

# Grandeur et mesure :

## la place des formules et l'exemple de volume

Claude Janvier - Montréal

**C**et article examine la place des formules dans le développement des concepts de grandeur.

Il est issu d'un cours de didactique ayant conduit à l'étude de la notion de volume, à l'élaboration d'une séquence d'enseignement qui a donné lieu à la production d'une vidéo.

Il s'articule autour de la notion de grandeur dont je ferai une analyse plus fine pour éclairer la construction de la séquence d'enseignement. Après quelques remarques sur les objectifs de la séquence d'apprentissage, je procéderai à une analyse conceptuelle de la notion de grandeur. La troisième partie sera consacrée à la grandeur volume. Les raisonnements et les difficultés qui y seront exposés conduiront à la section principale dans laquelle je présente les grandes lignes de la séquence d'enseignement.

### Une vidéo sans trucage

Cette expérimentation a donné lieu à la production d'une vidéo intitulée: «*Le volume: mais où sont les formules ?*»

Pour les lecteurs qui auront l'occasion de visionner cette vidéo, notons que je reste très critique par rapport à ce qu'elle montre; la présence de la caméra et la nécessité de produire un son de bonne qualité contribuent trop souvent à chasser le naturel. L'enseignant apparaît donc guindé et la classe inhabituellement calme. La pédagogie apparente est plus magistrale que celle vraiment mise en place. Par contre, rien n'a été ajouté à ce qui s'est déroulé en classe; la réalisation de la vidéo n'a donné lieu à aucun montage ni trucage!

### Faire raisonner les formules

Les discussions avec les étudiants (futurs enseignants) les ont amenés à proposer comme objectif général de la séquence: faire raisonner les formules.

Progressivement cette idée de raisonner les formules a pris forme et a été explicitée en trois points:

- a) s'appuyer sur une formule de base pour déduire la formule de chaque classe de solides,
- b) reconnaître la classe de solides à laquelle s'applique une formule particulière,
- c) reconnaître les éléments de la formule dans la représentation spatiale du solide dans le but d'effectuer les bonnes opérations.

Ce principe général pour aborder la notion de volume est apparu comme absent des préoccupations des enseignants et des programmes. On retrouvera donc en filigrane tout au long de mon exposé le leitmotiv : **mais où sont les formules ?**

On comprendra que l'approche retenue tout en faisant raisonner les formules vise, entre autres, à **réduire le nombre de formules à mémoriser**. Il remet donc en question la pratique qui consiste à fournir aux élèves de longues listes de formules avec l'intention ambiguë qu'ils les mémorisent, les questionnaires d'examen rappelant souvent les formules à savoir !

Même si le volume peut être considéré comme une grandeur, **il n'a jamais été défini comme grandeur** dans la séquence que j'ai élaborée.

En fait, c'est en classe de didactique que la notion de grandeur a fait l'objet d'une analyse fine non pas pour l'introduire aux élèves, mais plutôt pour en examiner la richesse et la complexité afin de planifier et de réaliser un apprentissage rationnel et efficace.

### Un bref retour historique

Il n'est pas facile de proposer une définition de la notion de grandeur tant la notion a évolué au cours des siècles. Il est bien connu que les Grecs ont été profondément bouleversés devant l'impossibilité d'exprimer la longueur de la diagonale d'un carré comme le rapport de deux entiers. Il est par contre moins bien connu (Fréchet,

*Cet article, paru dans le bulletin de l'AMQ -oct 97- est le résultat d'une réflexion amorcée par l'auteur dans un cours de didactique présenté à l'Université du Québec à Montréal et à l'IUFM de Lyon.*

1997) que cette découverte fut à l'origine d'une nouvelle mathématique: celle des grandeurs. En effet, à côté de l'arithmétique des nombres abstraits s'imposait alors la construction d'une arithmétique des longueurs de lignes (aujourd'hui appelées segments) qui, tout aussitôt, se généralisera aux surfaces et à l'espace.

En fait, l'image idéale, le modèle abstrait que les philosophes grecs se faisaient du monde s'effondrait avec cette incapacité à "mesurer avec des rationnels" certaines réalités du monde observable.

Tout au long de l'histoire, «*grandeur*» a toujours été opposé à «*nombre*» ou quantité et, petit à petit, la situation est venue se compliquer avec le développement de la physique qui introduisit des grandeurs-produits, des grandeurs-quotients.

Terminons là cette digression historique pour analyser à sa source l'éclosion et le développement de la notion de grandeur.

## Grandeur et mesure

### Genèse de la notion de grandeur

Réaliser une analyse conceptuelle de la notion de grandeur commanderait normalement que, d'entrée de jeu, on en formule une définition unique.

Or, il apparaît que toutes les sources consultées sont loin de présenter une unanimité sur le sujet. En fait, cette différence d'opinion est en partie due à l'évolution « historique » du concept de grandeur. Pour bien illustrer les différences de « points de vue », examinons la figure 1 qui illustre les activités mentales présentes dans les exercices ou problèmes impliquant des grandeurs.

Elles font intervenir 3 domaines différents. a) Il n'y a pas de grandeur sans «réalité concrète», sans objet ou phénomène à observer ou à étudier.

Cette «réalité» est présentée selon des modalités très diverses: simulation, dessin, maquette ... et revêt souvent des formes

abstraites inspirées de la réalité.

Par exemple, le rectangle et la sphère sont deux objets idéaux qui n'existent que dans la pensée mais qui sont inspirés de l'examen d'une réalité «externe».

b) Ces objets ou phénomènes sont examinés pour une caractéristique propre qui leur appartient. Cette caractéristique a la propriété d'être quantifiable ou mesurable. Il faut également que cette caractéristique soit «additionnable», ce qui rend le produit par un scalaire possible.

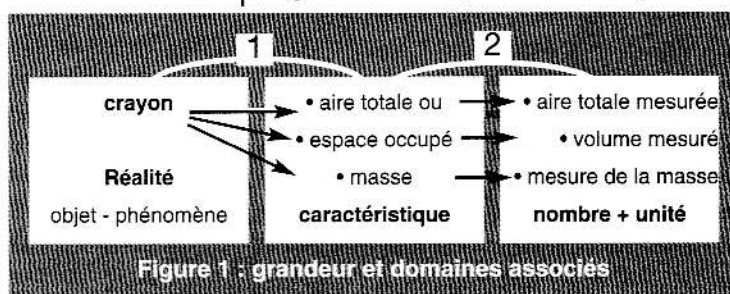
c) A certaine caractéristique de ces objets, on peut associer un nombre accompagné d'une unité, nombre qui est le résultat de la mise en œuvre d'une méthode et du choix d'une unité de référence (appelé unité de grandeur).

Par exemple, si a) l'objet considéré est un rectangle de 2 cm par 5 cm, on examine b) sa surface pour pouvoir établir que c) son aire est de 10 cm<sup>2</sup>.

Cet exemple nous fournit l'occasion de mettre en évidence la difficulté qu'il y a à désigner par des termes génériques les éléments de b) et de c). On aura noté que, dans le cas présent, j'ai distingué surface et aire.

Le schéma de la figure 1 illustre que trouver un volume ou une aire requiert un double processus. D'abord se cache sous cet exercice intellectuel, une **identification** de la caractéristique concernée à partir de l'objet phénomène concerné.

