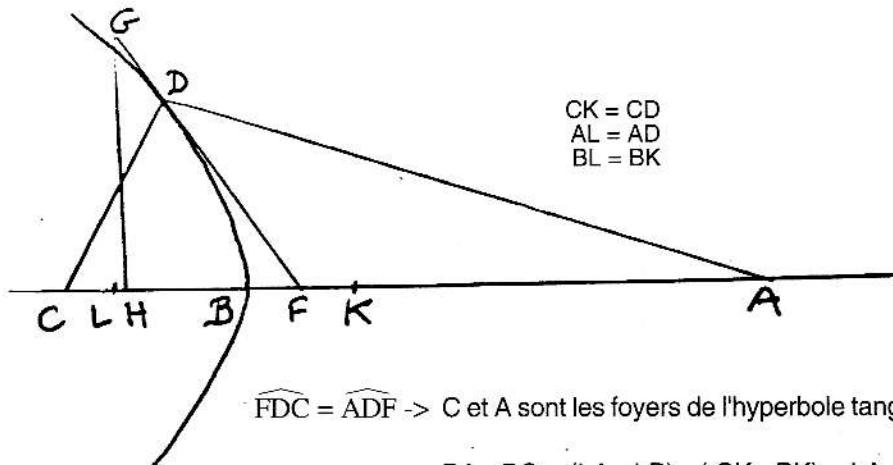
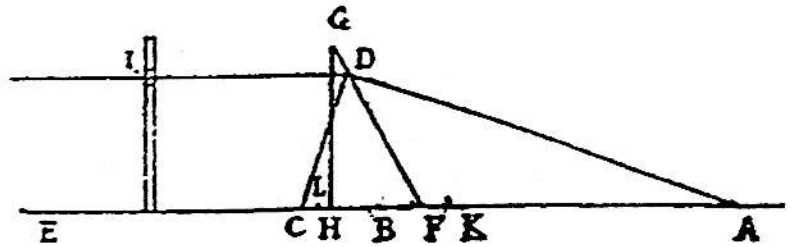
3 Le diamètre de la roue ne doit pas excéder une certaine limite (Descartes ne précise pas : pour la roue convexe).

4 : Une roue en pierre massive ne convient pas, il faut de l'abrasif entre elle et le verre. D'autre part, cette roue usera considérablement la lame, outil qui devrait au contraire user la roue pour lui garder son profil.



Il explique ensuite à Ferrier comment exploiter l'étude expérimentale de la réfraction dans le verre.

Ayant relevé l'emplacement du triangle de verre HGF et le trajet DA de la lumière, on peut déterminer les foyers et le sommet de l'hyperbole anaclastique, tangente en D à GF, qui engendrera le dioptre faisant converger le rayon lumineux ID au foyer A.

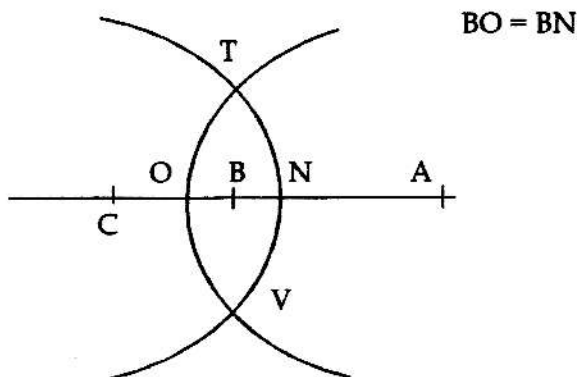


$$\begin{aligned} CK &= CD \\ AL &= AD \\ BL &= BK \end{aligned}$$

$\widehat{FDC} = \widehat{ADF} \rightarrow C \text{ et } A \text{ sont les foyers de l'hyperbole tangente en D à GF.}$

$$\begin{aligned} BA - BC &= (LA - LB) - (CK - BK) = LA - CK - LB + BK = \\ LA - CK &= AD - CD = 2a \end{aligned}$$

$\rightarrow B \text{ est sur l'hyperbole et sur l'axe : c'est le sommet.}$



J'ai d'ailleurs noté à la suite de P. Costabel, dans une autre étude ⁽¹³⁾, que si Descartes caractérise la réfraction par $\frac{AB}{BC} = \frac{n+1}{n-1}$ et non pas par $n = \frac{c}{a} = \frac{\sin r}{\sin i}$

c'est qu'il ne veut pas divulguer cette loi : il sait que Claude Mydorge en est arrivé à peu près au même point que lui !

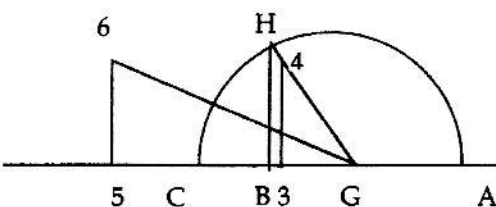
Puis il explique la construction par points de l'hyperbole : (figure ci-dessus)

$$\begin{aligned} AT &= AO = AV & AT &= AO = AB + BO \\ CT &= CN = CV & CT &= CN = CB + BN \end{aligned}$$

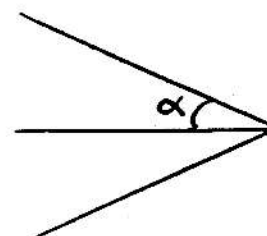
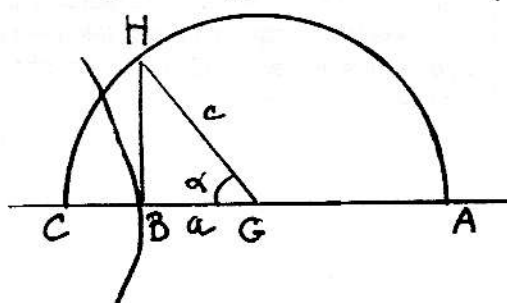
$AT - CT = AB - CB + BO - BN = AB - CB = 2a \rightarrow T$ est un point de l'hyperbole, de même pour V.

Ayant pris deux points quelconques O et N symétriques par rapport à B, il suffit de tracer les cercles de rayons CN et AO pour obtenir des points de l'hyperbole.

Enfin il dévoile "son plus grand secret" : comment trouver l'inclinaison de l'outil CD, connaissant les caractéristiques de l'hyperboloïde à réaliser.



Il suffit de tracer un cercle de diamètre AC et d'élever du sommet B la perpendiculaire, coupant en H le cercle ; $\angle BGH = \alpha$ est l'angle demandé.
A et C : foyers de l'hyperbole.

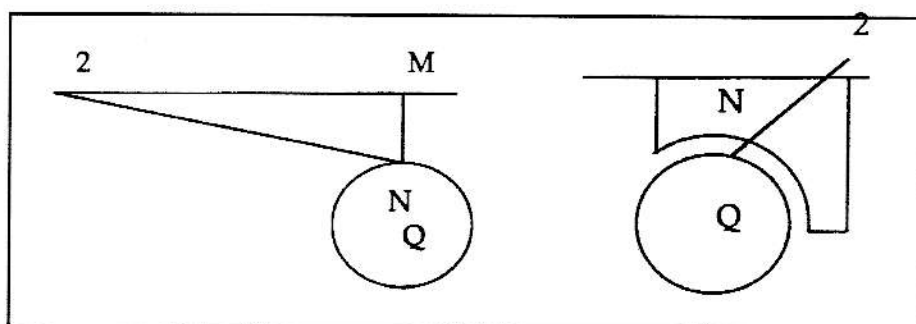


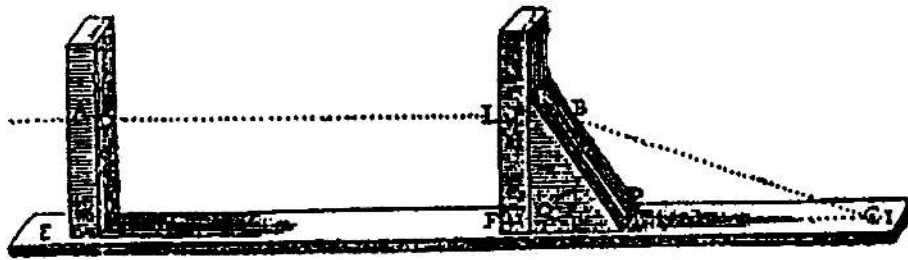
Pour une conique section du cône parallèlement à l'axe :

$$\text{exentricité } e = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \cos \alpha = \frac{1}{e}$$

Dans le triangle :

$$\cos \alpha = \frac{BG}{HG} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$$





Il aborde en outre à partir de cette figure un problème délicat : il ne faut pas que les lames NM attaquent horizontalement la roue "toutes droites sur Q", mais "couchées comme le fer d'un rabot", pour bien entailler la pierre et ceci nécessite de calculer une nouvelle inclinaison de la pièce CD pour fabriquer la lame NM...⁵

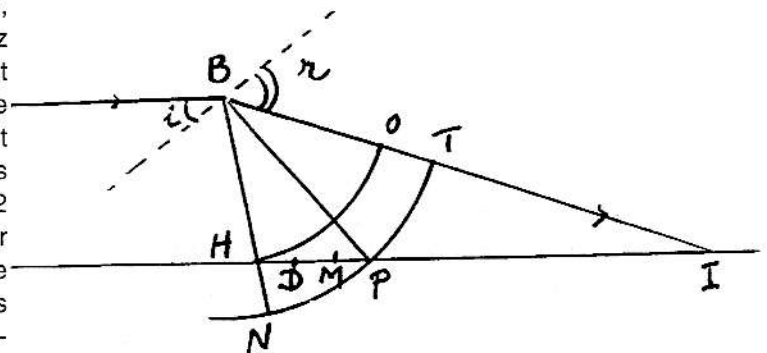
On ne sait pas ce que Ferrier aura tiré de tous ces conseils, mais aussi de son jugement et de son bon sens pratique, qui paraissent assez grands : il semble qu'il soit arrivé à tailler une bonne lentille, mais une seule, et du reste Descartes dans la lettre à Golius⁽²⁰⁾ du 2 février 1632 avoue n'avoir jamais fait d'expérience pour vérifier la loi des sinus, sinon celle d'obtenir cette lentille hyperbolique (taillée par Ferrier) qui, calculée suivant cette loi, concentrait convenablement la lumière. Ferrier n'arrivera pas à fabriquer d'autres lentilles, non plus que l'artisan d'Anvers indiqué plus tard par Constantin Huygens. Si bien qu'en 1638, Descartes n'aura plus confiance qu'en Florimond de Beaune pour reprendre la taille, comme nous l'avons montré dans d'autres études⁽¹⁾.

Auparavant, il avait publié en 1637 la Dioptrique avec des modèles très détaillés où il corrigeait en partie ses premières erreurs (voir aussi l'étude critique de ces machines à tailler les verres hyperboliques

dans l'article de Y. Lemaître).

