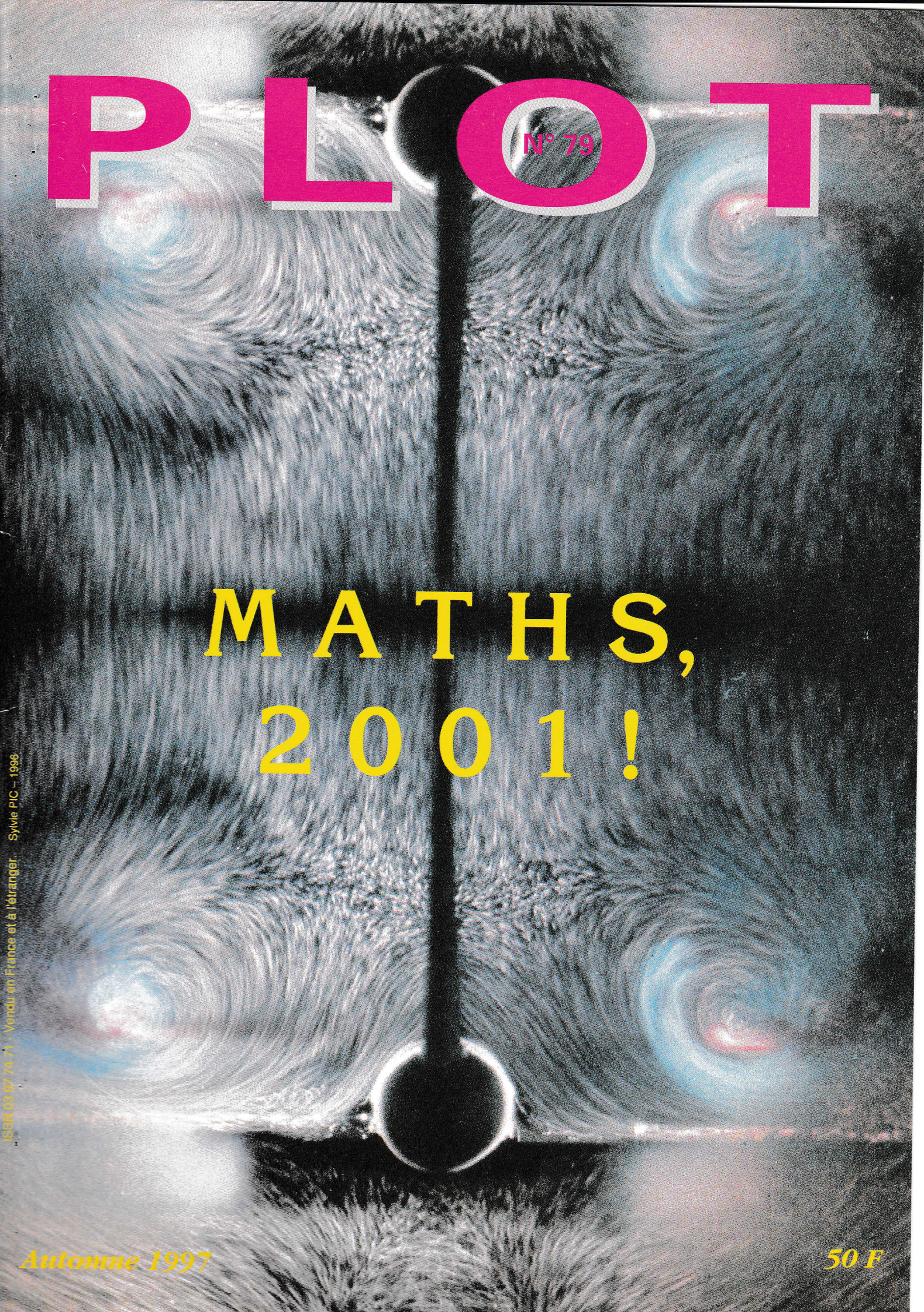


PLOT

The background of the cover is a complex, abstract pattern. It features a central vertical line that divides the image into two halves. On either side of this line, there are swirling, vortex-like patterns in shades of blue, grey, and white. The overall effect is reminiscent of a mathematical visualization or a microscopic view of a material.