Dans le cas d'un crayon, il peut s'agir du volume, de la masse, de l'aire



totale, de la longueur... Ensuite, dans un deuxième temps se met en branle une **opération d'assignation d'un nombre accompagné d'une unité**, ce qui suppose le choix d'une unité.

Cette décomposition en deux temps

de la démarche mentale requise pour résoudre les problèmes de grandeur nous permet de bien illustrer la complexité de la tâche et de bien montrer les difficultés que les élèves rencontrent.

### Où est la grandeur ?

Doit-on distinguer la caractéristique-à-quantifier de la caractéristique-quantifiée (le nombre avec unité obtenue)? En d'autres mots, doit-on distinguer, par exemple, l'aire du rectangle ABCD et sa valeur : 10 cm ? Selon la brochure de l'Apmep (1982: Tome VI), les deux notions ne sont pas distinguables et ne doivent pas être distinguées car 10 cm<sup>2</sup> n'est qu'une manière particulière d'exprimer l'aire du rectangle.

Bref, 1 cm<sup>2</sup> est l'aire d'un rectangle particulier et cette aire se retrouve 10 fois dans le rectangle ABCD. N'écrit-on pas en effet: aire de ABCD = 10 cm<sup>2</sup> !

La grandeur est donc à la fois la caractéristique-à-quantifier et la caractéristique-quantifiée.

Par contre, selon une autre doctrine pédagogique, cette distinction s'impose à un point qu'il faille introduire des termes différents pour désigner ces deux notions. Ainsi, selon ce point de vue, la notion d'aire (la caractéristique-à-quantifier) doit être distinguée de la notion de surface (caractéristique-quantifiée) ; celle d'espace occupé, de la notion de volume. Pour les tenants de cette tradition, le rectangle ABCD a une surface dont l'aire est 10 cm<sup>2</sup>. En d'autres mots, l'aire de la surface du rectangle ABCD est 10 cm<sup>2</sup> et non pas l'aire du rectangle ABCD. On ne parle donc plus de l'aire du rectangle mais de l'aire de la surface (même ceux qui adhèrent à cette manière de faire s'empressent d'auto-riser l'abus de langage qui consisterait à dire seulement : aire du rectangle).

Cette position va par ailleurs dans le sens de la tradition mathématique qui veut que l'on associe des **valeurs** aux grandeurs ou encore que **l'on exprime les grandeurs selon des unités**. La tradition établit donc une dichotomie entre la caractéristique-à-quantifier et le nombre qui lui est associé. Cependant, elle n'impose pas de mots différents pour désigner ces deux entités. Il n'y a donc qu'un pas à fran-

chir pour donner deux noms différents à ces deux entités.

Mais plutôt que de distinguer surface et valeur de la surface, volume et valeur du volume (par exemple), cette pédagogie a opté, et on le voit dans les manuels, pour différencier surface et aire en précisant que l'aire est la mesure de la surface.

L'aire n'est donc pas la valeur de la surface mais bien la mesure de la surface. On note donc l'usage du terme « mesure » qui vient compliquer les choses. En revanche, cette même pédagogie considère le volume (caractéristique-quantifiée) comme étant la mesure de l'espace-occupé (caractéristique-à-quantifier). D'ailleurs, l'écriture symbolique fonctionnelle ( $f(x)$ ) encourage ce type de désignation.

N'est-il pas facile d'écrire, par exemple,  $m(\text{angle}) =$  ou encore  $\text{aire}(\text{surface}) =$  ?

Cependant, la brochure de l'Apmep, qui analyse les relations entre grandeurs et mesures, relève une incohérence dans cette manière de faire.

En effet, la mesure doit être définie comme étant le nombre « qui établit la comparaison » entre l'unité et la grandeur considérée. Dans 10 cm<sup>2</sup>, la mesure est le nombre 10 qui est le  $\alpha$  dans l'égalité :

**Aire du rectangle ABCD =  $\alpha$  fois l'unité (cm<sup>2</sup>).**

On constate donc que, d'une part, le volume ne saurait être la mesure d'un espace occupé, car le volume s'exprime avec des unités et la mesure ne comporte aucune unité ; mais que, d'autre part, ne pas distinguer entre la caractéristique-à-quantifier et la caractéristique quantifiée-par-rapport-à-une-unité engendre aussi d'autres problèmes quand il s'agit de discourir sur les exercices à résoudre.

La brochure de l'Apmep expose une variété d'expressions qui traduisent les conséquences de cette dualité : caractéristique-à-quantifier versus résultat de cette quantification (caractéristique quantifiée). Malheureusement, elle laisse croire que ces ambiguïtés peuvent être levées en proposant une exposition et un vocabulaire corrects.

En bref, je souhaiterais que l'enseignement prenne en compte qu'il faut adopter une position inévitablement « ouverte » face aux notions de grandeur, valeur d'une

grandeur, mesure d'une grandeur, position qui laisse une large place à l'exploration des objets ou phénomènes sous-jacents. Par ailleurs, toute cette discussion paramathématique ou métamathématique provoquée par l'étude du schéma de la figure illustre bien les pièges qui guettent l'enseignant qui tiendrait à exposer les tenants et aboutissants de toutes les subtilités de langage que je viens de relever.

### La position adoptée dans la séquence d'enseignement

Au moment de la mise en œuvre de la séquence d'enseignement présentée à la section 5, la réflexion précédente n'était pas aussi exhaustive bien que l'analyse des processus cognitifs mis en branle indiquait déjà la complexité des notions sous-jacentes. Le volume n'a pas été introduit comme une grandeur, ainsi, tout le questionnement sur les grandeurs en général fut automatiquement écarté.

Par contre, la distinction entre volume et espace occupé fut retenue avec comme conséquence que le volume fut identifié à la mesure (avec unités) de l'espace occupé.

Dans l'analyse qui suit, je ne tenterai pas de faire la promotion d'une position particulière sur ce qu'il faut dire et ne pas dire. **Je retiendrai** un vocabulaire (à usage interne : entre nous !) qui me permettra d'exposer les processus sous-jacents et les difficultés en rapport avec la notion de volume.

Ainsi, dans ce qui suit, j'utiliserai indifféremment :

- 1) « caractéristique à quantifier » et grandeur et d'autre part
- 2) « nombre accompagné d'une unité » et grandeur quantifiée tel que le montre la figure 2 qui reprend le schéma -figure 1- avec certaines précisions.

On aura remarqué que j'ai préféré « quantifier » à mesurer simplement pour ne pas renvoyer le lecteur à son bagage culturel (mathématique) qui accompagne la notion de mesure !

Je rappelle que ce schéma nous permet de distinguer deux pro-

cessus généraux de pensée.

D'abord, le passage de l'objet à la caractéristique : **l'identification** d'une caractéristique. Il s'agit ici de retenir, de choisir, d'envisager une caractéristique à partir de l'observation d'un objet-phénomène ou encore de la considération d'un objet-phénomène.

Rappelons que la diversité des modes de représentation de ces objets-phénomènes peut rendre cette identification complexe.

Dans un deuxième temps, il faut procéder à **l'assignation d'un nombre accompagné d'une unité** à la grandeur retenue. Il faut bien entendu retenir une unité et procéder de manières fort diverses à cette recherche.

### Le volume : raisonnements et difficultés

Toute didactique d'une grandeur quelconque doit s'élaborer par rapport à ce qui est exigé des élèves en fin de course. C'est en effet la variété et la complexité des problèmes exigeant le recours à une grandeur qui déterminera les apprentissages à mettre en place.

