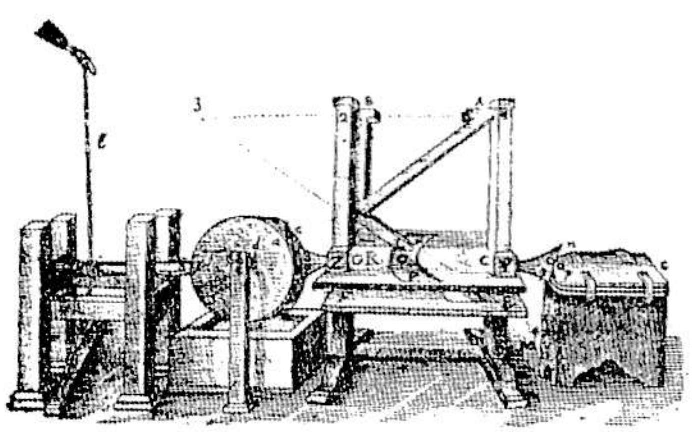
# DESCARTES INVENTEUR DE MACHINES

Yves LEMAITRE. Tours

Après un échange de correspondance avec Ferrier, Descartes a mûri le projet de construction d'une machine à tailler des verres de lunettes astronomiques en forme d'hyperboloïde de révolution à deux nappes. La machine est décrite par son inventeur dans "LA DIOPTRIQUE", et en voici le dessin fait par Descartes:



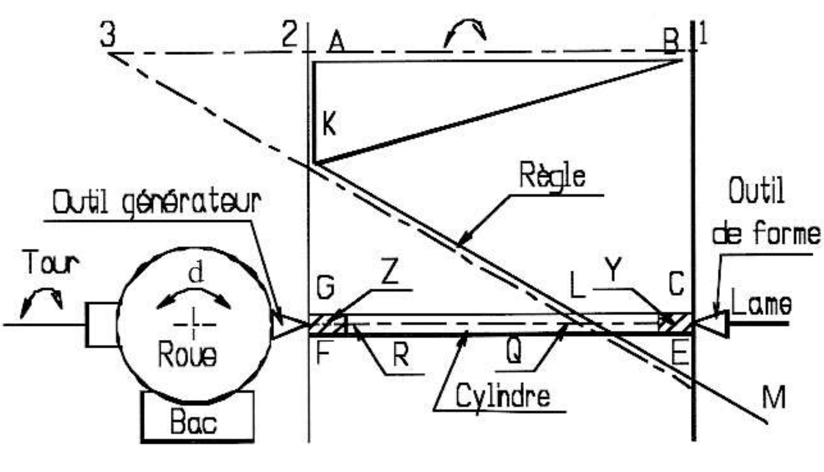
Cette image en perspective est assez peu lisible et, elle pourrait être traduite par le schéma ci-dessous (figure 1) en projection sur le plan de symétrie frontal de la machine.

Sur le dessin fait par Descartes le cylindre QR est situé en dehors des plans de guidage GC et EF

En fait la machine est destinée à matérialiser l'intersection entre la droite 3M, génératrice d'un cône de révolution d'axe 1.2.3. et le plan dans lequel doit se déplacer l'axe du cylindre de révolution QR. Ce cylindre est guidé par ses plans tangents GC et FE (guidage bilatéral). La règle KL, liée à la génératrice 3L, coulisse dans une mortaise du cylindre QR inclinée par rapport à l'axe de ce dernier, mais admettant comme plan de symétrie le plan 123M. Cet assemblage oblige le cylindre à avoir son axe en permanence parallèle à 1.3. en appartenant au plan 1.2.3.M. Le point commun aux axes 3M et QR suit une hyperbole, intersection du cône de révolution engendré par 3M et du plan engendré par QR pendant leurs déplacements autorisés par les guidages. En effet 1 et 2 sont des paliers dans lesquels des tourillons en A et B tournent.

Les extrémités de l'axe QR suivent des hyperboles issues de la précédente par translation horizontale. Ces extrémités sont munies d'outils tranchants dont l'un situé à droite taille une lame située dans un plan horizontal, et l'autre situé à gauche engendre la surface d'une roue qui pourrait être en métal et supporterait une pâte abrasive prise dans le bac inférieur de la machine. Les outils sont maintenus en direction et empêchés de tourner sur eux-mêmes par deux parallélépipèdes guidés par les plans GC et FE et pénétrés par les tourillons d'extrémité du cylindre QR ( figure 2).