N° 79

MATHS, 2001!

ISSN 03 07 74 71 - Vendu en France et à l'étranger - Sylvie PIC - 1996

Automne 1997

50 F

Plot n° 79 - A l'horizon 2000 !

SOMMAIRE

1 - Rapport de conjoncture sur les mathématiques (1ère partie) CNRS, Paris	2
2 - L'étrange théorème de Morley Maxime Cunin, Tours	14
3 - La main à la pâte en maths Michel Darche, Orléans	18
4 - Maths appliquées en Bretagne Hélène Tattevin, Rennes	22
5 - L'empreinte d'un géant : Laurent Schwartz Emmanuel Deshayes, Paris	28
6 - Maths 2 000 : défaite ou triomphe ? Apmp, SMF, SMAI, ...	31
7 - A-Plot-strophe	41
8 - Bon de commande et d'abonnement	47

Directrice de publication

Marie-Laure Darche-Giorgi

Responsable de rédaction

Michel Darche

Secrétariat

Madeleine Schlienger

Comité de Rédaction

Jacques Borowczyk

Michel Clinard

Daniel Boutté

Gérard Chauvat

Roger Crépin

Luce Dossat

Georges Le Nezet

Serge Parpay

Michel Soufflet

Raymond Torrent

Abonnements

PLOT APMEP

Université, BP 6759

45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement

150 FF pour 4 numéros par an

Adhérent APMEP : 130 F

Abonnement étranger : 150 F

+ tarif avion

Photocomposition et maquette

i.c.e. - Limoges

Impression

Fabrègue - St-Yrieix

Editeur

Associations régionales

de l'APMEP de Poitiers, Limoges,

Orléans - Tours, Nantes, Rennes,

Rouen, Toulouse, Brest, Caen,

Clermont-Ferrand et La Réunion

Diffusion

Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

Publié avec le concours du Ministère de la Coopération et de la Francophonie

EDITORIAL

L'an 2000, année mondiale des mathématiques, approche à grands pas. Simultanément, le monde change plus vite que tout modèle proposé. La France est particulièrement concernée par cette évolution rapide, et encore plus son système d'enseignement.

Qui aurait pu penser il y a moins de 3 mois que le nouveau ministre de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie serait celui qui vient d'écrire "La défaite de Platon" ?

L'occasion était à saisir pour faire le point sur l'évolution des mathématiques et de son enseignement, sans attendre l'an 2000.

Les prochains numéros du Plot (97 et 98) :

- Les ateliers des journées Apmp d'Albi
- Des outils pour l'astronomie au Collège (numéro spécial)
- Didactique et mathématique au Collège

Mathématiques et outils de modélisation

CNRS , Paris

Tous les quatre ans, le Comité National de la Recherche Scientifique du CNRS - Centre National de la Recherche Scientifique - publie son rapport de conjoncture. Cette radioscopie de la recherche permet de connaître l'état des lieux de chaque grand domaine de la recherche. Le PLOT a déjà publié dans ses numéros les rapports de conjoncture 1989 et 1993 concernant les mathématiques. Voici aujourd'hui celui de 1997.

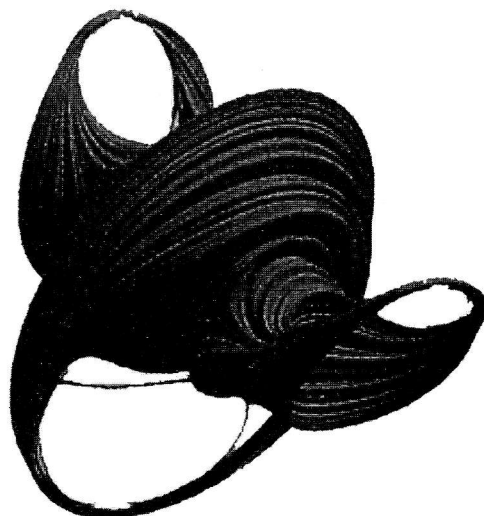
Introduction

La communauté des mathématiciens est vaste et très diverse, mais aussi très unitaire car ses membres ont une démarche commune fondée sur l'élaboration de concepts à valeur universelle et sur l'exigence de démonstrations. Issues d'une longue tradition intellectuelle, les mathématiques construisent un langage et des outils que la plupart des autres disciplines scientifiques adoptent à plus ou moins long terme pour traiter leurs propres modèles.