Le schéma de la figure 2 est alors fort utile et très éloquent. Pour cet article, j'ai fait le choix d'ignorer explicitement cette dimension et d'aborder la question des obstacles et difficultés dans un cadre plus large. En bref, je passe sous silence quatre éléments qui m'apparaissent fondamentaux. Certains problèmes ne demandent que de comparer et non pas de mesurer. Ils sont plus ou moins complexes selon le nombre d'opérations qu'ils exigent.

La structure même d'un problème ne peut déterminer à elle seule les obstacles des élèves car au moment de le résoudre, ils disposent de moyens issus de

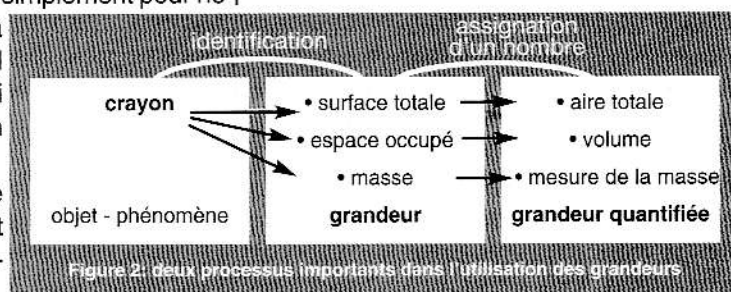


Figure 2 : deux processus importants dans l'utilisation des grandeurs

leurs apprentissages antérieurs. A ces obstacles, que Guy Brousseau désigne comme didactiques, s'ajoutent des difficultés liées aux nécessités du cheminement à suivre dans l'appropriation de connaissances. Les obstacles épistémologiques sont incontournables; ils proviennent de connaissances antérieures à renouveler, à amender, car ils deviennent inconciliables avec les nouvelles à acquérir.

### L'emploi des mots et des notations

La figure 2 illustre très bien les problèmes de désignation soulevés précédemment. En effet, dans la perspective classique (celle de la brochure de l'Apmep), la caractéristique et la grandeur mesurée sont une seule et même chose. Il n'y a pas lieu d'introduire d'autres vocables. Par contre, cette décision est toute mathématique ou logique et ne reflète pas la réalité psycho-cognitive sous-jacente. Il est non seulement possible mais aussi conforme à une certaine logique de considérer indépendamment de toute unité la caractéristique à mesurer, ce qui inévitablement lui donne un statut particulier. Même si la cohérence mathématique permet de passer outre à cette distinction, on ne peut empêcher l'esprit de produire "naturellement" cette distinction.

Le vocabulaire contemporain distingue surface et aire, segment et longueur, espace occupé et volume, l'angle et la mesure d'angle. Il est bien connu que la grandeur et «sa valeur» par rapport à une unité sont souvent confondues dans le vocabulaire courant : ainsi la surface désigne à la fois la caractéristique d'un objet et la mesure de cette caractéristique. Il en est ainsi des angles. Même si, en pratique, on distingue un angle et sa mesure en disant un angle de  $\alpha$  degrés, l'écriture laisse souvent subsister l'ambiguïté quand, par exemple, on écrit  $\alpha = 30^\circ$ .

Oublions que cette écriture est courante dès que l'on remonte un tant soit peu dans le passé. En effet, comme l'a montré Frechet (1997), il est possible de considérer plusieurs arithmétiques de grandeurs confondant grandeur et valeur de grandeur. Aujourd'hui, on fait la somme de mesures d'angle ou la somme de mesures de surface. En fait, l'histoire nous montre que faire la somme peut nous forcer à remonter aux objets abstraits. Ainsi, quand on fait, par exemple, la somme de surfaces

ou la somme d'aires, c'est plutôt la somme de figures que l'on réalise avec les conséquences pour la caractéristique aire. Suite à cette analyse sommaire, un premier principe semble s'imposer: l'introduction de la notion de volume exige beaucoup de tolérance et ouverture d'esprit par rapport aux vocabulaires utilisés et aux notations qui en découlent.

### **Le recours aux grandeurs apparentées**

Le premier obstacle qui se pose à la résolution d'un problème de grandeurs est la confusion qui peut prévaloir lors de l'**identification** de la grandeur à considérer. D'abord, cette identification n'est pas un processus simple, car, dans un premier temps, les enfants doivent, sollicités par des questions et par les démarches d'autrui, se construire un premier concept de la grandeur concernée qui est appelée à se développer. C'est ainsi par exemple que l'élève peut glisser d'un concept vers l'autre étant donné son peu de familiarité avec les objets qu'il manipule.

L'expérience a montré que, dans une tâche de **comparaison de volumes**, les élèves peuvent succomber aux interférences provenant de l'aire des objets à comparer tout comme à leur longueur. Par exemple, les deux cylindres formés par une feuille 21x29,7 cm pliée dans le sens de la largeur et dans le sens de la longueur sont considérés comme ayant même volume par la quasi-totalité des élèves de la classe. Il n'est pas question bien entendu de considérer ces difficultés comme étant toujours provoquées par des confusions entre aire totale (ou latérale) et volume. Il s'agit bien d'une interférence qui opère localement dans un acte de pensée; les grandeurs les plus familières s'imposant au détriment de celle en construction.

Quelquefois, c'est dans la démarche qui conduit à assigner un nombre à une caractéristique que le dérapage se produit. Lors de l'expérience, une élève à qui on demande de trouver le nombre de cubes dans un parallélépipède rectangle «trouve» le nombre de carrés qui entourent le solide plutôt que le nombre de cubes qui constituent le solide. Il faut donc que l'apprentissage de la notion

de grandeur, par exemple, réserve une place importante aux confusions entre grandeurs surtout lorsque les exercices n'exigent pas de fournir une grandeur quantifiée.

### De l'usage irréfléchi des formules

A ces difficultés s'ajoutent celles dues à la nécessité d'assigner une valeur au volume ou à la grandeur considérée. Il faut comprendre que l'assignation d'une valeur numérique à une caractéristique d'un objet phénomène peut s'effectuer selon plusieurs modalités. Mais, en réalité, dans la majorité des cas, on assigne une valeur numérique à la caractéristique retenue à l'aide d'une **formule** qui fournit une recette symbolique conduisant «mystérieusement» à la bonne réponse. Lorsqu'il s'agit de comparer les caractéristiques de deux objets-phénomènes, la difficulté peut devenir plus grande,

s'accroître du fait que la comparaison doit s'effectuer sans formule ou encore donner lieu à la mémorisation d'autres formules. Un des obstacles didactiques rencontrés par les élèves provient d'une conception dominante chez les enseignants par rapport à la nature et au rôle des formules. Pour la grande majorité des enseignants, le volume et les aires sont deux sujets faciles à enseigner. Il s'agit simplement de bien montrer comment fonctionnent certaines formules qu'autrefois on faisait mémoriser et, qu'aujourd'hui, on fournit en début d'année et qu'on redonne aux examens.

D'autant plus que cette conception vient «renforcer» l'apprentissage empirique que les élèves «ont subi» à propos des aires et des volumes dans l'enseignement primaire. A ce niveau, les formules sont données et vérifiées dans un nombre fini de cas, à l'aide de tableaux de nombres, d'où le caractère empirique qu'il assigne à la démarche. Tout se passe comme si chaque formule avait donné lieu à une révélation (divine !) mais vérifiable et non pas comme si elle pouvait résulter d'un examen systé-

matique et rationnel des objets phénomènes.