Figure 1



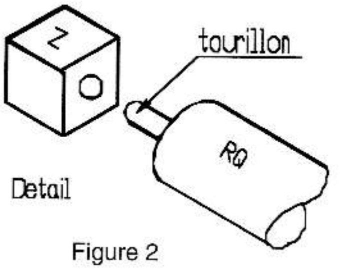



Figure 2

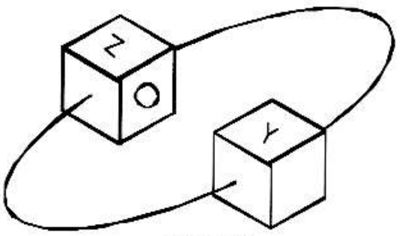



Figure 3

Dans le dessin précédent les deux parallélépipèdes ne sont pas maintenus en contact avec le cylindre QR . Descartes y a pensé après avoir décrit sa machine, et il a proposé dans une lettre peut-être adressée à Florimond de Beaune de les relier par deux anses permettant de les mouvoir (figure 3) et de les maintenir en position l'un par rapport à l'autre.(lettre écrite en 1638 citée page 453 de sa correspondance AT Tome II).

## La réalisation pratique est-elle possible ?

### 1. Un peu de géométrie...:

Descartes, s'adressant à ses différents correspondants, puis dans la Dioptrique, a donné sans explication les constructions géométriques des éléments de sa machine.

*Tout d'abord une hyperbole, laquelle? pour en faire quoi?*

L'hyperbole est déterminée par les lois de l'optique (cf. l'étude de J. DUBOIS).Cette hyperbole conçue comme section plane d'un cône de révolution, dans le cas particulier où le plan est parallèle à l'axe du cône sera celle cherchée si l'axe du cône, le plan, et l'angle que fait la génératrice du cône avec son axe de révolution sont connus.

En utilisant des notations différentes de celles de Descartes, mais faciles à rapprocher de sa figure on remarque les propriétés suivantes (figure 4).

La figure 4 représente en vue de face la coupe par un plan passant par l'axe du cône, de ce cône (C) et du plan (P) parallèle à l'axe yy'. Deux sphères tangentes au cône et au plan sont désignées par (Sp1) et (Sp2). En vue par un observateur placé à droite du cône, on voit l'hyperbole intersection du cône et du plan.

L'hyperbole a pour sommets S1 et S2 et elle a pour foyers F1 et F2. Ces foyers sont, d'après le théorème de Dandelin, les points de tangence des sphères (Sp1) et (Sp2) avec le plan (P). L'ensemble de la figure 4 admet IH perpendiculaire à l'image de (P) comme axe de symétrie.

Dans le plan de la figure 4 on a $S_1K_2=S_1F_2$ et $S_1K_1=S_1F_1$ car ce sont des tangentes issues d'un point à un cercle, et, par symétrie:

$S_1K_2 = S_2F_2$ et $IK_1 = IK_2$

Or $\quad S_1K_2 = S_1K_1 + K_1K_2$

$\quad\quad S_1F_2 = S_1S_2 + S_2F_2$

soit en retranchant membre à membre

$$0 = K_1K_2 - S_1S_2$$

d'où $\quad K_1K_2 = S_1S_2 = 2a$

En utilisant les symétries

$$IK_1 = HS_1 = a$$

$$IS_1 = IK_1 + K_1S_1$$

d'où IS1 = $HS_1 + S_1F_1$ et $IS_1=c$

Pythagore nous dit alors :

$IH^2 = IS_1^2 - HS_1^2$ ou $b^2 = c^2 - a^2$

d'où IH = b où a,b, c sont les paramètres de l'hyperbole.