La position des mathématiques françaises est excellente : l'école française est la seconde du monde, quel que soit le critère retenu : nombre de médailles Fields, invitations de conférenciers français aux derniers Congrès Internationaux des Mathématiciens, répartition de ceux-ci entre les divers domaines, etc.

Les mathématiques n'ont pas la réputation d'être un sujet médiatique, même en France. Souvent elles sont absentes, ou leur image est déformée, ou même leur fonction en tant que science, dévoyée. Toutefois, deux événements récents ont franchi le rideau de l'indifférence. Le premier est, en 1994, **la preuve de la conjecture de Fermat**, par Andrew Wiles. Le second est, toujours en 1994, l'obtention par Jean-Chris-

tophe Yoccoz et Pierre-Louis Lions de deux des quatre médailles Fields, la plus haute récompense mondiale décernée une fois tous les quatre ans aux mathématiciens. Ces événements exceptionnels ne sont que la partie émergée d'une immense activité très diversifiée. Cette activité s'appuie sur des structures et des institutions solides, dans lesquelles le CNRS joue un rôle primordial et reconnu bien au-delà de nos frontières.



Une des créatures fractales d'Alan Norton de l'IBM Research Center

Le monde mathématique est traversé par des idées qui, partant des théories les plus abstraites, aboutissent parfois aux applications industrielles. Il est remarquable de constater que l'inverse se produit aussi. Les interactions avec les autres disciplines, physique, informatique, chimie, biologie, économie, ... ne cessent de nourrir le développement des mathématiques. Les contacts directs avec l'industrie progressent et l'influence des mathématiques s'affirme en se diversifiant. Une des raisons en est la capacité des mathématiciens à simplifier, à

clarifier et à dégager des concepts abordables.

Les mathématiciens eux-mêmes constituent la plus grande partie du capital investi dans la recherche. Le temps du chercheur isolé, rêvant à son théorème en mâchant son crayon, est révolu. Les mathématiciens travaillent maintenant en laboratoire, dans des équipes structurées en réseaux internationaux. Ils ont été parmi les premiers à s'investir dans les communications de type Internet. Les évolutions techniques, en particulier l'utilisation généralisée des ordinateurs, ont transformé la vie quotidienne de tous les scientifiques. La puissance de calcul des machines rend viables de nouvelles approches intellectuelles qui permettent aux mathématiques d'acquérir aussi une dimension expérimentale. Cela est vrai dans le domaine de la modélisation, en **météorologie**, en **génétique** ou en **économétrie**, pour ne citer que quelques exemples, où la classification de données complexes nécessite des multitudes d'expériences pour dégager de nouvelles lois. C'est aussi vrai dans la théorie mathématique elle-même, des conjectures se dégageant parfois des calculs dans certains domaines.

Ce rapport tente donc de donner un aperçu de la dynamique très complexe qui régit l'évolution des mathématiques actuelles. La commission a réalisé dans ce but une enquête auprès de mathématiciens parmi les plus représentatifs. Elle tient à remercier tous ceux qui ont bien voulu participer à cette enquête. Leurs réponses ont

inspiré plusieurs passages de ce texte.