Descartes commence par reprendre le dispositif à pinnules avec le triangle de verre pour mesurer l'indice de réfraction⁽²¹⁾

BP étant la face de sortie de la lumière qui se réfracte en BI, il établit ainsi les caractéristiques de l'hyperbole anacoustique :



$$BO = BH$$

$$\widehat{NP} = \widehat{PT} \rightarrow PB \text{ bissectrice de } \widehat{NBI}$$

$\rightarrow$ H et I sont les 2 foyers de l'hyperbole tangente en B à BP.

$$HI = 2C \quad OI = BI - BO = BI - BH = 2a$$

$$\frac{HI}{OI} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sin r}{\sin i} \quad (\text{propriété de l'hyperbole})$$

$$MI = OI = 2a \quad HM = HI - MI = 2c - 2a$$

$$HD = DM$$

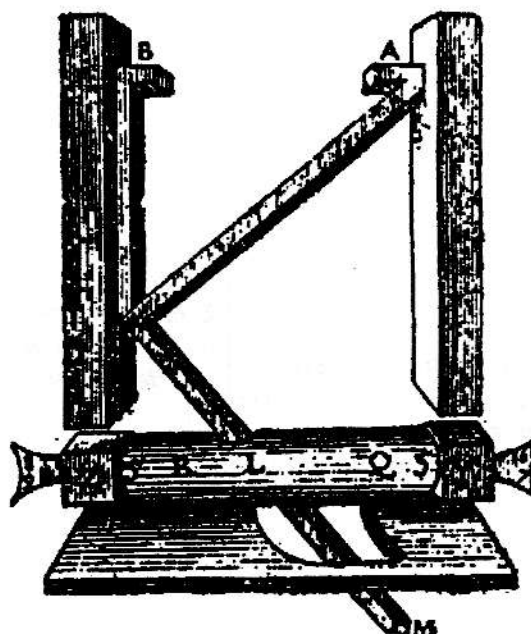
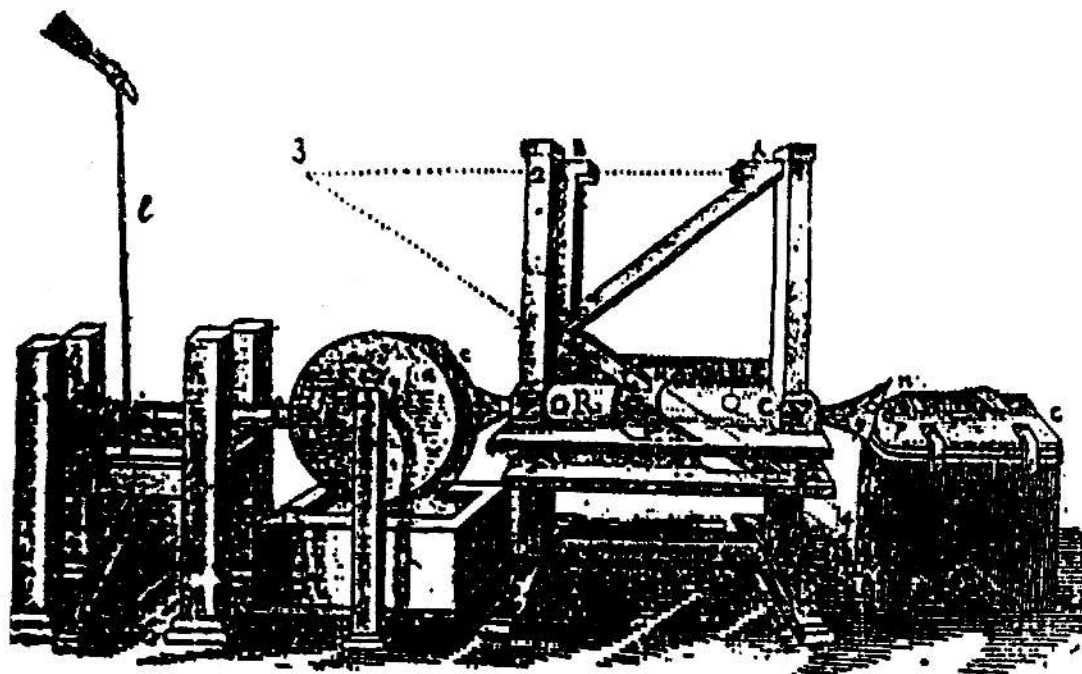
$$HI = 2c$$

$$HD = \frac{HM}{2} = c - a \rightarrow D \text{ est le sommet}$$

5 Une étude plus précise est nécessaire pour déterminer la forme et l'inclinaison de la lame afin que son angle de coupe soit suffisant (voir article de Y. Lemaître)

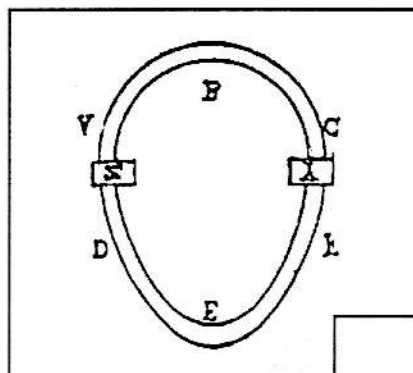
Puis il explique, comme dans la lettre à Ferrier du 13 Novembre 1629 (voir plus haut), la recherche de l'angle du cône décrit par une pièce faisant partie de la machine suivante :

C'est ce dispositif qui va vraisemblablement servir de point de départ à Florimond de Beaune pour construire sa propre machine. Rappelons que Descartes lui écrit à la fin de l'année 1638 ⁽²²⁾ :



"ABKLM n'est qu'une seule pièce qui se meut toute entière sur les pôles 1, 2". KLM décrit un cône de sommet 3 et d'axe AB. La pièce ZY est guidée dans un plan parallèle à AB et les extrémités 6, 7 et 8, 9 décrivent dans ce plan des hyperboles, sections du cône précédent....

"Vous êtes véritablement l'homme que j'ai souhaité en ma Dioptrique, pour le mettre en exécution ; ou plutôt vous en êtes plus capable que je n'eusse osé souhaiter."
Puis il envisage des variantes proposées par de Beaune :



La pièce ABKLM est mise en mouvement par deux anses reliant les cubes Z et Y.

Le verre à tailler est placé sur un planétaire D ayant deux mouvements : l'un autour de son axe, l'autre autour d'une meule fixe ABC ayant la forme d'une surface de révolution à profil hyperbolique.

La discussion de ces dispositifs se trouve dans l'article de Y. Lemaître.

J'ai signalé ⁽¹⁾ deux autres lettres de Descartes sur le même sujet. De fait, Descartes écrit le 9 février 1639 à Mersenne ⁽²³⁾ :

"Pour la machine, j'ai conseillé à M. de Beaune de la faire tout autrement que je ne l'ai décrite, à cause qu'en écrivant on doit principalement, ce me semble avoir soin de faire entendre la chose, et en pratiquant d'y chercher des facilités qui ne peuvent ou même ne doivent point toutes être décrites..."

Le 20 février, s'adressant directement à de Beaune, il lui écrit ⁽²⁴⁾ : *"Je n'ai rien à dire touchant ce que vous trouvez bon de changer en la machine pour les lunettes, car c'est chose dont vous pouvez mieux juger que moi. Mais pour ce qui est de commencer par les lunettes à puce, je crains qu'elles ne fassent pas voir si clairement l'utilité de la figure hyperbolique, comme les lunettes de longue vue ; car vous savez que pour les verres qu'on met proche de l'oeil, il n'importe pas tant que leur figure soit exacte"*.

Puis il lui conseille de commencer par une machine capable de tailler des verres de 4 à 5 pouces de diamètre pour des lunettes de 2 à 3 pieds de longueur.

Terminons l'étude de cette correspondance scientifique par un extrait de la biographie

que j'ai publié en 1996 ⁽²⁵⁾ :

Si de Beaune annonce le 18 juin 1639 que sa machine à faire les lunettes hyperboliques est parachevée, nous apprenons le 11 mars 1640 qu'il a eu un accident. Descartes à Mersenne ⁽²⁶⁾ : *"je suis navré de l'accident qui est arrivé à M. de Beaune, mais je ne m'étonne pas de ce qu'il n'est*

point encore venu à bout de son entreprise car je sais qu'elle est très difficile". Le lendemain, il écrit à Constantin Huygens ⁽²⁷⁾ : *"Au reste Mersenne, m'a mandé que le Conseiller de Blois qui avait entrepris les lunettes, et qui est sans doute le plus*

capable de tous ceux qui s'en sont mêlés, s'est fort blessé à une main en y travaillant, en sorte qu'il ne pourra continuer de longtemps ; ce qui signifie, ce me semble, en langue française, qu'il n'en a pu venir à bout. Vous pensez peut-être que j'en sois triste ? et je vous jure que tout au contraire je veux tirer de la vanité de ce que la main des meilleurs ouvriers ne peut atteindre où mon raisonnement est parvenu."

Descartes fait preuve ici de beaucoup de suffisance et de cynisme, c'est le moins qu'on puisse dire ! Il va même jusqu'à écrire le 31 décembre ⁽²⁸⁾ : *"Je prie Dieu pour les âmes de M. Dounot et de Beaugrand. Mais pour Monsieur de Beaune, je prie Dieu qu'il le conserve ; car puisque vous n'avez pas de nouvelles de sa mort, je ne la veux pas croire, ni m'en attrister avant le temps ; et je le regretterais extrêmement, car je le tiens pour un des meilleurs esprits qui soient au monde"*. En réalité Florimond de Beaune survécut à Descartes et ne mourut que le 18 août 1652, 2 ans après lui...

Il continuera quand même à tailler des verres car Descartes écrit le 21 janvier 1641 ⁽²⁹⁾ : *"Je vous prie d'assurer M. De Beaune que je n'ai aucune espérance en ses verres concaves et convexes. Si je fusse allé en France l'été passé, comme je le pensais, il eut été l'un des premiers que j'eusse été voir ; car j'eusse pris mon chemin par Blois tout exprès et peut-être que nous eussions pu deviser ensemble à quelque moyen pour les hyperboliques plutôt en les rendant*

convexes des deux côtés; mais de faire un concave et convexe, c'est une chose qui me semble trop difficile..."