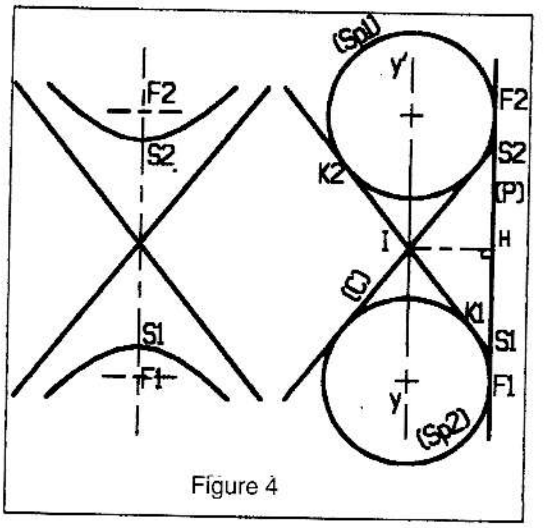



Figure 4

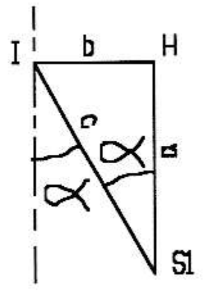



Figure 5

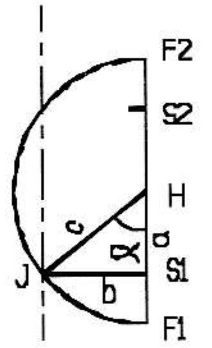



Figure 6

On a alors (figure 5) cos$\alpha$ = a/c ce qui justifie la construction de l'angle $\alpha$ et de la position de l'axe du cône par rapport au plan (P) d' intersection (figure 6).

Cette construction est citée par J. DUBOIS dans son étude de la correspondance de Florimond de Beaune.

Mais Descartes ne justifie pas en particulier la position de l'axe qu'il donne.

*Que veut faire Descartes de cette hyperbole?*

Il veut réaliser une surface de révolution engendrée par l'hyperbole dont le plan, passant par l'axe de révolution, tourne autour de celui-ci. L'axe est parallèle ou confondu avec l'axe de symétrie de l'hyperbole ne la traversant pas. Si l'axe de révolution est l'axe de symétrie de l'hyperbole la surface est un hyperboloïde de révolution, sinon la surface est plus compliquée.
Descartes ne semble pas avoir bien distingué ces deux cas.

L'hyperboloïde (figure 7) est une surface du second degré.
Dans le cas de figure l'hyperbole méridienne contenue dans le plan xOy a pour équation:

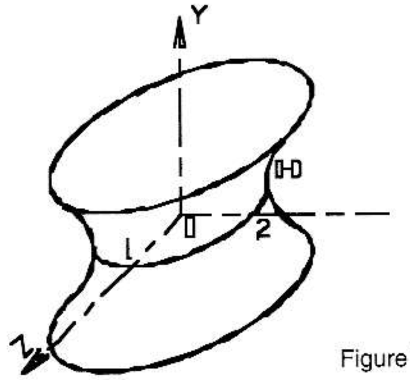



Figure 7

$$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0$$

L' hyperboloïde a pour équation dans ce cas:

$$(x^2 / a^2) + (z^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0$$

Descartes livre "son plus grand secret" ( cf. article de J.DUBOIS ) dans sa correspondance avec Ferrier.

Il n'a pas repris cette construction dans la Dioptrique. Le but de cette construction était de trouver le profil d'une lame inclinée par rapport au plan méridien du solide de révolution.

Ce secret en restera un, car aucune explication ne le justifie.
Il aurait pu utiliser les propriétés suivantes:

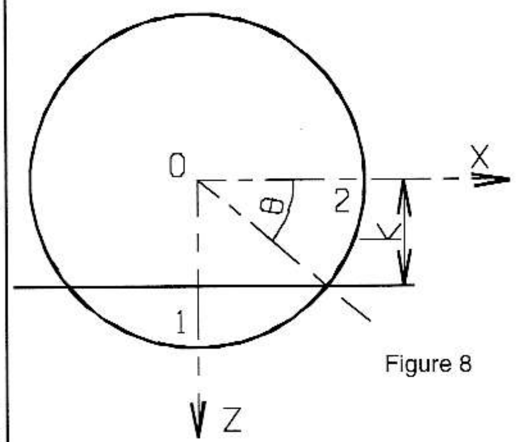



Figure 8

Considérons la figure 8 qui est la section de l'hyperboloïde précédent par le plan xOz, donc suivant son cercle de gorge, coupons cet hyperboloïde par le plan z = k (k<a).

L'inclinaison de ce plan par rapport au plan méridien passant par son intersection avec le cercle est $\theta$ ; on a donc
$\sin \theta = k / a$ .

La courbe d'intersection de l'hyperboloïde avec le plan est définie par:

$$\begin{cases} (x^2 / a^2) + (z^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0 \\ z = k \end{cases}$$

Soit en projetant cette courbe sur xOy parallèle à z = k on obtient:

$$(x^2 / a^2) + (k^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0$$

soit:

$$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - [ 1- (k^2 / a^2) ] = 0$$
$$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - (1-\sin^2 \theta) = 0$$
$$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - (\cos^2 \theta) = 0$$
$$(x^2 / a^2 \cos^2 \theta) - (y^2 / b^2 \cos^2 \theta) - 1 = 0$$

C'est une hyperbole déduite de la génératrice en multipliant les paramètres de celle-ci par cos $\theta$, d'ou la construction figure 9.