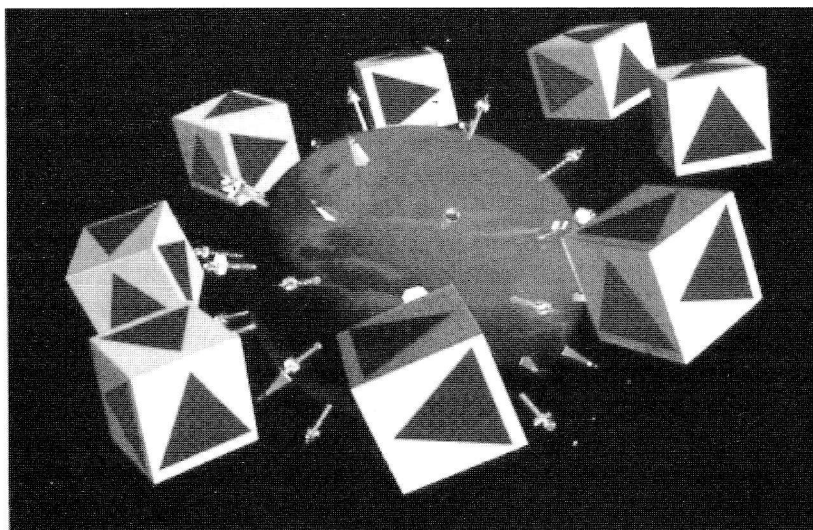
Les développements qui vont suivre présentent de grandes écoles thématiques, analysent quelques thèmes transversaux et abordent des exemples d'interactions dans la théorie et la modélisation. Ils se poursuivent par des considérations sur la situation française et le contexte international, et par des vœux sur les moyens en hommes, en crédits et en équipements.

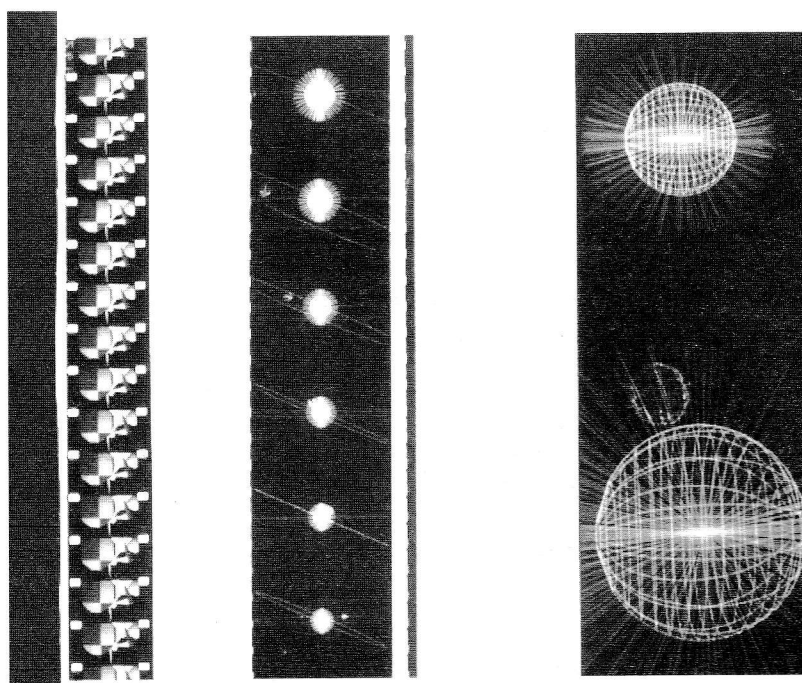
Présentation des grandes écoles thématiques et de certains courants

Il s'agit de présenter ici quelques-unes des principales écoles classiques qui forment la base de l'édifice mathématique. Il est important d'observer leur évolution, car souvent ce sont des chercheurs formés par ces écoles, qui s'investissent dans de nouveaux sujets ou qui impulsent de nouvelles interactions.

1 - Algèbre et Théorie des nombres

L'algèbre et la théorie des nombres appartiennent aux domaines traditionnels des mathématiques. Elles ont, depuis un siècle, noué des relations fécondes avec d'autres branches comme la géométrie ou l'analyse. Ci-dessous sont mises en relief





quelques-unes des facettes de ces théories.

La théorie des nombres a vu de très grands progrès dans les dernières années. Le plus spectaculaire est la résolution en 1994 du problème énoncé par Fermat au XVII^e siècle en des termes accessibles à tous. La solution découle de la preuve d'une conjecture récente de Taniyama-Shimura-Weil, portant sur des notions très compliquées à décrire, même à l'usage des mathématiciens d'autres spécialités. De nombreuses questions importantes restent ouvertes. La compréhension des points

rationnels des variétés algébriques définies sur un corps de nombres est l'objet d'actives recherches qui s'organisent autour de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. D'une nature plus arithmétique, la conjecture d'Artin sur les fonctions L des corps de nombres résiste encore. On peut signaler aussi le problème inverse de Galois (on conjecture que tout groupe fini est le groupe de Galois d'un corps de nombres sur $\mathbb{Q}$) qui est à la croisée de la théorie des nombres, de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes.