D'abord, les élèves ont retenu que les formules «**ça se comprend pas**» et, ensuite, que pour trouver un volume, une aire, il faut prendre une formule (à moins que l'on demande de trouver le nombre de petits rectangles dans un triangle, ce qui n'est pas souvent associé à un problème d'aire).

D'ailleurs, les enseignants du secondaire ne sont pas insensibles aux difficultés de leurs élèves. Il suffit de les interroger pour s'apercevoir qu'ils ont conscience que ce type d'enseignement entraîne facilement des dérapages. Par exemple, les «problèmes à contexte» n'indiquent pas toujours la grandeur à trouver et encore moins la formule.

Lorsqu'un exercice ne présente qu'un dessin, les élèves ont de la difficulté à y retrouver «ce» qu'exige une formule. Lorsqu'il s'agit de comparer, les formules sont «dangereuses» ! Bref, il est bien possible que les enseignants s'assurent «localement» que leurs élèves ont des résultats satisfaisants mais c'est malheureusement sans compter

les difficultés qu'ils rencontreront éventuellement n'ayant pas eu l'occasion d'enrichir leur concept d'aire ou de volume. Bref, une pédagogie différente s'impose, mais laquelle ? Il faut donc **contrer un recours irréfléchi aux formules** et changer leur conception de la notion de formule implicitement imposée par une tradition pédagogique qu'il faut rejeter.

### Une séquence d'apprentissage qui restitue le rôle de la formule

Cette séquence comporte trois grandes étapes.

D'abord, les élèves doivent oublier les anciennes formules sans signification et repartir d'une exploration de l'espace qui les conduise sur de nouvelles pistes.

Dans un deuxième temps, ils se donneront une méthode de dénombrement des unités de volume pour un pavé, méthode dont ils étudieront les particularités. Cette méthode deviendra leur formule de base qui sera généralisée à une grande famille de solides grâce à la mise à contribution du principe de

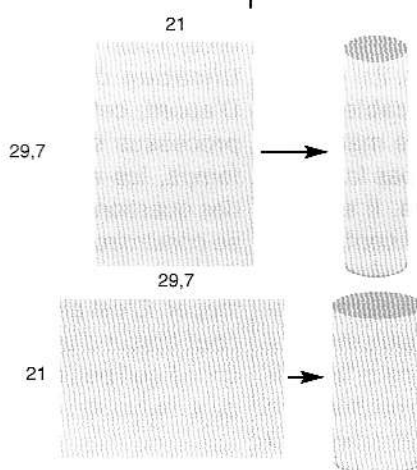


Figure 3

Cavalieri.

Finalement, c'est l'analyse des pyramides et le recours à des raisonnements mettant en jeu des objets-limites qui compléteront la séquence.

### **Avant les formules : familiarisation avec le volume**

#### **a) Exploration de l'espace et de ses représentations**

Donner un sens aux formules de volume exige dans un premier temps que les élèves se familiarisent avec les objets-phénomènes sous-jacents. Il faut que les élèves puissent mentalement se représenter le volume comme une caractéristique-à-quantifier. Or, il faut s'assurer qu'ils maîtrisent suffisamment les habiletés reliées à l'appréhension des objets spatiaux. Leur formation antérieure doit être mise à jour par des activités nombreuses de représentations. Le cahier (Janvier, 1994) qui accompagne la vidéo distingue trois types d'activités qui favorisent l'exploration de l'espace : celles qui ne s'appuient pas sur un modèle, d'autres qui exigent le recours à un modèle et quelques activités qui ne tombent pas dans ces 2 catégories.

#### **b) Retour à la notion d'aire**

L'expérience de la vidéo ayant respecté le programme de l'époque, la démarche la plus délicate a consisté à rappeler la notion d'aire (vue en début d'année) sans insister sur les réflexes de manipulation des formules préalablement acquis. Les quelques exercices de "révision" proposés ont astucieusement demandé de décomposer les solides de manière à ne recourir qu'aux formules élémentaires de la «géométrie du plan». Déjà dans un premier temps, quelques formules d'aire «dans l'espace» furent démystifiées. Mais le travail de compréhension des formules d'aire dans le plan n'a pas fait l'objet d'enseignement.

#### **c) Bien cerner la caractéristique retenue : différenciation des grandeurs assimilables par conflits cognitifs**

Un retour au schéma de la figure 2 nous permet de constater que jusqu'ici les activités retenues ont permis aux élèves de **se familiariser avec les objets aux-**

quels on assigne la caractéristique volume et avec l'aire comme une de ces caractéristiques.

Le processus d'identification illustré sur le schéma ne se réalise pas sans difficulté telle que nous l'avons mentionné précédemment.

Le volume est donc souvent confondu avec l'aire totale, le poids, ...

Simultanément ou faisant suite au travail d'exploration de l'espace s'imposent donc des exercices de mise à l'épreuve de la robustesse du concept de volume développé antérieurement. Les étudiants se vront alors proposer des exercices qui les mettront dans une situation de conflit cognitif car ils auront à actualiser un processus d'identification de caractéristique d'un solide dans un contexte de comparaison. Le conflit résulte d'un choix implicite qu'ils ont à faire entre diverses caractéristiques. Trois situations conflictuelles sont proposées dans la séquence d'enseignement.

1. On demande aux étudiants de comparer le volume de deux cylindres construits devant eux avec des feuilles de dimension standard.

Un cylindre est construit en enroulant la feuille dans le sens de la longueur, l'autre est formé en l'enroulant dans le sens de la largeur. La grande majorité des élèves estime que les volumes de chaque cylindre seront identiques. Ils suivent une loi implicite selon laquelle deux solides ayant même aire latérale ont même volume. (figure 3)

2. Dans une deuxième activité, les élèves sont invités à comparer un pavé construit de blocs de Lego et un bâton fait d'autant de blocs. Un certain nombre d'élèves sont tentés par les dimensions linéaires et répondent que le bâton "a plus de volume".

3. Une troisième activité vise à démêler les notions de contenant et de contenu.

Ces activités amènent les élèves avec l'enseignant à préciser ce qu'on entend par volume, par espace occupé, par mesure. Elles permettent donc d'approfondir le concept en faisant prendre conscience de certaines de ses propriétés et en établissant certains liens avec des caractéristiques "voisines".

Donc, dans un premier temps, s'imposent des activités de ce type qui conduisent à cerner la caractéristique que l'on veut quanti-

fier ou mesurer : l'espace occupé. En fait, j'estime que toute approche cohérente à la notion de volume doit forcer l'exploration de nombreuses transformations d'objets-phénomènes qui amènera les élèves à reconnaître celles qui conservent **invariante** la caractéristique "espace occupé". C'est cette idée qui est exploitée à fond dans les trois activités mentionnées ci-dessus. Jusqu'ici la séquence d'enseignement n'est pas allée au-delà de la comparaison en solides. Les élèves n'ont pas été confrontés à la nécessité de quantifier, de mesurer qui sera amenée dans la prochaine étape.

### **-Élaboration d'une formule de base ou la systématisation du dénombrement des unités**

L'objectif général étant savoir raisonner les formules (de volume), la "mise au point" d'une première formule est un instant crucial dans le déroulement de la séquence.