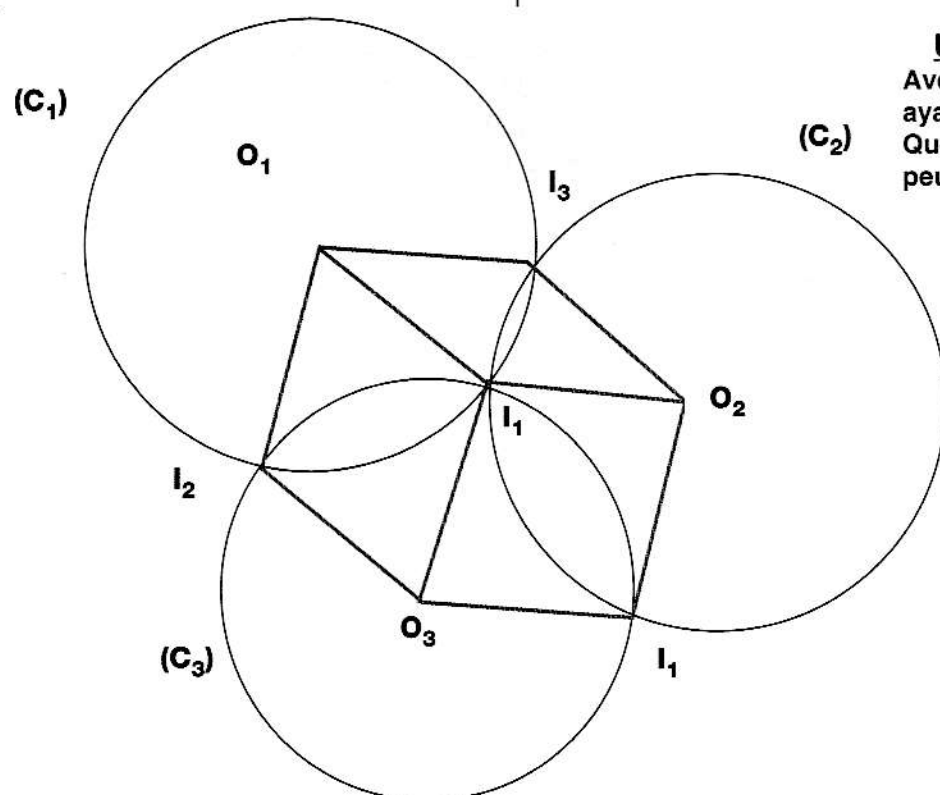
En fait Descartes va enfin rencontrer de Beaune en 1644. On lit dans la Vie de M. Descartes de Baillet le résumé d'une lettre à l'abbé Picot⁽³⁰⁾ : *"M. Descartes partit dès le lendemain, le 12 juillet pour Orléans, et de là il descendit à Blois chez M. De Beaune, Conseiller au Présidial, qui avait composé sur sa Géométrie les excellentes Notes dont nous avons eu l'occasion de parler ailleurs. Il trouva cet ami assez incommodé par la goutte. Son mal était assez grand pour lui interdire les fonctions de dehors ; mais il n'était pas suffisant pour lui ôter l'usage de la Philosophie et des Mathématiques dans sa chambre. Il n'avait pas encore abandonné le travail des lunettes et il en montra quelques unes à M. Descartes dont les verres étaient sphériques (peut-être Baillet veut-il dire convexes...) et qui se trouvaient assez bonnes".*

Mais nous ne retrouverons plus trace de Florimond de Beaune dans la correspondance de Descartes à partir de cette date. Tout ce que l'on sait, c'est que sa santé se dégradait de plus en plus et il dut même se faire amputer. Il cessa bientôt tout travail, sa vue s'en allait et il devint

presque aveugle. Enfin la mort vint mettre un terme à ses maux le 18 août 1652. Il avait 51 ans.

Que sont devenues ses archives ? Si Pierre Castabel a retrouvé en 1963 un traité de l'Angle Solide signé de Beaune⁽³¹⁾ dans les manuscrits de Roberval, sa Dioptrique et son traité de Mécanique semblent définitivement perdus. Il avait aussi composé un traité d'Algèbre qui sera imprimé en même temps que l'édition latine de la Géométrie de Descartes en 1659. Dom Liron écrit en 1719 qu'une copie du traité de l'Analyse demeurait dans la famille de M. De Beaune à Blois : il devait donc peut-être exister à cette époque des descendants de Florimond à Blois. Lambron de Lignim prétend enfin qu'une branche de la famille y subsistait encore peu de temps avant la Révolution.

Quant à René Descartes, vit-il enfin un jour aboutir sa tentative ? On sait qu'il refusa que Désargues demande à Richelieu de faire construire une grande manufacture pour installer les machines de taille des verres hyperboliques, prétextant "qu'aucun artisan ne comprendrait sa science qui est grande" et ne pourrait réaliser son projet : peut-être que, inconsciemment ou non, il doutait un peu qu'il soit réalisable. □



Un petit bout d'allumaths

Avec trois cercles de même rayon, ayant un point commun, Quelle mathématique peut-on faire ?

Bibliographie

Abréviations :

A.T. : Oeuvres de Descartes publiées par C. Adam et P. Tannery, Paris 1897-1909, réédition Vrin-C.N.R.S., 11 vol., 1964-1974.

C.M. : Correspondance du P. Marin Mersenne publiée par Mme P. Tannery et Cornelis de Waard, Paris 1933-1963, PUF C.N.R.S., 8 vol.

C.D. : Descartes. Correspondance publiée par Ch. Adam et G. Milhaud, Paris 1936-1956, P.U.F., 8 vol.

- (1) Dubois J. - Florimond de Beaune, commentateur de Descartes. Plot n°75. Été 1996.
- (2) Lettre de de Beaune à Mersenne du 25.9.1638, C.M., VIII, p.84.
- (3) Lettre de de Beaune à Roberval du 16.10.1638, C.M., VIII, p.142.
- (4) Lettre de Descartes à Mersenne du 11.10.1638, A.T, II, p.379.
- (5) C.D.III, Appendice II, p.378.
- (6) id. p.390.
- (7) Chasles. Aperçu historique sur l'origine et le développement de la Géométrie, XIII,.
- (8) Montucla J.F. Histoire des mathématiques, p.146.
- (9) Lettre de Descartes à de Beaune du 20 février 1639, A.T., II, p.515.
- (10) Id. p.522.
- (11) Milhaud G. Descartes savant. Paris, 1921.
- (12) Jullien V., Descartes. La Géométrie de 1637, P.U.F., 1996, p.12.
- (13) Dubois J. René Descartes et la loi de la réfraction. Communication présentée à la journée "Descartes savant" le 19 octobre 1996 à Descartes (Indre-et-Loire). Pub. en cours.
- (14) A.T., VI, p.416, 422, 432-433.
- (15) A.T., VI, p.428.
- (16) Baudoin P. Les orales de Descartes et le limaçon de Pascal. Paris, Vuibert, 1938,.
- (17) Lettre de Descartes à Ferrier du 8 octobre 1629, A.T., I, p.32.
- (18) Lettre de Ferrier à Descartes du 26 octobre 1629, A.T., I, p.38.
- (19) Lettre de Descartes à Ferrier du 13 novembre 1629, A.T., I, p.53.
- (20) A.T., I, p.239.
- (21) A.T., VI, p.212.
- (22) Lettre de Descartes de décembre 1638, très probablement à de Beaune écrit P. Tannery, A.T., II, p.512, sûrement à F. de Beaune disent Adam et Milhaud, C.D., III, p.131.
- (23) Lettre de Descartes à Mersenne du 9.2.1639, A.T., II, p.505.
- (24) Lettre de Descartes à de Beaune du 20.2.1639, A.T., II, p.512.
- (25) Dubois J. Florimond de Beaune, mathématicien blésois d'origine tourangelle, ami et commentateur de Descartes. Bulletin de la Société Archéologique de Touraine, 1996.
- (26) Lettre de Descartes à Mersenne, du 11.3.1640, C.D., IV, p.42.
- (27) Lettre de Descartes à Huygens du 12.3.1640, C.D., IV, p.44.
- (28) Lettre de Descartes à Mersenne du 31.12.1640, C.D., IV, p.246.
- (29) Lettre de Descartes à Mersenne du 21.1.1641, C.D., IV, p.255.
- (30) Lettre de Descartes à l'abbé Picot du 29.7.1644, A.T., IV, p.129.
- (31) De Beaune F. Doctrine de l'Angle Solide. Ed. critique par P. Costabel, Vrin, 1975.

Grandeur et mesure :

la place des formules et l'exemple de volume

Claude Janvier - Montréal

Cet article examine la place des formules dans le développement des concepts de grandeur.

Il est issu d'un cours de didactique ayant conduit à l'étude de la notion de volume, à l'élaboration d'une séquence d'enseignement qui a donné lieu à la production d'une vidéo.

Il s'articule autour de la notion de grandeur dont je ferai une analyse plus fine pour éclairer la construction de la séquence d'enseignement. Après quelques remarques sur les objectifs de la séquence d'apprentissage, je procéderai à une analyse conceptuelle de la notion de grandeur. La troisième partie sera consacrée à la grandeur volume. Les raisonnements et les difficultés qui y seront exposés conduiront à la section principale dans laquelle je présente les grandes lignes de la séquence d'enseignement.

Une vidéo sans trucage

Cette expérimentation a donné lieu à la production d'une vidéo intitulée: «*Le volume: mais où sont les formules ?*»

Pour les lecteurs qui auront l'occasion de visionner cette vidéo, notons que je reste très critique par rapport à ce qu'elle montre; la présence de la caméra et la nécessité de produire un son de bonne qualité contribuent trop souvent à chasser le naturel. L'enseignant apparaît donc guindé et la classe inhabituellement calme. La pédagogie apparente est plus magistrale que celle vraiment mise en place. Par contre, rien n'a été ajouté à ce qui s'est déroulé en classe; la réalisation de la vidéo n'a donné lieu à aucun montage ni trucage!

Faire raisonner les formules

Les discussions avec les étudiants (futurs enseignants) les ont amenés à proposer comme objectif général de la séquence: faire raisonner les formules.

Progressivement cette idée de raisonner les formules a pris forme et a été explicitée en trois points:

- a) s'appuyer sur une formule de base pour déduire la formule de chaque classe de solides,
- b) reconnaître la classe de solides à laquelle s'applique une formule particulière,
- c) reconnaître les éléments de la formule dans la représentation spatiale du solide dans le but d'effectuer les bonnes opérations.

Ce principe général pour aborder la notion de volume est apparu comme absent des préoccupations des enseignants et des programmes. On retrouvera donc en filigrane tout au long de mon exposé le leitmotiv : **mais où sont les formules ?**

On comprendra que l'approche retenue tout en faisant raisonner les formules vise, entre autres, à **réduire le nombre de formules à mémoriser**. Il remet donc en question la pratique qui consiste à fournir aux élèves de longues listes de formules avec l'intention ambiguë qu'ils les mémorisent, les questionnaires d'examen rappelant souvent les formules à savoir !

Même si le volume peut être considéré comme une grandeur, **il n'a jamais été défini comme grandeur** dans la séquence que j'ai élaborée.

En fait, c'est en classe de didactique que la notion de grandeur a fait l'objet d'une analyse fine non pas pour l'introduire aux élèves, mais plutôt pour en examiner la richesse et la complexité afin de planifier et de réaliser un apprentissage rationnel et efficace.