On note une forte interaction entre les méthodes, qu'elles soient arithmétiques, géométriques et plus récemment algorithmiques. La théorie des nombres est une discipline très bien représentée en France. L'école française est de premier niveau sur le plan international.

Passons maintenant à certains domaines de l'**algèbre**.

Actuellement les questions les plus vivantes et les plus stimulantes de la théorie des groupes finis et algébriques sont celles touchant à la théorie des représentations. Un certain nombre de conjectures, énoncées dans les dix dernières années, prédisent des liens profonds entre combinatoire, groupes, tresses, géométrie algébrique, topologie, et sont corroborées par de nombreux résultats numériques.

Plusieurs problèmes portant sur les actions de groupes algébriques réductifs restent ouverts, par exemple la description des actions sur un espace affine (avec des applications à de questions naturelles en géométrie algébrique) ou celle des propriétés globales des quotients d'ouverts de variétés algébriques projectives construits par la théorie des invariants.

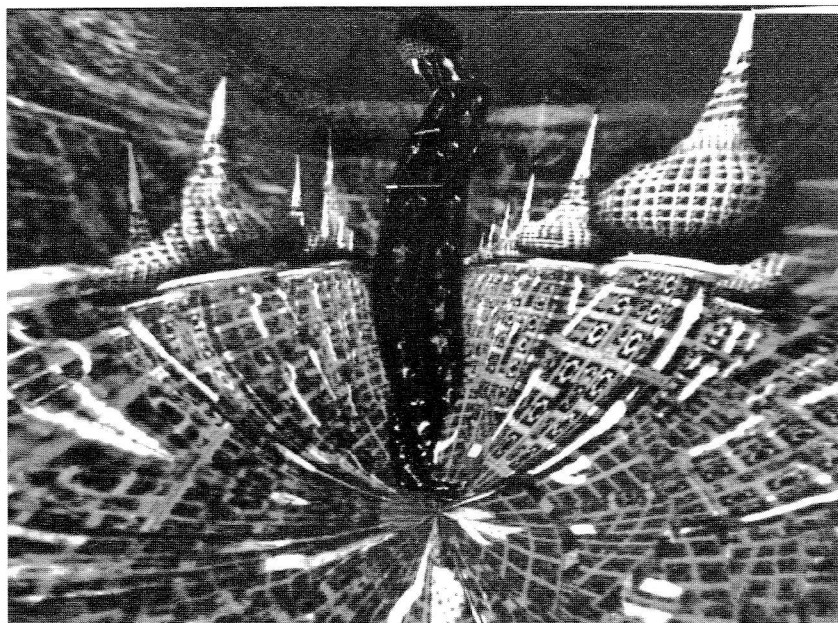
Des questions classiques comme le calcul des multiplicités dans les produits tensoriels de représentations ont été éclairées d'un jour nouveau avec l'introduction des bases cristallines et les travaux sur le modèle des chemins ; ainsi ont été obtenues de nouvelles formules purement combinatoires qui expriment les multiplicités comme sommes d'entiers positifs. Des progrès sur la décomposition des puissances symétriques ont aussi été accomplis récemment, mais cette question reste encore largement ouverte.

La détermination des caractères irréductibles des groupes réductifs en caractéristique positive, objet d'une conjecture de Lusztig, a été obtenue récemment grâce à des ponts construits avec les groupes quantiques en une racine de l'unité et les algèbres de Kac-Moody ; il est remarquable qu'un de ces ponts ait été établi à partir d'idées de physique théorique.

Des objets de la géométrie convexe, **polytopes**, fonctions de partition, apparaissent naturellement dans des problèmes issus de la théorie des groupes réductifs ; ces objets jouent aussi un rôle dans des questions d'actualité en géométrie symplectique.