L'angle du cône n'a pas été changé mais le plan d'intersection a été rapproché. On pourrait donc obtenir l'hyperboloïde en faisant tourner autour de son axe de révolution une lame inclinée de q sur le plan méridien et taillée par la machine de Descartes sans changer l'angle du cône mais en rapprochant les plans de guidage du cylindre QR de l'axe de révolution du cône. Et un plus grand secret serait utilisable, secret que Descartes ne connaissait sans doute pas:

Si le plan de section de l'hyperboloïde est placé à distance k = a on a alors k/a = 1, et l'équation

$$(x^2 / a^2) + (k^2 / a^2) - (y^2 / b^2) - 1 = 0$$

devient: $(x^2 / a^2) - (y^2/ b^2) = 0$

ou encore: $( x/a - y/b ) ( x/a + y/b ) = 0$

Equation de 2 droites en projection sur xOy

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

L'hyperboloïde est donc une surface réglée qui pourrait être engendrée par un outil droit dont le tranchant est l'une de ces droites. Voilà qui simplifierait la génération de la roue concave.

Pour les roues convexes la surface est plus compliquée; elle serait mieux décrite par la méridienne ( figure 10 ).

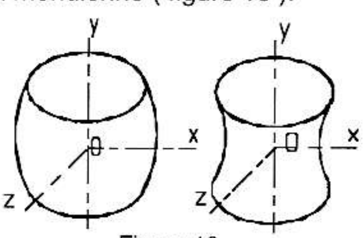


Figure 10

Il en est de même si l'axe de révolution n'est pas celui de l'hyperbole bien que la roue soit concave.

## 2 . De la technologie...:

*Comment réalise-t-on une surface sur un solide?*

Descartes a envisagé sur sa machine les trois types d'outil que nous allons définir. Il a hésité entre plusieurs choix et, après ses échanges de lettres, avec Ferrier en particulier, il a décrit la machine représentée dans la Dioptrique et reproduite en page 4.

### *Outil de forme*

L'arête de cet outil est une ligne dont le déplacement ( figure 12 ) engendre la surface à définir, ici une arête droite engendre un cylindre de révolution. Pour engendrer une surface ayant une hyperbole comme méridienne, il suffit que l'arête soit une hyperbole. Cet outil qui demande une grande puissance à la machine travaille comme un bouteur ( bulldozer ).

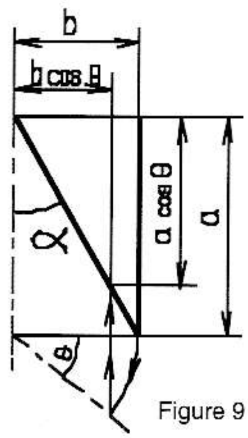


Figure 9

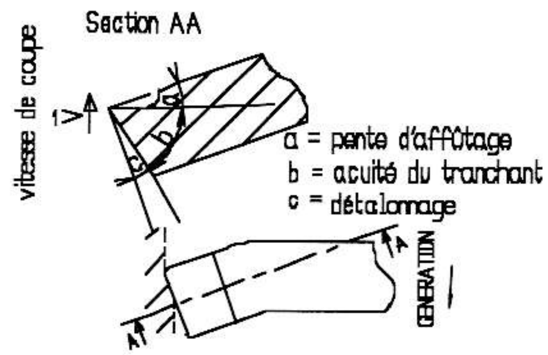
### *Outil de génération*

Il se déplace suivant la ligne génératrice de la surface. Cette génératrice se déplace en même temps pour réaliser la surface.

On obtient une surface approchée car des sillons subsistent. Cet outil travaille à la façon d'une charrue qui engendrerait la surface du champ à labourer sillon après sillon ( figures 13 et 14). C'est un outil de ce type que Descartes a situé au contact de la roue d de sa machine.