Un bref retour historique

Il n'est pas facile de proposer une définition de la notion de grandeur tant la notion a évolué au cours des siècles. Il est bien connu que les Grecs ont été profondément bouleversés devant l'impossibilité d'exprimer la longueur de la diagonale d'un carré comme le rapport de deux entiers. Il est par contre moins bien connu (Fréchet,

Cet article, paru dans le bulletin de l'AMQ -oct 97- est le résultat d'une réflexion amorcée par l'auteur dans un cours de didactique présenté à l'Université du Québec à Montréal et à l'IUFM de Lyon.

1997) que cette découverte fut à l'origine d'une nouvelle mathématique: celle des grandeurs. En effet, à côté de l'arithmétique des nombres abstraits s'imposait alors la construction d'une arithmétique des longueurs de lignes (aujourd'hui appelées segments) qui, tout aussitôt, se généralisera aux surfaces et à l'espace.

En fait, l'image idéale, le modèle abstrait que les philosophes grecs se faisaient du monde s'effondrait avec cette incapacité à "mesurer avec des rationnels" certaines réalités du monde observable.

Tout au long de l'histoire, «*grandeur*» a toujours été opposé à «*nombre*» ou quantité et, petit à petit, la situation est venue se compliquer avec le développement de la physique qui introduisit des grandeurs-produits, des grandeurs-quotients.

Terminons là cette digression historique pour analyser à sa source l'éclosion et le développement de la notion de grandeur.

Grandeur et mesure

Genèse de la notion de grandeur

Réaliser une analyse conceptuelle de la notion de grandeur commanderait normalement que, d'entrée de jeu, on en formule une définition unique.

Or, il apparaît que toutes les sources consultées sont loin de présenter une unanimité sur le sujet. En fait, cette différence d'opinion est en partie due à l'évolution « historique » du concept de grandeur. Pour bien illustrer les différences de « points de vue », examinons la figure 1 qui illustre les activités mentales présentes dans les exercices ou problèmes impliquant des grandeurs.

Elles font intervenir 3 domaines différents. a) Il n'y a pas de grandeur sans «réalité concrète», sans objet ou phénomène à observer ou à étudier.

Cette «réalité» est présentée selon des modalités très diverses: simulation, dessin, maquette ... et revêt souvent des formes

abstraites inspirées de la réalité.

Par exemple, le rectangle et la sphère sont deux objets idéaux qui n'existent que dans la pensée mais qui sont inspirés de l'examen d'une réalité «externe».

b) Ces objets ou phénomènes sont examinés pour une caractéristique propre qui leur appartient. Cette caractéristique a la propriété d'être quantifiable ou mesurable. Il faut également que cette caractéristique soit «additionnable», ce qui rend le produit par un scalaire possible.

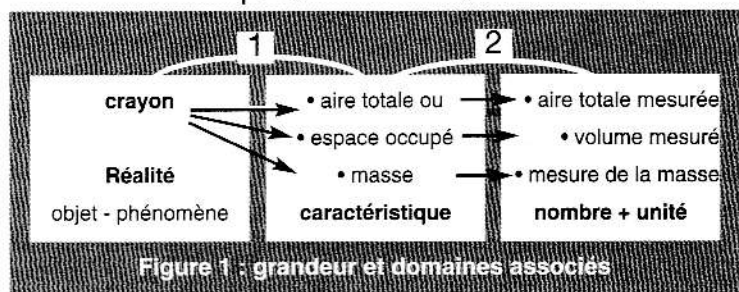
c) A certaine caractéristique de ces objets, on peut associer un nombre accompagné d'une unité, nombre qui est le résultat de la mise en œuvre d'une méthode et du choix d'une unité de référence (appelé unité de grandeur).

Par exemple, si a) l'objet considéré est un rectangle de 2 cm par 5 cm, on examine b) sa surface pour pouvoir établir que c) son aire est de 10 cm².

Cet exemple nous fournit l'occasion de mettre en évidence la difficulté qu'il y a à désigner par des termes génériques les éléments de b) et de c). On aura noté que, dans le cas présent, j'ai distingué surface et aire.

Le schéma de la figure 1 illustre que trouver un volume ou une aire requiert un double processus. D'abord se cache sous cet exercice intellectuel, une **identification** de la caractéristique concernée à partir de l'objet phénomène concerné.

Dans le cas d'un crayon, il peut s'agir du volume, de la masse, de l'aire



totale, de la longueur... Ensuite, dans un deuxième temps se met en branle une **opération d'assignation d'un nombre accompagné d'une unité**, ce qui suppose le choix d'une unité.

Cette décomposition en deux temps

de la démarche mentale requise pour résoudre les problèmes de grandeur nous permet de bien illustrer la complexité de la tâche et de bien montrer les difficultés que les élèves rencontrent.

Où est la grandeur ?

Doit-on distinguer la caractéristique-à-quantifier de la caractéristique-quantifiée (le nombre avec unité obtenue)? En d'autres mots, doit-on distinguer, par exemple, l'aire du rectangle ABCD et sa valeur : 10 cm ? Selon la brochure de l'Apmep (1982: Tome VI), les deux notions ne sont pas distinguables et ne doivent pas être distinguées car 10 cm² n'est qu'une manière particulière d'exprimer l'aire du rectangle.

Bref, 1 cm² est l'aire d'un rectangle particulier et cette aire se retrouve 10 fois dans le rectangle ABCD. N'écrit-on pas en effet: aire de ABCD = 10 cm² !

La grandeur est donc à la fois la caractéristique-à-quantifier et la caractéristique-quantifiée.

Par contre, selon une autre doctrine pédagogique, cette distinction s'impose à un point qu'il faille introduire des termes différents pour désigner ces deux notions. Ainsi, selon ce point de vue, la notion d'aire (la caractéristique-à-quantifier) doit être distinguée de la notion de surface (caractéristique-quantifiée) ; celle d'espace occupé, de la notion de volume. Pour les tenants de cette tradition, le rectangle ABCD a une surface dont l'aire est 10 cm². En d'autres mots, l'aire de la surface du rectangle ABCD est 10 cm² et non pas l'aire du rectangle ABCD. On ne parle donc plus de l'aire du rectangle mais de l'aire de la surface (même ceux qui adhèrent à cette manière de faire s'empressent d'auto-riser l'abus de langage qui consisterait à dire seulement : aire du rectangle).

Cette position va par ailleurs dans le sens de la tradition mathématique qui veut que l'on associe des **valeurs** aux grandeurs ou encore que **l'on exprime les grandeurs selon des unités**. La tradition établit donc une dichotomie entre la caractéristique-à-quantifier et le nombre qui lui est associé. Cependant, elle n'impose pas de mots différents pour désigner ces deux entités. Il n'y a donc qu'un pas à fran-

chir pour donner deux noms différents à ces deux entités.

Mais plutôt que de distinguer surface et valeur de la surface, volume et valeur du volume (par exemple), cette pédagogie a opté, et on le voit dans les manuels, pour différencier surface et aire en précisant que l'aire est la mesure de la surface.

L'aire n'est donc pas la valeur de la surface mais bien la mesure de la surface. On note donc l'usage du terme « mesure » qui vient compliquer les choses. En revanche, cette même pédagogie considère le volume (caractéristique-quantifiée) comme étant la mesure de l'espace-occupé (caractéristique-à-quantifier). D'ailleurs, l'écriture symbolique fonctionnelle ($f(x)$) encourage ce type de désignation.

N'est-il pas facile d'écrire, par exemple, $m(\text{angle}) =$ ou encore $\text{aire}(\text{surface}) =$?

Cependant, la brochure de l'Apmep, qui analyse les relations entre grandeurs et mesures, relève une incohérence dans cette manière de faire.

En effet, la mesure doit être définie comme étant le nombre « qui établit la comparaison » entre l'unité et la grandeur considérée. Dans 10 cm², la mesure est le nombre 10 qui est le α dans l'égalité :

Aire du rectangle ABCD = α fois l'unité (cm²).

On constate donc que, d'une part, le volume ne saurait être la mesure d'un espace occupé, car le volume s'exprime avec des unités et la mesure ne comporte aucune unité ; mais que, d'autre part, ne pas distinguer entre la caractéristique-à-quantifier et la caractéristique quantifiée-par-rapport-à-une-unité engendre aussi d'autres problèmes quand il s'agit de discourir sur les exercices à résoudre.

La brochure de l'Apmep expose une variété d'expressions qui traduisent les conséquences de cette dualité : caractéristique-à-quantifier versus résultat de cette quantification (caractéristique quantifiée). Malheureusement, elle laisse croire que ces ambiguïtés peuvent être levées en proposant une exposition et un vocabulaire corrects.

En bref, je souhaiterais que l'enseignement prenne en compte qu'il faut adopter une position inévitablement « ouverte » face aux notions de grandeur, valeur d'une

grandeur, mesure d'une grandeur, position qui laisse une large place à l'exploration des objets ou phénomènes sous-jacents. Par ailleurs, toute cette discussion paramathématique ou métamathématique provoquée par l'étude du schéma de la figure illustre bien les pièges qui guettent l'enseignant qui tiendrait à exposer les tenants et aboutissants de toutes les subtilités de langage que je viens de relever.

La position adoptée dans la séquence d'enseignement

Au moment de la mise en œuvre de la séquence d'enseignement présentée à la section 5, la réflexion précédente n'était pas aussi exhaustive bien que l'analyse des processus cognitifs mis en branle indiquait déjà la complexité des notions sous-jacentes. Le volume n'a pas été introduit comme une grandeur, ainsi, tout le questionnement sur les grandeurs en général fut automatiquement écarté.

Par contre, la distinction entre volume et espace occupé fut retenue avec comme conséquence que le volume fut identifié à la mesure (avec unités) de l'espace occupé.

Dans l'analyse qui suit, je ne tenterai pas de faire la promotion d'une position particulière sur ce qu'il faut dire et ne pas dire. **Je retiendrai** un vocabulaire (à usage interne : entre nous !) qui me permettra d'exposer les processus sous-jacents et les difficultés en rapport avec la notion de volume.

Ainsi, dans ce qui suit, j'utiliserai indifféremment :

- 1) « caractéristique à quantifier » et grandeur et d'autre part
- 2) « nombre accompagné d'une unité » et grandeur quantifiée tel que le montre la figure 2 qui reprend le schéma -figure 1- avec certaines précisions.

On aura remarqué que j'ai préféré « quantifier » à mesurer simplement pour ne pas renvoyer le lecteur à son bagage culturel (mathématique) qui accompagne la notion de mesure !

Je rappelle que ce schéma nous permet de distinguer deux pro-

cessus généraux de pensée.