L'organisation de la séquence doit être telle que les élèves qui connaissent la formule  **$V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$**  (dont le statut n'est rien d'autre qu'un produit machinal associé à  $V = a \times b \times c$ ) en soient temporairement écartés, le temps qu'il faut, pour qu'ils ajustent leurs conceptions en rapport avec la notion de formule et, qu'ils associent au volume du pavé (prisme droit à base rectangulaire) l'idée d'un dénombrement systématique et raisonné et, ainsi, contrer les difficultés qu'entraîne l'usage irréflecti des formules.

#### **a) Dénombrement systématique et raisonné des cubes de sucre selon les dimensions de la boîte et par la méthode des tranches**

Pour ce, il nous est apparu nécessaire de "poser le problème du volume" en contexte ce qui chasse les formules "mal" apprises et exige un travail authentique de dénombrement systématique. C'est ainsi que la situation suivante fut proposée aux élèves, l'enseignant disposant du matériel requis pour appuyer sa présentation.

*Une compagnie se spécialise dans la vente de sucre en cubes. Elle utilise actuellement des boîtes des 120 cubes de sucre. Le directeur aimerait changer la forme de la boîte dont refond permet de disposer une tranche de 60 cubes tout en gardant le nombre de cubes à 120.*

On constate que la démarche de

dénombrement imposée implicitement par l'énoncé de la situation conduit les élèves avec l'enseignant à se donner la méthode suivante (qui ne s'appelle pas encore formule) et qui apparaît rapidement à la relation :

$$\begin{aligned} &\text{nombre de cubes dans la boîte} \\ &= \text{nombre de cubes dans la 1ère} \\ &\text{tranche} \times \text{nombre de tranches} \end{aligned}$$

Ainsi, cette méthode sera utilisée «à toutes les sauces» dans le questionnaire qui suivra et qui conduira à établir dans le contexte des boîtes de sucre les relations entre le nombre de cubes dans la boîte et les dimensions en côtés de cubes de la boîte ; pour l'instant, les dimensions des cubes de sucre n'ont pas été évaluées en cm.

L'exploration de cette relation sera poussée jusqu'à s'interroger, par exemple, sur la validité de la méthode avec des fractions (décimales ou non) de tranches. La classe pourra «conclure», non pas empiriquement, mais bien en raisonnant sur les conséquences de fractionner une tranche, que la méthode de dénombrement est efficace même avec des fractions de tranches.

Les élèves concluent cette première étape en modifiant scalairement les dimensions de la boîte et en faisant fonctionner cette méthode avec des questions telles : «*Qu'arrive-t-il au nombre de cubes si je double le nombre de tranches, si les tranches sont trois fois plus larges ?...*»

#### **b) Passage des cubes de sucre par tranche aux $\text{cm}^3$ par tranche dans le prisme droit**

L'étape suivante consiste à appliquer la méthode des tranches pour trouver le nombre de  $\text{cm}^3$  dans divers solides proposés aux élèves. D'abord, en partant de prisme droit à base rectangulaire, les élèves induiront la méthode suivante qui pourra être désignée comme une formule selon les discussions menées en classe.

$$\text{nombre total de } \text{cm}^3 = \text{nombre de } \text{cm}^3 \text{ d'une tranche} \times \text{nombre de tranches}$$

Cette démarche repose sur la notion de «nombre de  $\text{cm}^3$  dans une tranche», notion qui devra donner lieu à une verbalisation constante forçant les élèves à y recou-

rir. Elle permettra de trouver le nombre de  $\text{cm}^3$  dans des prismes dont la base est un parallélogramme, un triangle, un trapèze et même un cercle. A chaque coup, l'idée qui est bien comprise consiste à trouver une technique pour dénombrer le nombre de  $\text{cm}^3$  dans une tranche.

C'est ainsi que les élèves auront développé l'idée que pour trouver le nombre de  $\text{cm}^3$  (le volume en  $\text{cm}^3$ ) d'un solide le découpage en tranche du solide est une technique très efficace. Si on revient au schéma de la figure 2, on constate qu'on est revenu dans le domaine des objets dont on veut quantifier la caractéristique volume et que le calcul rationnel de ce volume exige une transformation mentale des solides qui donne un sens à la caractéristique. Nous avons constaté durant l'expérimentation que leur appréhension des solides s'est littéralement métamorphosée comme nous le verrons dans ce qui suit.

**c) Le dénombrement des  $\text{cm}^3$  dans les solides obliques et introduction au principe de Cavalieri**

C'est ainsi que les élèves ne sont pas désarçonnés lorsque les solides dont on cherche le volume ne sont plus «droits» mais inclinés tout en gardant constamment la même section horizontale. Des empilages de feuilles de forme carrée, rectangulaires, circulaires... fournissent des solides inclinés, spiralés, torsadés... de toutes sortes. Et les élèves en appliquant leur méthode expriment leur conviction que l'on peut transformer un solide biscornu (formé de feuilles ou non) en un solide droit sans changer le volume, car les tranches sont les mêmes. Certains suggèrent même de prendre des tranches de plus en plus minces. La formule des tranches reste donc valide.

Ils sont persuadés que deux solides «qui ont les mêmes tranches» (même s'il faut les prendre minces !) ont même volume. Il devient donc facile à l'enseignant de donner une forme rigoureuse à ce principe en précisant la formulation qu'en a donné Cavalieri (1598 1 647):

**Deux solides ont même volume si les figures déterminées par les intersections avec chaque plan tracé parallèlement à la base ont même aire.**

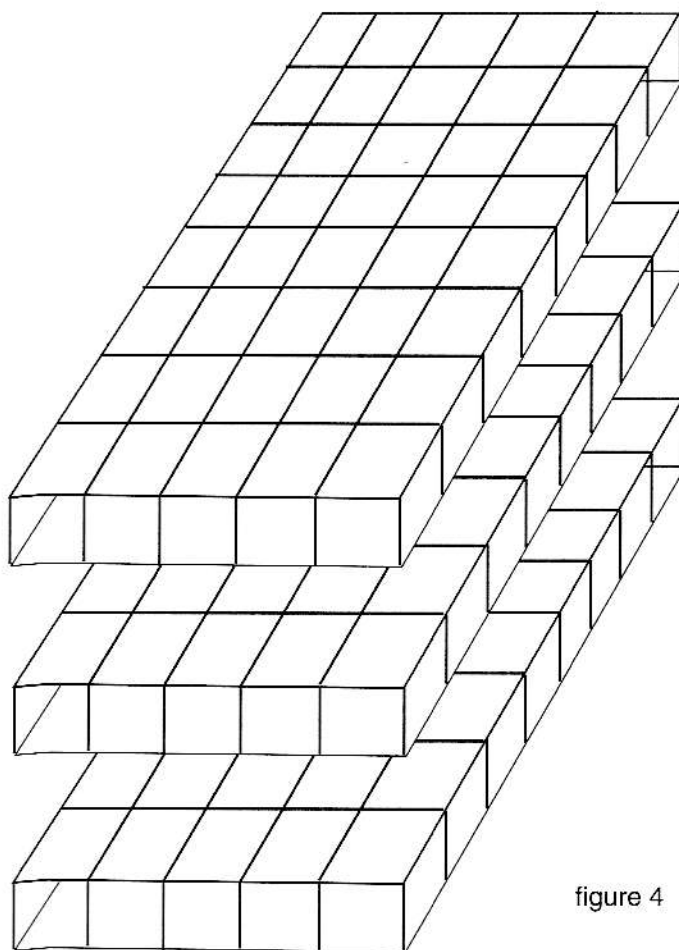


figure 4

**d) Introduction de la formule standard ?**

On aura constaté que l'introduction des  $\text{cm}^3$  n'a pas été accompagnée par une présentation simultanée de la formule dite standard:

**Volume = aire de la base  
x la hauteur.**

Il faut constater que cette formule fait disparaître l'unité de base qui est le  $\text{cm}^3$ , ce qui n'est pas sans conséquence pour le développement du concept de volume. Cependant, l'institutionnalisation du concept commande que l'on en arrive à cette formule standard à un moment approprié qui relève d'un choix didactique commandé par un juste équilibre entre la familiarisation avec le concept et l'efficacité de l'usage éventuel des formules standards. De toute façon, tout comme un pli ne cesse de marquer une feuille peu importe la technique de dépliage utilisée, la méthode des tranches restera toujours présente à l'esprit de ceux qui l'auront utilisée dans leur élaboration du concept de volume.

Dans la séquence d'enseignement,

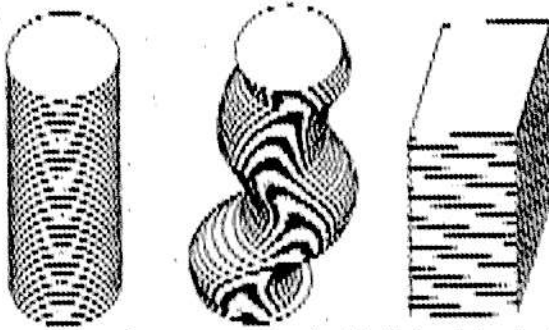


Figure 5

nous avons choisi d'introduire la formule standard juste avant l'introduction des solides obliques et bizarroïdes. Cependant, à mon avis, le comment importe autant que le moment.

**e) Introduction de la formule standard ?**

La formule de base fournit une méthode pour trouver le volume d'un pavé en  $\text{cm}^3$  en considérant des tranches identiques du solide constituées de  $\text{cm}^3$  (et, éventuellement une fraction de tranches) et en dénombrant ces tranches.

Je rappelle que la méthode ou la formule établie jusqu'ici s'énonçait:

$$\text{nombre total de cm}^3 = \text{nombre de cm}^3 \text{ d'une tranche} \times \text{nombre de tranches}$$

Il faut donc «convaincre» les élèves que :

1- le nombre de  $\text{cm}^3$  par tranche peut être mis en correspondance avec le nombre de  $\text{cm}^2$  de la base et

2 - le nombre de tranche de  $\text{cm}^3$  peut s'évaluer à l'aide de la hauteur du solide.

Pour ce, les élèves doivent s'interroger avec l'enseignant sur les deux correspondances. La vidéo montre donc qu'il faut retourner à un pavé et mettre en correspondance une tranche et une base quadrillée en  $\text{cm}^2$ . Il est évident qu'à chaque  $\text{cm}^3$  correspond un  $\text{cm}^2$  et inversement. Ce discours doit nécessairement s'appuyer sur un matériel pertinent. C'est dans le même

esprit que la hauteur du pavé sera assimilée au nombre de tranches.

Ainsi, le passage de la formule de base à la formule standard peut s'effectuer selon des deux étapes illustrées à la figure 6.

Toute cette démarche doit converger vers une formule qui sera utilisée tantôt en utilisant les abréviations ( $V = A \times h$ ) mais aussi souvent en conservant la désignation en mots des grandeurs, à savoir: Volume = aire de la base x hauteur.

Au terme de l'introduction de la formule standard, il ne reste plus qu'à proposer aux élèves toute une série d'exercices visant à consolider les acquis antérieurs dans une perspective institutionnelle. Je rappelle que l'approche de la séquence d'enseignement propose un détournement par une formule de base pour pouvoir raisonner les formules et donner un sens aux calculs commandés par les formules classiques. L'introduction de cette formule de base n'est donc pas simplement le fruit d'une fantaisie pédagogique mais témoigne plutôt d'une intention didactique de favoriser chez les élèves une meilleure appréhension de l'espace grâce à une élaboration plus rationnelle et riche des concepts de volumes et d'aires.

**f) Les conversions d'unités: jeu d'enfant**

Avant de passer aux «solides à pointes», les traditionnels exercices de changement d'unité ou ceux où les données sont fournies dans des unités diverses sont abordés de manière très différente. Les tableaux habituels de transformations d'unité ne sont plus nécessaires. La plus grande visualisation que les élèves ont développée fournira à l'enseignant l'occasion de poser le «problème» des changements d'unités en revenant aux solides qui peuvent représenter ces unités. La question de savoir «combien il y a de  $\text{cm}^3$  dans un  $\text{dm}^3$  ?» est équivalent à se demander «combien de tranches de  $100 \text{ cm}^3$ , il y a dans un  $\text{dm}^3$  ?». Le nombre de  $\text{cm}^3$  dans un  $\text{dm}^3$  est donc  $10 \times 100 = 1000 \text{ cm}^3$ .

$$\begin{aligned} \text{nombre total de cm}^3 &= \text{nombre de cm}^3 \text{ x nombre de tranches} \\ &\text{d'une tranche} \\ \text{volume en cm}^3 &= \text{aire de la base x hauteur en cm} \\ &\text{en cm}^2 \end{aligned}$$

Figure 6

La pyramide

La prochaine étape consiste à développer longuement et minutieusement une étude de la pyramide et de son volume.

**a) Décomposition d'un prisme droit à base triangulaire en trois pyramides**

Cet épisode de la démarche commence par la "démonstration" en classe avec du matériel déjà préparé illustrant la décomposition possible d'un cube en trois pyramides à base carrée de forme identique. Ainsi, pour ces pyramides spéciales, on trouve un volume qui est le tiers du volume du cube.

Quand est-il, si on considère un prisme droit à base triangulaire ? Est-il décomposable en trois pyramides ayant même volume ? Cette décomposition est périlleuse et difficile et ne peut pas être réalisée simplement en produisant un dessin qui illustre le fait !

C'est la raison pour laquelle il est nécessaire de guider les élèves avec du matériel bien pensé de manière à leur faire reconstruire un prisme avec trois pyramides qu'ils auront préalablement préparées à la maison. Les faces de ces pyramides peuvent être bien identifiées par des lettres ce qui facilitera d'autant la reconstruction du prisme. Mais les trois pyramides obtenues ont-elles même volume ?

**b) Retour au principe de Cavalieri**

En comparant les trois pyramides avec les élèves, l'enseignant lance l'idée selon le degré de préparation révélé par la discussion que :

évidemment cette idée à ce stade ne peut pas s'appuyer sur une quelconque formule du volume des pyramides.

**Toutes les pyramides  
ayant des bases d'aire égale  
et même hauteur  
ont le même volume.**

Le sommet de cette pyramide déformable est fixé à une tige que trois côtés d'une boîte de carton (d'emballage) contraignent à être déplacé dans un plan. Cette boîte de carton est ouverte du côté de la classe. En déplaçant le sommet, on obtient donc toute une famille de pyramides ayant même base et même hauteur. La question du volume constant peut donc être posée dans ce cadre qui ajoute au sens de l'invariance.