### *Outil meule*

Figure 13




A l'origine cet outil de révolution était en pierre naturelle. Les outils moderne sont composés d'une multitude de petits grains, outils agglomérés dans un liant assez tendre. Ces grains usent la surface à rectifier, puis ils sont arrachés de la meule après usure et le liant est pulvérisé pour faire apparaître de nouveaux grains. La meule a pour génératrice la ligne qu'elle use sur la pièce à réaliser, et, elle se déplace pour engendrer la surface cherchée ( figure 15). Pendant ce travail la meule change de géométrie, il faut donc la régénérer. Pour cela

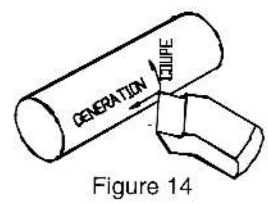


Figure 14

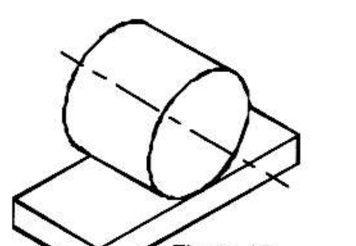


Figure 15

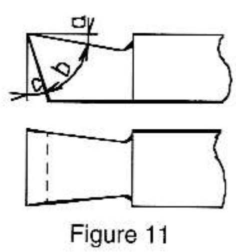


Figure 11

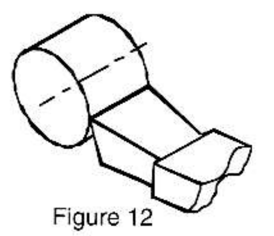


Figure 12

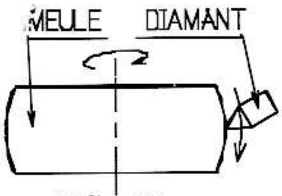


Figure 16

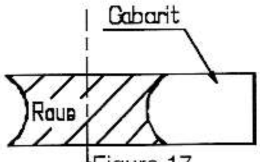


Figure 17

on utilise un outil qui sur les machines modernes est un diamant qui refait le profil de cette meule ( figure 16 ).

**_Rodage_**

Deux solides sont en frottement l'un sur l'autre et une pâte abrasive est entraînée entre les deux surfaces qui s'usent et prennent des formes complémentaires. *C'est cette solution dérivée de la meule qui est préconisée par Descartes sur sa machine pour rectifier le verre. La roue d dure enduite de pâte abrasive tourne devant le verre à tailler, elle doit être régénérée par l'outil situé à gauche du cylindre QR qui suit une hyperbole.*

*La vérification du profil est faite à l'aide des lames taillées à la partie droite de la machine ( voir figure1). Cette lame est un gabarit en forme d'hyperbole ( figure 17 ).*

**_La vitesse de loutil_**

Elle ne peut pas être quelconque, en particulier une vitesse nulle ou voisine de zéro ne permet pas la coupe. Donc une surface de révolution au voisinage de son axe n'est pas réalisée car il n'y a pas coupe ( figure 18 ) d'ou la formation d'un « téton».

*Descartes y a pensé et il propose une roue tournant autour d'un axe orthogonal à l'axe de rotation du verre à réaliser. Sur l'axe 2 ( figure 19 ) la vitesse relative des deux solides au contact est la vitesse périphérique de la meule ce qui supprime le « téton » ( la Dioptrique pages 148 et 149 ).*

**_La géométrie de la roue_**

Dans le cas de la fabrication de la surface convexe d'un verre ( à double courbure) la roue est concave, il n'y a pas de problème particulier car en coupe par le plan xOy ( section AA figure 19 ) les surfaces sont de part et d'autre de leur plan tangent commun.

Dans le cas de la surface concave d'un verre (figure 20) la roue est convexe et il y a un problème car la section AA montre que la roue au voisinage du point de contact doit être à l'intérieur du cercle osculateur à l'hyperbole.

*Descartes s'en est aperçu et il a donné une directive générale en disant ( la Dioptrique page 149 et 150) que la roue soit telle que « sa circonférence ne passe point au dessus de la ligne 1.2. de la même machine » sans autre précision.*

**_La géométrie de la lame_**

La machine de Descartes doit découper des lames (figure 21) dans sa partie droite. Pour le faire, l'outil quel qu'il soit ne peut couper que dans un sens de déplacement, et, Descartes a vu que les angles de travail ne seront pas bien respectés. Il préconise l'usinage de la lame en deux phases avec retournement de l'outil, peut-être pour que les efforts soient mieux dirigés ( la Dioptrique pages 147 et 148).

**_Le procédé d'obtention de la roue_**

Descartes préconise trois phases dans la fabrication de la roue d.

- Approche grossière à la lime.
- Utilisation d'une des lames précédentes comme outil pour améliorer la surface (outil de forme).
- Utilisation de la partie gauche de la machine (outil de génération) pour finir et rectifier en permanence le profil de la roue.