D'abord, le passage de l'objet à la caractéristique : **l'identification** d'une caractéristique. Il s'agit ici de retenir, de choisir, d'envisager une caractéristique à partir de l'observation d'un objet-phénomène ou encore de la considération d'un objet-phénomène.

Rappelons que la diversité des modes de représentation de ces objets-phénomènes peut rendre cette identification complexe.

Dans un deuxième temps, il faut procéder à **l'assignation d'un nombre accompagné d'une unité** à la grandeur retenue. Il faut bien entendu retenir une unité et procéder de manières fort diverses à cette recherche.

Le volume : raisonnements et difficultés

Toute didactique d'une grandeur quelconque doit s'élaborer par rapport à ce qui est exigé des élèves en fin de course. C'est en effet la variété et la complexité des problèmes exigeant le recours à une grandeur qui déterminera les apprentissages à mettre en place.

Le schéma de la figure 2 est alors fort utile et très éloquent. Pour cet article, j'ai fait le choix d'ignorer explicitement cette dimension et d'aborder la question des obstacles et difficultés dans un cadre plus large. En bref, je passe sous silence quatre éléments qui m'apparaissent fondamentaux. Certains problèmes ne demandent que de comparer et non pas de mesurer. Ils sont plus ou moins complexes selon le nombre d'opérations qu'ils exigent.

La structure même d'un problème ne peut déterminer à elle seule les obstacles des élèves car au moment de le résoudre, ils disposent de moyens issus de

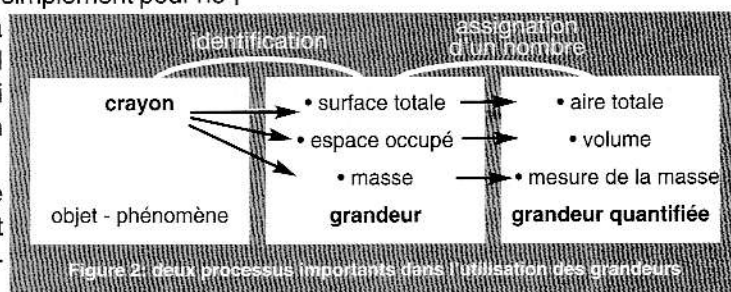


Figure 2 : deux processus importants dans l'utilisation des grandeurs

leurs apprentissages antérieurs. A ces obstacles, que Guy Brousseau désigne comme didactiques, s'ajoutent des difficultés liées aux nécessités du cheminement à suivre dans l'appropriation de connaissances. Les obstacles épistémologiques sont incontournables; ils proviennent de connaissances antérieures à renouveler, à amender, car ils deviennent inconciliables avec les nouvelles à acquérir.

L'emploi des mots et des notations

La figure 2 illustre très bien les problèmes de désignation soulevés précédemment. En effet, dans la perspective classique (celle de la brochure de l'Apmep), la caractéristique et la grandeur mesurée sont une seule et même chose. Il n'y a pas lieu d'introduire d'autres vocables. Par contre, cette décision est toute mathématique ou logique et ne reflète pas la réalité psycho-cognitive sous-jacente. Il est non seulement possible mais aussi conforme à une certaine logique de considérer indépendamment de toute unité la caractéristique à mesurer, ce qui inévitablement lui donne un statut particulier. Même si la cohérence mathématique permet de passer outre à cette distinction, on ne peut empêcher l'esprit de produire "naturellement" cette distinction.

Le vocabulaire contemporain distingue surface et aire, segment et longueur, espace occupé et volume, l'angle et la mesure d'angle. Il est bien connu que la grandeur et «sa valeur» par rapport à une unité sont souvent confondues dans le vocabulaire courant : ainsi la surface désigne à la fois la caractéristique d'un objet et la mesure de cette caractéristique. Il en est ainsi des angles. Même si, en pratique, on distingue un angle et sa mesure en disant un angle de α degrés, l'écriture laisse souvent subsister l'ambiguïté quand, par exemple, on écrit $\alpha = 30^\circ$.

Oublions que cette écriture est courante dès que l'on remonte un tant soit peu dans le passé. En effet, comme l'a montré Frechet (1997), il est possible de considérer plusieurs arithmétiques de grandeurs confondant grandeur et valeur de grandeur. Aujourd'hui, on fait la somme de mesures d'angle ou la somme de mesures de surface. En fait, l'histoire nous montre que faire la somme peut nous forcer à remonter aux objets abstraits. Ainsi, quand on fait, par exemple, la somme de surfaces

ou la somme d'aires, c'est plutôt la somme de figures que l'on réalise avec les conséquences pour la caractéristique aire. Suite à cette analyse sommaire, un premier principe semble s'imposer: l'introduction de la notion de volume exige beaucoup de tolérance et ouverture d'esprit par rapport aux vocabulaires utilisés et aux notations qui en découlent.

Le recours aux grandeurs apparentées

Le premier obstacle qui se pose à la résolution d'un problème de grandeurs est la confusion qui peut prévaloir lors de l'**identification** de la grandeur à considérer. D'abord, cette identification n'est pas un processus simple, car, dans un premier temps, les enfants doivent, sollicités par des questions et par les démarches d'autrui, se construire un premier concept de la grandeur concernée qui est appelée à se développer. C'est ainsi par exemple que l'élève peut glisser d'un concept vers l'autre étant donné son peu de familiarité avec les objets qu'il manipule.

L'expérience a montré que, dans une tâche de **comparaison de volumes**, les élèves peuvent succomber aux interférences provenant de l'aire des objets à comparer tout comme à leur longueur. Par exemple, les deux cylindres formés par une feuille 21x29,7 cm pliée dans le sens de la largeur et dans le sens de la longueur sont considérés comme ayant même volume par la quasi-totalité des élèves de la classe. Il n'est pas question bien entendu de considérer ces difficultés comme étant toujours provoquées par des confusions entre aire totale (ou latérale) et volume. Il s'agit bien d'une interférence qui opère localement dans un acte de pensée; les grandeurs les plus familières s'imposant au détriment de celle en construction.

Quelquefois, c'est dans la démarche qui conduit à assigner un nombre à une caractéristique que le dérapage se produit. Lors de l'expérience, une élève à qui on demande de trouver le nombre de cubes dans un parallélépipède rectangle «trouve» le nombre de carrés qui entourent le solide plutôt que le nombre de cubes qui constituent le solide.

Il faut donc que l'apprentissage de la notion

de grandeur, par exemple, réserve une place importante aux confusions entre grandeurs surtout lorsque les exercices n'exigent pas de fournir une grandeur quantifiée.

De l'usage irréfléchi des formules

A ces difficultés s'ajoutent celles dues à la nécessité d'assigner une valeur au volume ou à la grandeur considérée. Il faut comprendre que l'assignation d'une valeur numérique à une caractéristique d'un objet phénomène peut s'effectuer selon plusieurs modalités. Mais, en réalité, dans la majorité des cas, on assigne une valeur numérique à la caractéristique retenue à l'aide d'une **formule** qui fournit une recette symbolique conduisant «mystérieusement» à la bonne réponse. Lorsqu'il s'agit de comparer les caractéristiques de deux objets-phénomènes, la difficulté peut devenir plus grande,

s'accroître du fait que la comparaison doit s'effectuer sans formule ou encore donner lieu à la mémorisation d'autres formules. Un des obstacles didactiques rencontrés par les élèves provient d'une conception dominante chez les enseignants par rapport à la nature et au rôle des formules. Pour la grande majorité des enseignants, le volume et les aires sont deux sujets faciles à enseigner. Il s'agit simplement de bien montrer comment fonctionnent certaines formules qu'autrefois on faisait mémoriser et, qu'aujourd'hui, on fournit en début d'année et qu'on redonne aux examens.

D'autant plus que cette conception vient «renforcer» l'apprentissage empirique que les élèves «ont subi» à propos des aires et des volumes dans l'enseignement primaire. A ce niveau, les formules sont données et vérifiées dans un nombre fini de cas, à l'aide de tableaux de nombres, d'où le caractère empirique qu'il assigne à la démarche. Tout se passe comme si chaque formule avait donné lieu à une révélation (divine !) mais vérifiable et non pas comme si elle pouvait résulter d'un examen systé-

matique et rationnel des objets phénomènes.

D'abord, les élèves ont retenu que les formules «**ça se comprend pas**» et, ensuite, que pour trouver un volume, une aire, il faut prendre une formule (à moins que l'on demande de trouver le nombre de petits rectangles dans un triangle, ce qui n'est pas souvent associé à un problème d'aire).

D'ailleurs, les enseignants du secondaire ne sont pas insensibles aux difficultés de leurs élèves. Il suffit de les interroger pour s'apercevoir qu'ils ont conscience que ce type d'enseignement entraîne facilement des dérapages. Par exemple, les «problèmes à contexte» n'indiquent pas toujours la grandeur à trouver et encore moins la formule.

Lorsqu'un exercice ne présente qu'un dessin, les élèves ont de la difficulté à y retrouver «ce» qu'exige une formule. Lorsqu'il s'agit de comparer, les formules sont «dangereuses» ! Bref, il est bien possible que les enseignants s'assurent «localement» que leurs élèves ont des résultats satisfaisants mais c'est malheureusement sans compter

les difficultés qu'ils rencontreront éventuellement n'ayant pas eu l'occasion d'enrichir leur concept d'aire ou de volume. Bref, une pédagogie différente s'impose, mais laquelle ? Il faut donc **contrer un recours irréfléchi aux formules** et changer leur conception de la notion de formule implicitement imposée par une tradition pédagogique qu'il faut rejeter.

Une séquence d'apprentissage qui restitue le rôle de la formule

Cette séquence comporte trois grandes étapes.

D'abord, les élèves doivent oublier les anciennes formules sans signification et repartir d'une exploration de l'espace qui les conduise sur de nouvelles pistes.

Dans un deuxième temps, ils se donneront une méthode de dénombrement des unités de volume pour un pavé, méthode dont ils étudieront les particularités. Cette méthode deviendra leur formule de base qui sera généralisée à une grande famille de solides grâce à la mise à contribution du principe de

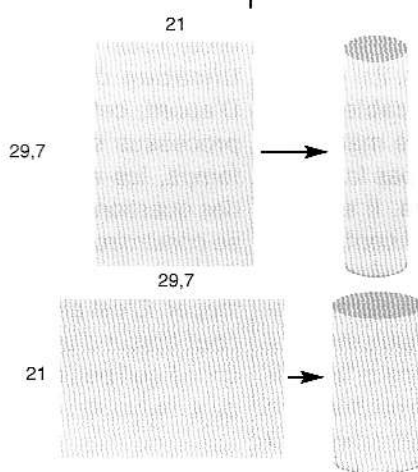


Figure 3

Cavalieri.

Finalement, c'est l'analyse des pyramides et le recours à des raisonnements mettant en jeu des objets-limites qui compléteront la séquence.