Ce sont les élèves qui insistent pour qu'on applique le principe de Cavalieri. Si les tranches ont même aire, alors toutes ces pyramides ont même volume. Cette démonstration est loin d'être facile même si

elle n'exige que le recours au théorème de Thalès. Même les élèves qui ne suivront pas la finesse de cette dernière étape auront passé par le chemin de Cavalieri. Ceci m'apparaît comme une expérience mathématique significative.

**c) Des pyramides à base triangulaire aux pyramides à bases polygonales ou aux cônes**

Le volume des pyramides à base polygonale ne présente pas de problèmes pour les élèves. Leur exploration préalable de l'espace leur permet, en effet, de «visualiser» que comme tout polygone est décomposable en triangles, alors toute pyramide à base polygonale est décomposable en autant de pyramides à base triangulaire. L'enseignant s'assure alors que tout le monde voit bien que chaque pyramide a même hauteur et qu'il est possible de recourir à la distributivité pour établir que :

$$\begin{aligned}\text{volume} &= 1/3 (\text{vol. } P_1 + \text{vol. } P_2 + \text{vol. } P_3 + \dots + \text{vol. } P_n) \\ \text{volume} &= 1/3 (\text{Aire } B_1 \times h_1 + \text{Aire } B_2 \times h_2 + \text{Aire } B_3 \times h_3 + \dots) \\ &= 1/3 (\text{Aire de } B_1 + \text{Aire de } B_2 + \text{Aire de } B_3 + \dots + \text{Aire de } B_n) \times h \\ &= 1/3 (\text{Aire de la base polygonale}) \times h\end{aligned}$$

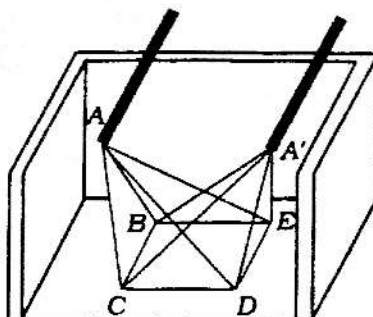


Figure 7

**d) Le cône et la sphère: introduction du "raisonnement à la limite"**

Il n'est pas difficile de constater que les élèves avec ou sans leur enseignement se convainquent vite que le cercle est obtenu à partir d'un polygone quand on augmente indéfiniment le nombre de côtés. Même s'ils affirment que le dédoublement à l'infini du nombre de côtés du polygone va conduire à un cercle, ils ne sont certainement pas à même d'apprécier la puissance ou la finesse de la théorisation du 19<sup>ème</sup> siècle sur la notion de limite. D'un autre côté, le raisonnement du type encadrement-à-la-Archimède exige une capacité d'abstraction que

la majorité des élèves n'auront pas développée. Tout au plus savent-ils imiter les Newton et Leibniz (imiter, je dis bien) en manipulant avec maladresse et imprudence le vocabulaire de la limite. Faut-il pour autant les priver de cet outil de pensée qui, une fois installé, n'aura qu'à être amendé et resitué par rapport aux conditions qui valident son emploi ?

Nous avons estimé que la puissance du "raisonnement-à-la-limite" vaut la peine qu'on initie tous les élèves (même ceux qui ne se lanceront pas dans des carrières scientifiques) à son fonctionnement. Bien entendu, il faut pouvoir pour la circonstance bien dire les choses. Il n'est pas question d'introduire une métrique pour parler de convergence. Il m'apparaît important cependant d'introduire le processus-limite en mots et débloquer les élèves de l'objet limite.

Ainsi le discours devra insister sur le fait que la figure obtenue après chaque transformation **ressemble de plus en plus** à la figure considérée et qu'ainsi la caractéristique (grandeur) de cette suite

d'objets coïncidera avec celle de l'objet considéré à la limite. Éventuellement, ceux qui auront à poursuivre une carrière où la rigueur s'impose apprendront à respecter les conditions initiales qui garantissent de telles convergences. C'est ainsi que les formules du volume du cône et du volume de la sphère ont été établies.

$$\text{Volume de chaque pyramide} \\ = 1/3 \text{ aire de la base } \times \text{ hauteur}$$

#### • Volume du cône

A partir d'une construction qui illustre une pyramide à base polygonale régulière, l'enseignant indique que lorsque le nombre de côtés est augmenté, le volume du polygone obtenu est toujours le même:

Or les pyramides obtenues ressemblent de plus en plus à un cône. Alors les volumes obtenus, en dédoublant le nombre de côtés, seront de plus en plus près

$$\lim (1/3 h \times \text{aire}) \\ = 1/3 h \times \lim (\text{aire}) = \\ 1/3 h \times \text{aire du cercle}$$

du volume du cône qui est la figure-limite.

En fait, ce raisonnement porte sur

la propriété des limites. Les élèves en pratique utilisent l'argument suivant sans en prendre conscience:

Il ne m'apparaît pas judicieux de formaliser cette manière de faire.

De toute façon, la classe se retrouve donc toujours avec le même type de formule. Ce qui me suggère la remarque suivante:

Jusqu'ici les élèves n'ont eu que deux formules à mémoriser:

$$\text{Volume} = \text{Aire de base } \times \text{ hauteur} \\ \text{Volume} = 1/3 (\text{Aire de base } \times \text{ hauteur})$$

#### • D'un ballon de foot au volume de la sphère

Le volume de la sphère est traité d'une manière semblable. L'enseignant peut partir d'un ballon de foot qui est un icosaèdre tronqué (à faces incurvées).

En fait, l'icosaèdre tronqué qui est présenté aux élèves n'est pas une sphère, car les faces sont plates. Mais, on peut trouver le volume de ces icosaèdres, car ils sont décomposables en 12 pyramides à base pentagonale et en 20 pyramides à base hexagonale.

C'est alors qu'intervient un «raisonnement-à-la-limite» (plus subtil et moins probant). On établit que:

$$\text{vol. icosaèdre} = \text{volume des pyramides à base pentagonale} + \text{volume des pyramides à base hexagonale} \\ = 1/3 (\text{aire } B_1 + \text{aire } B_2 + \text{aire } B_{12}) \times h_1 \\ + 1/3 (\text{aire } B'_1 + \text{aire } B'_2 + \text{aire } B'_{20}) \times h_2$$

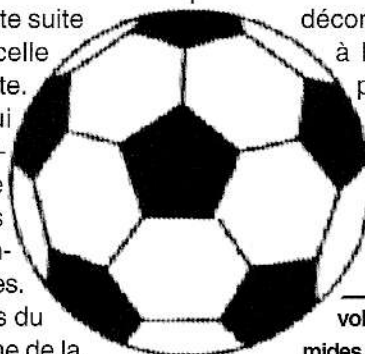
Alors, l'enseignant demande d'imaginer que chaque face est découpée en triangles dont les sommets sont sur la sphère circonscrite au ballon. Le processus est répété ad infinitum.