Il pense ainsi affiner la surface, or l'outil de forme est plus régulier que l'outil de génération. Il aurait été souhaitable qu'il agisse en dernier, mais dans ce cas il devrait être incliné par rapport au plan horizontal méridien de la roue, et le profil de la lame devrait être différent comme nous l'avons vu dans l'étude de la génération d'un hyperboloïde,

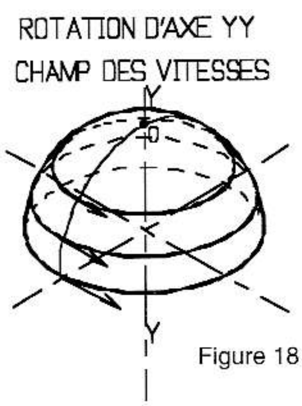


Figure 18

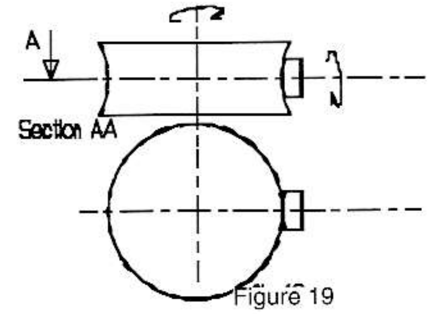


Figure 19

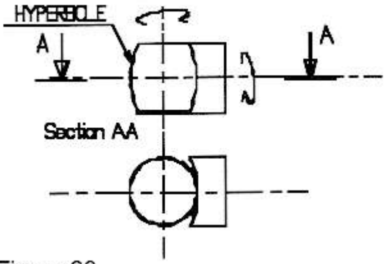


Figure 20

mais la machine ne serait pas celle préconisée par Descartes.

### 3 . Beaucoup d'incertitudes...:

***La qualité géométrique des assemblages***

Elle est toujours soumise à des erreurs de réalisation qui peuvent être réduites par un travail de retouche très précis.

***Les jeux de fonctionnement***

Ils sont indispensables et doivent être d'autant plus grands que les surfaces seront moins précises (figure 22), or ces jeux rendent aléatoire la position des objets guidés. Par exemple le cylindre QR par rapport à la règle KL ou bien l'axe du cône générateur par rapport au bâti ( figure 23).

***L'usure des outils***

L'usure des outils et des parties frottantes rendent les erreurs variables.

***Les efforts***

La tige KL dans son passage à travers le cylindre QR doit coulisser comme un tiroir dans sa glissière. Un risque sévère d'arc-boutement existe dans ce déplacement qui est incliné par rapport à l'axe du cylindre QR.

## La machine peut-elle fonctionner ?

Dans la version proposée par Descartes ( voir page 4 ) il y a beaucoup de chance pour qu'elle ne marche pas de façon satisfaisante.

On ne sait pas si elle a été utilisée et à notre connaissance aucun exemplaire n'en a été retrouvé. Si cela avait été le cas on aurait pu expérimenter la machine en utilisant les sources d'énergie de l'époque. Descartes a peut être eu quelques doutes car dans une lettre écrite en 1638 à un correspondant dont on pense que c'est Florimond de Beaune il propose un autre procédé qui utiliserait une roue creuse en forme d'auge à profil hyperbolique et d'axe de rotation vertical, dans laquelle une petite roue supportant le verre à tailler tournerait sur elle même en tournant autour de l'axe de la grande roue, l'ensemble étant entraîné par un train épicycloïdal.

Une telle machine poserait de nouveaux problèmes. En particulier dans la précision de taillage des roues dentées, et dans le rattrapage de jeu des engrenages qui serait indispensable. ❑

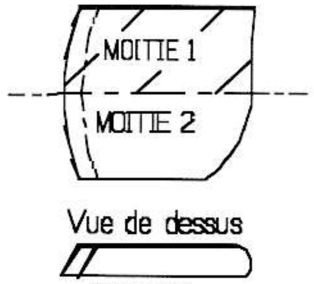


Figure 21

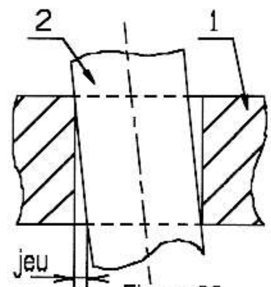


Figure 22

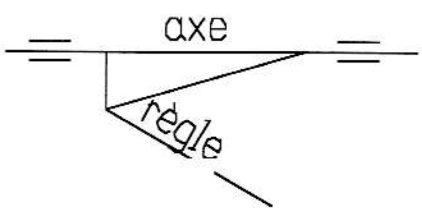


Figure 23