Avant les formules : familiarisation avec le volume

a) Exploration de l'espace et de ses représentations

Donner un sens aux formules de volume exige dans un premier temps que les élèves se familiarisent avec les objets-phénomènes sous-jacents. Il faut que les élèves puissent mentalement se représenter le volume comme une caractéristique-à-quantifier. Or, il faut s'assurer qu'ils maîtrisent suffisamment les habiletés reliées à l'appréhension des objets spatiaux. Leur formation antérieure doit être mise à jour par des activités nombreuses de représentations. Le cahier (Janvier, 1994) qui accompagne la vidéo distingue trois types d'activités qui favorisent l'exploration de l'espace : celles qui ne s'appuient pas sur un modèle, d'autres qui exigent le recours à un modèle et quelques activités qui ne tombent pas dans ces 2 catégories.

b) Retour à la notion d'aire

L'expérience de la vidéo ayant respecté le programme de l'époque, la démarche la plus délicate a consisté à rappeler la notion d'aire (vue en début d'année) sans insister sur les réflexes de manipulation des formules préalablement acquis. Les quelques exercices de "révision" proposés ont astucieusement demandé de décomposer les solides de manière à ne recourir qu'aux formules élémentaires de la «géométrie du plan». Déjà dans un premier temps, quelques formules d'aire «dans l'espace» furent démystifiées. Mais le travail de compréhension des formules d'aire dans le plan n'a pas fait l'objet d'enseignement.

c) Bien cerner la caractéristique retenue : différenciation des grandeurs assimilables par conflits cognitifs

Un retour au schéma de la figure 2 nous permet de constater que jusqu'ici les activités retenues ont permis aux élèves de **se familiariser avec les objets aux-**

quels on assigne la caractéristique volume et avec l'aire comme une de ces caractéristiques.

Le processus d'identification illustré sur le schéma ne se réalise pas sans difficulté telle que nous l'avons mentionné précédemment.

Le volume est donc souvent confondu avec l'aire totale, le poids, ...

Simultanément ou faisant suite au travail d'exploration de l'espace s'imposent donc des exercices de mise à l'épreuve de la robustesse du concept de volume développé antérieurement. Les étudiants se vront alors proposer des exercices qui les mettront dans une situation de conflit cognitif car ils auront à actualiser un processus d'identification de caractéristique d'un solide dans un contexte de comparaison. Le conflit résulte d'un choix implicite qu'ils ont à faire entre diverses caractéristiques. Trois situations conflictuelles sont proposées dans la séquence d'enseignement.

1. On demande aux étudiants de comparer le volume de deux cylindres construits devant eux avec des feuilles de dimension standard.

Un cylindre est construit en enroulant la feuille dans le sens de la longueur, l'autre est formé en l'enroulant dans le sens de la largeur. La grande majorité des élèves estime que les volumes de chaque cylindre seront identiques. Ils suivent une loi implicite selon laquelle deux solides ayant même aire latérale ont même volume. (figure 3)

2. Dans une deuxième activité, les élèves sont invités à comparer un pavé construit de blocs de Lego et un bâton fait d'autant de blocs. Un certain nombre d'élèves sont tentés par les dimensions linéaires et répondent que le bâton "a plus de volume".

3. Une troisième activité vise à démêler les notions de contenant et de contenu.

Ces activités amènent les élèves avec l'enseignant à préciser ce qu'on entend par volume, par espace occupé, par mesure. Elles permettent donc d'approfondir le concept en faisant prendre conscience de certaines de ses propriétés et en établissant certains liens avec des caractéristiques "voisines".

Donc, dans un premier temps, s'imposent des activités de ce type qui conduisent à cerner la caractéristique que l'on veut quanti-

fier ou mesurer : l'espace occupé. En fait, j'estime que toute approche cohérente à la notion de volume doit forcer l'exploration de nombreuses transformations d'objets-phénomènes qui amènera les élèves à reconnaître celles qui conservent **invariante** la caractéristique "espace occupé". C'est cette idée qui est exploitée à fond dans les trois activités mentionnées ci-dessus. Jusqu'ici la séquence d'enseignement n'est pas allée au-delà de la comparaison en solides. Les élèves n'ont pas été confrontés à la nécessité de quantifier, de mesurer qui sera amenée dans la prochaine étape.

-Élaboration d'une formule de base ou la systématisation du dénombrement des unités

L'objectif général étant savoir raisonner les formules (de volume), la "mise au point" d'une première formule est un instant crucial dans le déroulement de la séquence.

L'organisation de la séquence doit être telle que les élèves qui connaissent la formule **$V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$** (dont le statut n'est rien d'autre qu'un produit machinal associé à $V = a \times b \times c$) en soient temporairement écartés, le temps qu'il faut, pour qu'ils ajustent leurs conceptions en rapport avec la notion de formule et, qu'ils associent au volume du pavé (prisme droit à base rectangulaire) l'idée d'un dénombrement systématique et raisonné et, ainsi, contrer les difficultés qu'entraîne l'usage irréflecti des formules.

a) Dénombrement systématique et raisonné des cubes de sucre selon les dimensions de la boîte et par la méthode des tranches

Pour ce, il nous est apparu nécessaire de "poser le problème du volume" en contexte ce qui chasse les formules "mal" apprises et exige un travail authentique de dénombrement systématique. C'est ainsi que la situation suivante fut proposée aux élèves, l'enseignant disposant du matériel requis pour appuyer sa présentation.

Une compagnie se spécialise dans la vente de sucre en cubes. Elle utilise actuellement des boîtes des 120 cubes de sucre. Le directeur aimerait changer la forme de la boîte dont refond permet de disposer une tranche de 60 cubes tout en gardant le nombre de cubes à 120.

On constate que la démarche de

dénombrement imposée implicitement par l'énoncé de la situation conduit les élèves avec l'enseignant à se donner la méthode suivante (qui ne s'appelle pas encore formule) et qui apparaît rapidement à la relation :

$$\begin{aligned} &\text{nombre de cubes dans la boîte} \\ &= \text{nombre de cubes dans la 1ère} \\ &\text{tranche} \times \text{nombre de tranches} \end{aligned}$$

Ainsi, cette méthode sera utilisée «à toutes les sauces» dans le questionnaire qui suivra et qui conduira à établir dans le contexte des boîtes de sucre les relations entre le nombre de cubes dans la boîte et les dimensions en côtés de cubes de la boîte ; pour l'instant, les dimensions des cubes de sucre n'ont pas été évaluées en cm.

L'exploration de cette relation sera poussée jusqu'à s'interroger, par exemple, sur la validité de la méthode avec des fractions (décimales ou non) de tranches. La classe pourra «conclure», non pas empiriquement, mais bien en raisonnant sur les conséquences de fractionner une tranche, que la méthode de dénombrement est efficace même avec des fractions de tranches.

Les élèves concluent cette première étape en modifiant scalairement les dimensions de la boîte et en faisant fonctionner cette méthode avec des questions telles : «*Qu'arrive-t-il au nombre de cubes si je double le nombre de tranches, si les tranches sont trois fois plus larges ?...*»

b) Passage des cubes de sucre par tranche aux cm^3 par tranche dans le prisme droit

L'étape suivante consiste à appliquer la méthode des tranches pour trouver le nombre de cm^3 dans divers solides proposés aux élèves. D'abord, en partant de prisme droit à base rectangulaire, les élèves induiront la méthode suivante qui pourra être désignée comme une formule selon les discussions menées en classe.

$$\text{nombre total de } \text{cm}^3 = \text{nombre de } \text{cm}^3 \text{ d'une tranche} \times \text{nombre de tranches}$$

Cette démarche repose sur la notion de «nombre de cm^3 dans une tranche», notion qui devra donner lieu à une verbalisation constante forçant les élèves à y recou-

rir. Elle permettra de trouver le nombre de cm^3 dans des prismes dont la base est un parallélogramme, un triangle, un trapèze et même un cercle. A chaque coup, l'idée qui est bien comprise consiste à trouver une technique pour dénombrer le nombre de cm^3 dans une tranche.

C'est ainsi que les élèves auront développé l'idée que pour trouver le nombre de cm^3 (le volume en cm^3) d'un solide le découpage en tranche du solide est une technique très efficace. Si on revient au schéma de la figure 2, on constate qu'on est revenu dans le domaine des objets dont on veut quantifier la caractéristique volume et que le calcul rationnel de ce volume exige une transformation mentale des solides qui donne un sens à la caractéristique. Nous avons constaté durant l'expérimentation que leur appréhension des solides s'est littéralement métamorphosée comme nous le verrons dans ce qui suit.

c) Le dénombrement des cm^3 dans les solides obliques et introduction au principe de Cavalieri

C'est ainsi que les élèves ne sont pas désarçonnés lorsque les solides dont on cherche le volume ne sont plus «droits» mais inclinés tout en gardant constamment la même section horizontale. Des empilages de feuilles de forme carrée, rectangulaires, circulaires... fournissent des solides inclinés, spiralés, torsadés... de toutes sortes. Et les élèves en appliquant leur méthode expriment leur conviction que l'on peut transformer un solide biscornu (formé de feuilles ou non) en un solide droit sans changer le volume, car les tranches sont les mêmes. Certains suggèrent même de prendre des tranches de plus en plus minces. La formule des tranches reste donc valide.

Ils sont persuadés que deux solides «qui ont les mêmes tranches» (même s'il faut les prendre minces !) ont même volume. Il devient donc facile à l'enseignant de donner une forme rigoureuse à ce principe en précisant la formulation qu'en a donné Cavalieri (1598 1 647):

Deux solides ont même volume si les figures déterminées par les intersections avec chaque plan tracé parallèlement à la base ont même aire.

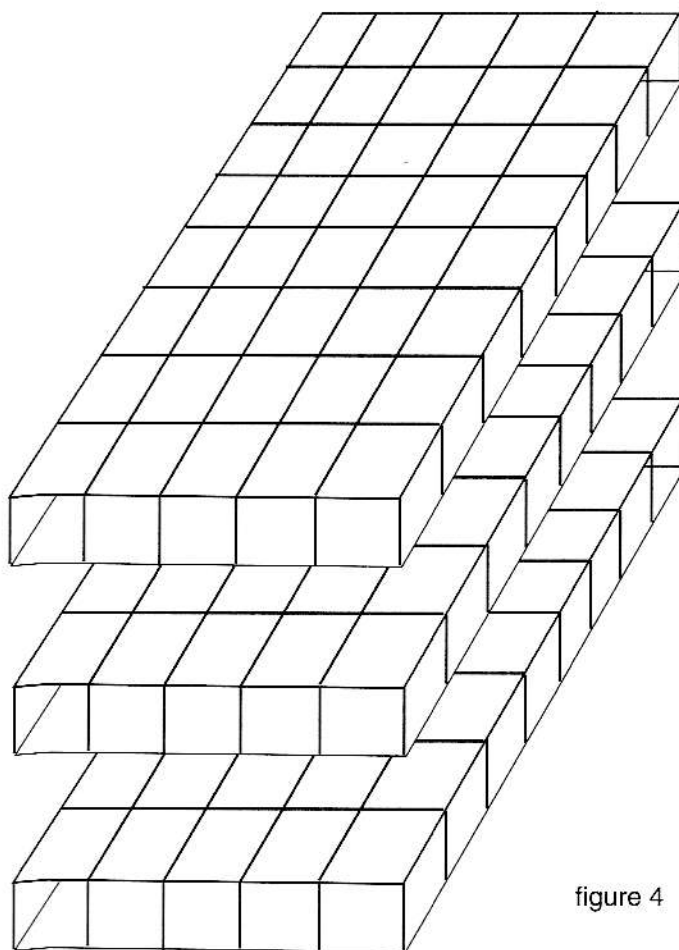


figure 4

d) Introduction de la formule standard ?