Ce sont les élèves qui affirmeront en mots (sans symbolisation) que :

$$\lim (\text{somme des aires de chaque base}) \\ = \text{aire de la sphère} \\ \lim (h_1) = \lim (h_2) = \text{rayon de la sphère}$$

En conséquence, ils concluront que:

$$\text{Volume de la sphère} = 1/3 \text{ aire de la sphère } \times \text{ rayon de la sphère}$$



Ici, les élèves se donnent une troisième formule à mémoriser :

$$\text{Volume de la sphère} \\ = 1/3 (\text{Aire de la sphère} \times \text{rayon})$$

#### • Et l'aire de la sphère !

C'est sans doute ce que les collègues malicieux lanceront. En fait, les enseignements de la géométrie traditionnelle nous montrent que l'aire de la sphère n'est rien d'autre que l'aire latérale du cylindre qui entoure la sphère. Il existe une démonstration facile de ce théorème que l'on retrouve dans les manuels du début du siècle. Je ne pense pas qu'il soit par contre approprié de "lancer" cette démonstration aux élèves du secondaire. Par contre, cette affirmation leur permettra de calculer que :

$$\begin{aligned} \text{Aire de sphère} &= \text{aire du cylindre....} \\ &= \text{circonf.} \times \text{hauteur} \\ &= 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

qui pourra s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \text{Aire de sphère} \\ &= \text{aire de quatre grands cercles} \end{aligned}$$

Il devient donc possible de raffiner notre formule du volume de la sphère :

$$\begin{aligned} \text{Volume de la sphère} \\ &= 1/3 (\text{Aire de quatre grands} \\ &\quad \text{cercles} \times \text{rayon}) \end{aligned}$$

#### e) Et la suite

C'est normalement à la sphère que s'arrête le type de solide dont on cherche le volume. Ensuite, l'enseignement se porte sur des solides dits décomposables. Les élèves ont alors droit à se faire présenter des dessins d'objets dont un découpage pertinent permet de retrouver des solides « connus » et surtout les dimensions requises pour effectuer le calcul. Dans l'enseignement actuel, c'est souvent là que le bât blesse. Non pas que les élèves ne savent pas utiliser les formules qu'on leur fournit (car ils n'ont plus de mémoire), mais quelque fois ils ne savent pas très bien se retrouver dans les dimensions inscrites (ou, pire, pas inscrites) sur le dessin soumis. On constatera alors que le travail de conceptualisation des grandeurs volume et aire et le développement des habiletés d'analyse et d'exploration de l'espace sont à même

d'écarter bon nombre des erreurs courantes commises par les élèves.

Mais ne pas faire d'erreur n'est pas le but ultime de l'approche présentée dans cet article. C'est ce que je rappellerai en conclusion.

### Conclusion

A partir de l'exemple du volume, j'ai questionné le rôle étrange que jouent les formules en trop grand nombre introduites dans les classes de mathématiques du secondaire. J'ai noté au passage que la problématique des formules est intimement intégrée à celle de l'introduction des grandeurs et qu'elle dépendait donc d'une analyse en ce sens. Dans le court examen que j'ai fait de cette question, j'ai montré que seules quelques formules suffisent à remplacer la panoplie que l'on fournit aux élèves. En partant de l'objectif : faire raisonner les formules. Nous avons abouti à une approche qui impose une plus grande exploration de l'espace et de ses propriétés. Cette approche conduit à une réduction radicale du nombre de formules à mémoriser et favorise simultanément une meilleure compréhension de l'espace. Elle centre les élèves sur les transformations qui conservent les grandeurs retenues et entraîne, chez les élèves, une familiarisation avec les propriétés des objets de l'espace qui constitue un investissement à long terme de leurs habiletés heuristiques. Après toutes ces réflexions, il est assez étonnant que la réforme des mathématiques (modernes) n'ait jamais questionné l'approche aux grandeurs de l'enseignement secondaire. On peut certes imaginer que les réformateurs ont d'abord voulu réorganiser structurellement les mathématiques scolaires. Ainsi, les grandeurs leur sont vraisemblablement apparues comme des vestiges qu'une bonne théorie de la mesure allait normaliser ! Je pense qu'il y a plus dans cette omission caractéristique. En réalité, les grandeurs et leurs formules ont un statut mathématique très particulier. Les raisonnements qu'elles supposent impliquent un certain retour au réel (ou un retour à un certain réel) dans lequel se sentirait plus à l'aise un scientifique. Non pas que la démarche que nous avons exposée dans cette présentation ne soit pas rigoureuse, mais plutôt qu'elle relève d'une « rigueur spéciale » pour la mathématique contemporaine.

Les programmes de mathématiques peuvent évidemment se retrancher derrière des précautions toutes disciplinaires et une vigilance quasi scolastique, mais l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire devra toujours s'inscrire dans la perspective d'une formation générale et tenter de chasser l'idée que les raisonnements mathématiques ou scientifiques sont hors de portée du commun des mortels. On aura compris que l'enseignement des formules et des grandeurs exposé dans cet article vise précisément un tel objectif: cesser de laisser croire que les mathématiques sont incompréhensibles et reporter à plus tard des manières de pensée accessibles au grand nombre dans une forme quelquefois primitive et imparfaite.

J'ai exposé dans mon entretien comment un enseignement instrumentalisé des formules, hérité, me semble-t-il, de la nécessité d'offrir à chacun la recette commode dans un métier peut faire place à une approche beaucoup plus conforme avec les objectifs actuels de l'enseignement des mathématiques. D'autant plus que les ordinateurs et les calculatrices ont transformé totalement les relations que les élèves peuvent entre tenir tout autant avec les for-

mules et qu'avec les grandeurs, sans compter les occasions renouvelées d'exploration et d'analyse qu'ils offrent.

Je crois que les grandeurs et les formules nous amènent en mathématiques au seuil de l'enseignement de la physique. Tout le questionnement de cet exposé nous entraîne à repositionner l'enseignement des mathématiques par rapport à la physique. Par exemple, plusieurs grandeurs : distance, masse, densité, vitesse, accélération sont des concepts que la physique se propose d'étudier. Y a-t-il en didactique de la physique des éléments qui nous permettraient de prolonger notre réflexion sur les grandeurs et leurs formules ?

Les grandeurs et les mesures sont souvent considérées comme des applications qui s'inscrivent dans le prolongement d'une maîtrise de l'espace et de ses propriétés, que nous avons développée antérieurement. Or, j'estime que cet article a su rappeler que l'étude des grandeurs fait partie intrinsèquement de l'analyse des objets mathématiques et qu'elle ne saurait être considérée comme un appendice à développer de manière accessoire. □

### Références bibliographiques

- Apmep** (1982). « Mots: GRANDEUR - MESURE. Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs », tome VI, no. 46.
- Frechet, M.** (1997). «< Nombre et grandeur de Euclide à Descartes >». Mesurer, compter, modéliser. Enjeux d'une formation et d'une culture mathématique. Actes du colloque, juin 1996, Rouen. Académie de Rouen, p. 25-27.
- Janvier, C.** (1992). «Le volume, mais où sont les formules ?> Scénarisation et conception de la vidéo, avec la participation de Daniel Campeau animateur enseignant. Réalisation de Robert Frosi avec la collaboration du Service audiovisuel de l'UQAM, Coproduction UQAM-Modulo, durée: 33 minutes.
- Piaget J. et Inhelder B.** (1941). Le développement des quantités physiques chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.
- Ricco G., Vergnaud G. et Rouchier A.** (1983). «Re présentation du volume et arithmétisation» Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4.1.
- Vergnaud G., Rouchier A., Desmoulières S., Landre C., Marthe P., Ricco G., Samurçay R., Rogalski J. et Viala A.** (1983). « Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). » Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4.1.