On aura constaté que l'introduction des cm^3 n'a pas été accompagnée par une présentation simultanée de la formule dite standard:

**Volume = aire de la base
x la hauteur.**

Il faut constater que cette formule fait disparaître l'unité de base qui est le cm^3 , ce qui n'est pas sans conséquence pour le développement du concept de volume. Cependant, l'institutionnalisation du concept commande que l'on en arrive à cette formule standard à un moment approprié qui relève d'un choix didactique commandé par un juste équilibre entre la familiarisation avec le concept et l'efficacité de l'usage éventuel des formules standards. De toute façon, tout comme un pli ne cesse de marquer une feuille peu importe la technique de dépliage utilisée, la méthode des tranches restera toujours présente à l'esprit de ceux qui l'auront utilisée dans leur élaboration du concept de volume.

Dans la séquence d'enseignement,

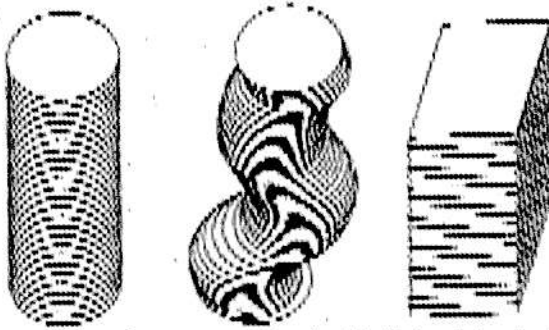


Figure 5

nous avons choisi d'introduire la formule standard juste avant l'introduction des solides obliques et bizarroïdes. Cependant, à mon avis, le comment importe autant que le moment.

e) Introduction de la formule standard ?

La formule de base fournit une méthode pour trouver le volume d'un pavé en cm^3 en considérant des tranches identiques du solide constituées de cm^3 (et, éventuellement une fraction de tranches) et en dénombrant ces tranches.

Je rappelle que la méthode ou la formule établie jusqu'ici s'énonçait:

$$\text{nombre total de cm}^3 = \text{nombre de cm}^3 \text{ d'une tranche} \times \text{nombre de tranches}$$

Il faut donc «convaincre» les élèves que :

1- le nombre de cm^3 par tranche peut être mis en correspondance avec le nombre de cm^2 de la base et

2 - le nombre de tranche de cm^3 peut s'évaluer à l'aide de la hauteur du solide.

Pour ce, les élèves doivent s'interroger avec l'enseignant sur les deux correspondances. La vidéo montre donc qu'il faut retourner à un pavé et mettre en correspondance une tranche et une base quadrillée en cm^2 . Il est évident qu'à chaque cm^3 correspond un cm^2 et inversement. Ce discours doit nécessairement s'appuyer sur un matériel pertinent. C'est dans le même

esprit que la hauteur du pavé sera assimilée au nombre de tranches.

Ainsi, le passage de la formule de base à la formule standard peut s'effectuer selon des deux étapes illustrées à la figure 6.

Toute cette démarche doit converger vers une formule qui sera utilisée tantôt en utilisant les abréviations ($V = A \times h$) mais aussi souvent en conservant la désignation en mots des grandeurs, à savoir: Volume = aire de la base x hauteur.

Au terme de l'introduction de la formule standard, il ne reste plus qu'à proposer aux élèves toute une série d'exercices visant à consolider les acquis antérieurs dans une perspective institutionnelle. Je rappelle que l'approche de la séquence d'enseignement propose un détour par une formule de base pour pouvoir raisonner les formules et donner un sens aux calculs commandés par les formules classiques. L'introduction de cette formule de base n'est donc pas simplement le fruit d'une fantaisie pédagogique mais témoigne plutôt d'une intention didactique de favoriser chez les élèves une meilleure appréhension de l'espace grâce à une élaboration plus rationnelle et riche des concepts de volumes et d'aires.

f) Les conversions d'unités: jeu d'enfant

Avant de passer aux «solides à pointes», les traditionnels exercices de changement d'unité ou ceux où les données sont fournies dans des unités diverses sont abordés de manière très différente. Les tableaux habituels de transformations d'unité ne sont plus nécessaires. La plus grande visualisation que les élèves ont développée fournira à l'enseignant l'occasion de poser le «problème» des changements d'unités en revenant aux solides qui peuvent représenter ces unités. La question de savoir «combien il y a de cm^3 dans un dm^3 ?» est équivalent à se demander «combien de tranches de 100 cm^3 , il y a dans un dm^3 ?». Le nombre de cm^3 dans un dm^3 est donc $10 \times 100 = 1000 \text{ cm}^3$.

$$\begin{aligned} \text{nombre total de cm}^3 \\ &= \text{nombre de cm}^3 \text{ x nombre de tranches} \\ &\quad \text{d'une tranche} \\ \text{volume en cm}^3 \\ &= \text{aire de la base x hauteur en cm} \\ &\quad \text{en cm}^2 \end{aligned}$$

Figure 6

La pyramide

La prochaine étape consiste à développer longuement et minutieusement une étude de la pyramide et de son volume.

a) Décomposition d'un prisme droit à base triangulaire en trois pyramides

Cet épisode de la démarche commence par la "démonstration" en classe avec du matériel déjà préparé illustrant la décomposition possible d'un cube en trois pyramides à base carrée de forme identique. Ainsi, pour ces pyramides spéciales, on trouve un volume qui est le tiers du volume du cube.

Quand est-il, si on considère un prisme droit à base triangulaire ? Est-il décomposable en trois pyramides ayant même volume ? Cette décomposition est périlleuse et difficile et ne peut pas être réalisée simplement en produisant un dessin qui illustre le fait !

C'est la raison pour laquelle il est nécessaire de guider les élèves avec du matériel bien pensé de manière à leur faire reconstruire un prisme avec trois pyramides qu'ils auront préalablement préparées à la maison. Les faces de ces pyramides peuvent être bien identifiées par des lettres ce qui facilitera d'autant la reconstruction du prisme. Mais les trois pyramides obtenues ont-elles même volume ?

b) Retour au principe de Cavalieri

En comparant les trois pyramides avec les élèves, l'enseignant lance l'idée selon le degré de préparation révélé par la discussion que :

évidemment cette idée à ce stade ne peut pas s'appuyer sur une quelconque formule du volume des pyramides.

**Toutes les pyramides
ayant des bases d'aire égale
et même hauteur
ont le même volume.**

Le sommet de cette pyramide déformable est fixé à une tige que trois côtés d'une boîte de carton (d'emballage) contraignent à être déplacé dans un plan. Cette boîte de carton est ouverte du côté de la classe. En déplaçant le sommet, on obtient donc toute une famille de pyramides ayant même base et même hauteur. La question du volume constant peut donc être posée dans ce cadre qui ajoute au sens de l'invariance.

Ce sont les élèves qui insistent pour qu'on applique le principe de Cavalieri. Si les tranches ont même aire, alors toutes ces pyramides ont même volume. Cette démonstration est loin d'être facile même si

elle n'exige que le recours au théorème de Thalès. Même les élèves qui ne suivront pas la finesse de cette dernière étape auront passé par le chemin de Cavalieri. Ceci m'apparaît comme une expérience mathématique significative.

c) Des pyramides à base triangulaire aux pyramides à bases polygonales ou aux cônes

Le volume des pyramides à base polygonale ne présente pas de problèmes pour les élèves. Leur exploration préalable de l'espace leur permet, en effet, de «visualiser» que comme tout polygone est décomposable en triangles, alors toute pyramide à base polygonale est décomposable en autant de pyramides à base triangulaire. L'enseignant s'assure alors que tout le monde voit bien que chaque pyramide a même hauteur et qu'il est possible de recourir à la distributivité pour établir que :

$$\begin{aligned}\text{volume} &= 1/3 (\text{vol. } P_1 + \text{vol. } P_2 + \text{vol. } P_3 + \dots + \text{vol. } P_n) \\ \text{volume} &= 1/3 (\text{Aire } B_1 \times h_1 + \text{Aire } B_2 \times h_2 + \text{Aire } B_3 \times h_3 + \dots) \\ &= 1/3 (\text{Aire de } B_1 + \text{Aire de } B_2 + \text{Aire de } B_3 + \dots + \text{Aire de } B_n) \times h \\ &= 1/3 (\text{Aire de la base polygonale}) \times h\end{aligned}$$

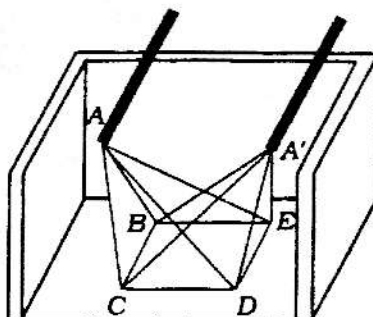


Figure 7

d) Le cône et la sphère: introduction du "raisonnement à la limite"

Il n'est pas difficile de constater que les élèves avec ou sans leur enseignement se convainquent vite que le cercle est obtenu à partir d'un polygone quand on augmente indéfiniment le nombre de côtés. Même s'ils affirment que le dédoublement à l'infini du nombre de côtés du polygone va conduire à un cercle, ils ne sont certainement pas à même d'apprécier la puissance ou la finesse de la théorisation du 19^{ème} siècle sur la notion de limite. D'un autre côté, le raisonnement du type encadrement-à-la-Archimède exige une capacité d'abstraction que

la majorité des élèves n'auront pas développée. Tout au plus savent-ils imiter les Newton et Leibniz (imiter, je dis bien) en manipulant avec maladresse et imprudence le vocabulaire de la limite. Faut-il pour autant les priver de cet outil de pensée qui, une fois installé, n'aura qu'à être amendé et resitué par rapport aux conditions qui valident son emploi ?

Nous avons estimé que la puissance du "raisonnement-à-la-limite" vaut la peine qu'on initie tous les élèves (même ceux qui ne se lanceront pas dans des carrières scientifiques) à son fonctionnement. Bien entendu, il faut pouvoir pour la circonstance bien dire les choses. Il n'est pas question d'introduire une métri que pour parler de convergence. Il m'apparaît important cependant d'introduire le processus-limite en mots et débloquer les élèves de l'objet limite.

Ainsi le discours devra insister sur le fait que la figure obtenue après chaque transformation **ressemble de plus en plus** à la figure considérée et qu'ainsi la caractéristique (grandeur) de cette suite

d'objets coïncidera avec celle de l'objet considéré à la limite. Éventuellement, ceux qui auront à poursuivre une carrière où la rigueur s'impose apprendront à respecter les conditions initiales qui garantissent de telles convergences. C'est ainsi que les formules du volume du cône et du volume de la sphère ont été établies.

Volume de chaque pyramide
= $\frac{1}{3}$ aire de la base x hauteur

• Volume du cône

A partir d'une construction qui illustre une pyramide à base polygonale régulière, l'enseignant indique que lorsque le nombre de côtés est augmenté, le volume du polygone obtenu est toujours le même:

Or les pyramides obtenues ressemblent de plus en plus à un cône. Alors les volumes obtenus, en dédoublant le nombre de côtés, seront de plus en plus près

$\lim \left(\frac{1}{3} h \times \text{aire} \right)$
= $\frac{1}{3} h \times \lim (\text{aire}) =$
 $\frac{1}{3} h \times \text{aire du cercle}$

du volume du cône qui est la figure-limite.

En fait, ce raisonnement porte sur

la propriété des limites. Les élèves en pratique utilisent l'argument suivant sans en prendre conscience:

Il ne m'apparaît pas judicieux de formaliser cette manière de faire.

De toute façon, la classe se retrouve donc toujours avec le même type de formule. Ce qui me suggère la remarque suivante:

Jusqu'ici les élèves n'ont eu que deux formules à mémoriser:

Volume = Aire de base x hauteur
Volume = $\frac{1}{3}$ (Aire de base x hauteur)

• D'un ballon de foot au volume de la sphère

Le volume de la sphère est traité d'une manière semblable. L'enseignant peut partir d'un ballon de foot qui est un icosaèdre tronqué (à faces incurvées).

En fait, l'icosaèdre tronqué qui est présenté aux élèves n'est pas une sphère, car les faces sont plates. Mais, on peut trouver le volume de ces icosaèdres, car ils sont décomposables en 12 pyramides à base pentagonale et en 20 pyramides à base hexagonale.

C'est alors qu'intervient un «raisonnement-à-la-limite» (plus subtil et moins probant). On établit que:

vol. icosaèdre = volume des pyramides à base pentagonale + volume des pyramides à base hexagonale
= $\frac{1}{3} (\text{aire } B_1 + \text{aire } B_2 + \text{aire } B_{12}) \times h_1$
+ $\frac{1}{3} (\text{aire } B'_1 + \text{aire } B'_2 + \text{aire } B'_{20}) \times h_2$

Alors, l'enseignant demande d'imaginer que chaque face est découpée en triangles dont les sommets sont sur la sphère circonscrite au ballon. Le processus est répété ad infinitum.

Ce sont les élèves qui affirmeront en mots (sans symbolisation) que :

lim (somme des aires de chaque base)
= **aire de la sphère**
lim (h_1) = lim (h_2) = rayon de la sphère

En conséquence, ils concluront que:

Volume de la sphère = $\frac{1}{3}$ aire de la sphère x rayon de la sphère

Ici, les élèves se donnent une troisième formule à mémoriser :

$$\text{Volume de la sphère} \\ = 1/3 (\text{Aire de la sphère} \times \text{rayon})$$

• Et l'aire de la sphère !

C'est sans doute ce que les collègues malicieux lanceront. En fait, les enseignements de la géométrie traditionnelle nous montrent que l'aire de la sphère n'est rien d'autre que l'aire latérale du cylindre qui entoure la sphère. Il existe une démonstration facile de ce théorème que l'on retrouve dans les manuels du début du siècle. Je ne pense pas qu'il soit par contre approprié de "lancer" cette démonstration aux élèves du secondaire. Par contre, cette affirmation leur permettra de calculer que :

$$\begin{aligned} \text{Aire de sphère} &= \text{aire du cylindre....} \\ &= \text{circonf.} \times \text{hauteur} \\ &= 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

qui pourra s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \text{Aire de sphère} \\ &= \text{aire de quatre grands cercles} \end{aligned}$$

Il devient donc possible de raffiner notre formule du volume de la sphère :

$$\begin{aligned} \text{Volume de la sphère} \\ &= 1/3 (\text{Aire de quatre grands} \\ &\quad \text{cercles} \times \text{rayon}) \end{aligned}$$

e) Et la suite

C'est normalement à la sphère que s'arrête le type de solide dont on cherche le volume. Ensuite, l'enseignement se porte sur des solides dits décomposables. Les élèves ont alors droit à se faire présenter des dessins d'objets dont un découpage pertinent permet de retrouver des solides « connus » et surtout les dimensions requises pour effectuer le calcul. Dans l'enseignement actuel, c'est souvent là que le bât blesse. Non pas que les élèves ne savent pas utiliser les formules qu'on leur fournit (car ils n'ont plus de mémoire), mais quelque fois ils ne savent pas très bien se retrouver dans les dimensions inscrites (ou, pire, pas inscrites) sur le dessin soumis. On constatera alors que le travail de conceptualisation des grandeurs volume et aire et le développement des habiletés d'analyse et d'exploration de l'espace sont à même

d'écarter bon nombre des erreurs courantes commises par les élèves.

Mais ne pas faire d'erreur n'est pas le but ultime de l'approche présentée dans cet article. C'est ce que je rappellerai en conclusion.

Conclusion

A partir de l'exemple du volume, j'ai questionné le rôle étrange que jouent les formules en trop grand nombre introduites dans les classes de mathématiques du secondaire. J'ai noté au passage que la problématique des formules est intimement intégrée à celle de l'introduction des grandeurs et qu'elle dépendait donc d'une analyse en ce sens. Dans le court examen que j'ai fait de cette question, j'ai montré que seules quelques formules suffisent à remplacer la panoplie que l'on fournit aux élèves. En partant de l'objectif : faire raisonner les formules. Nous avons abouti à une approche qui impose une plus grande exploration de l'espace et de ses propriétés. Cette approche conduit à une réduction radicale du nombre de formules à mémoriser et favorise simultanément une meilleure compréhension de l'espace. Elle centre les élèves sur les transformations qui conservent les grandeurs retenues et entraîne, chez les élèves, une familiarisation avec les propriétés des objets de l'espace qui constitue un investissement à long terme de leurs habiletés heuristiques. Après toutes ces réflexions, il est assez étonnant que la réforme des mathématiques (modernes) n'ait jamais questionné l'approche aux grandeurs de l'enseignement secondaire. On peut certes imaginer que les réformateurs ont d'abord voulu réorganiser structurellement les mathématiques scolaires. Ainsi, les grandeurs leur sont vraisemblablement apparues comme des vestiges qu'une bonne théorie de la mesure allait normaliser ! Je pense qu'il y a plus dans cette omission caractéristique. En réalité, les grandeurs et leurs formules ont un statut mathématique très particulier. Les raisonnements qu'elles supposent impliquent un certain retour au réel (ou un retour à un certain réel) dans lequel se sentirait plus à l'aise un scientifique. Non pas que la démarche que nous avons exposée dans cette présentation ne soit pas rigoureuse, mais plutôt qu'elle relève d'une « rigueur spéciale » pour la mathématique contemporaine.

Les programmes de mathématiques peuvent évidemment se retrancher derrière des précautions toutes disciplinaires et une vigilance quasi scolastique, mais l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire devra toujours s'inscrire dans la perspective d'une formation générale et tenter de chasser l'idée que les raisonnements mathématiques ou scientifiques sont hors de portée du commun des mortels. On aura compris que l'enseignement des formules et des grandeurs exposé dans cet article vise précisément un tel objectif: cesser de laisser croire que les mathématiques sont incompréhensibles et reporter à plus tard des manières de pensée accessibles au grand nombre dans une forme quelquefois primitive et imparfaite.

J'ai exposé dans mon entretien comment un enseignement instrumentalisé des formules, hérité, me semble-t-il, de la nécessité d'offrir à chacun la recette commode dans un métier peut faire place à une approche beaucoup plus conforme avec les objectifs actuels de l'enseignement des mathématiques. D'autant plus que les ordinateurs et les calculatrices ont transformé totalement les relations que les élèves peuvent entre tenir tout autant avec les for-

mules et qu'avec les grandeurs, sans compter les occasions renouvelées d'exploration et d'analyse qu'ils offrent.

Je crois que les grandeurs et les formules nous amènent en mathématiques au seuil de l'enseignement de la physique. Tout le questionnement de cet exposé nous entraîne à repositionner l'enseignement des mathématiques par rapport à la physique. Par exemple, plusieurs grandeurs : distance, masse, densité, vitesse, accélération sont des concepts que la physique se propose d'étudier. Y a-t-il en didactique de la physique des éléments qui nous permettraient de prolonger notre réflexion sur les grandeurs et leurs formules ?

Les grandeurs et les mesures sont souvent considérées comme des applications qui s'inscrivent dans le prolongement d'une maîtrise de l'espace et de ses propriétés, que nous avons développée antérieurement. Or, j'estime que cet article a su rappeler que l'étude des grandeurs fait partie intrinsèquement de l'analyse des objets mathématiques et qu'elle ne saurait être considérée comme un appendice à développer de manière accessoire. □

Références bibliographiques

- Apmep** (1982). « Mots: GRANDEUR - MESURE. Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs », tome VI, no. 46.
- Frechet, M.** (1997). «< Nombre et grandeur de Euclide à Descartes >». Mesurer, compter, modéliser. Enjeux d'une formation et d'une culture mathématique. Actes du colloque, juin 1996, Rouen. Académie de Rouen, p. 25-27.
- Janvier, C.** (1992). «Le volume, mais où sont les formules ?> Scénarisation et conception de la vidéo, avec la participation de Daniel Campeau animateur enseignant. Réalisation de Robert Frosi avec la collaboration du Service audiovisuel de l'UQAM, Coproduction UQAM-Modulo, durée: 33 minutes.
- Piaget J. et Inhelder B.** (1941). Le développement des quantités physiques chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.
- Ricco G., Vergnaud G. et Rouchier A.** (1983). «Re présentation du volume et arithmétisation» Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4.1.
- Vergnaud G., Rouchier A., Desmoulières S., Landre C., Marthe P., Ricco G., Samurçay R., Rogalski J. et Viala A.** (1983). « Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). » Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4.1.

je pense, je suis, je pense, je suis, je pense, je suis, je pense, je suis