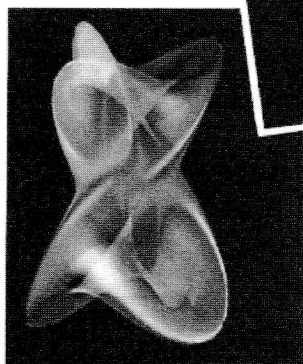
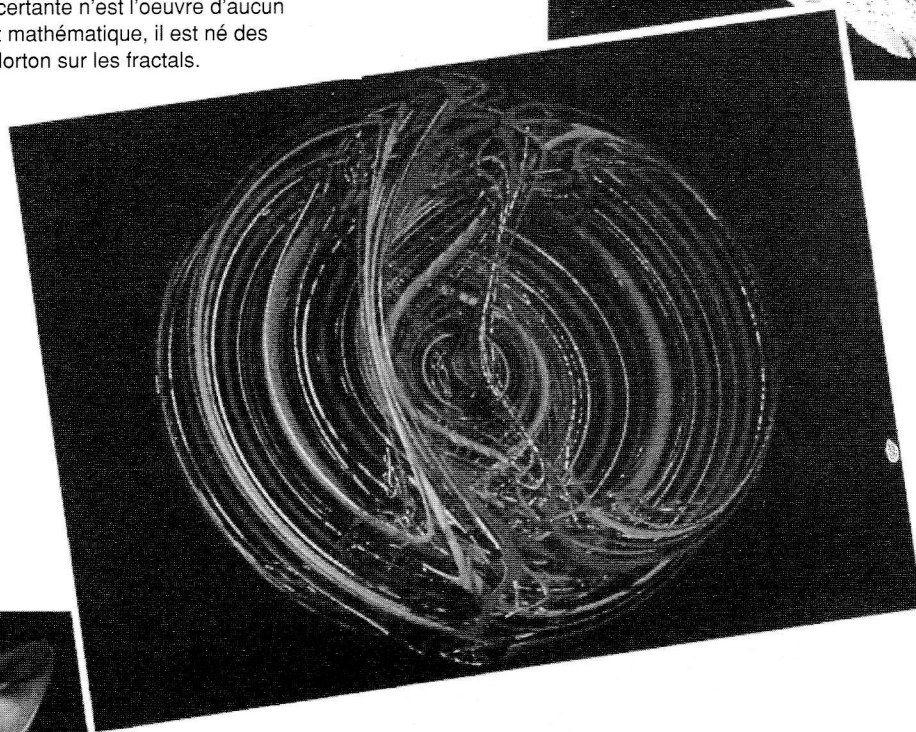
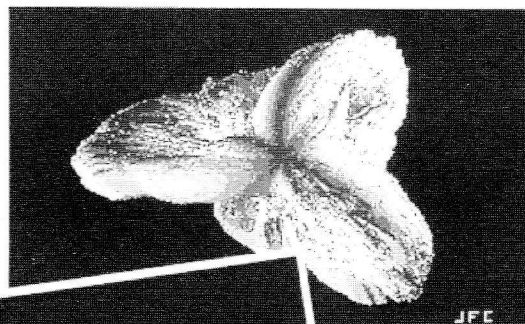
2 - Géométrie et topologie algébriques

La géométrie s'est développée en plusieurs branches (différentielle algébrique,



Surface de Boy, version Lactatamme,
par Jean François Colonna

Cette carapace aux formes entrelacées d'une
plastique déconcertante n'est l'oeuvre d'aucun
artiste. Pur objet mathématique, il est né des
travaux d'Alan Norton sur les fractals.



Les images mathématiques constituent un
excellent moyen d'étude pour comprendre les
figures topologiques impossibles.
Ici, une image réalisée par Francis, Idasak et
Cox (NCSA).

intégrale, etc.) qui ont chacune leur problématique et leurs techniques. Certaines sont présentées dans ce chapitre, d'autres dans le chapitre "Interactions" (et ce choix est un peu arbitraire). D'autres aspects auraient mérité d'avoir une place, en particulier les nouvelles géométries "arithmétiques" (p-adiques) où l'école française est de niveau exceptionnel. La topologie a, elle aussi, éclaté en plusieurs centres d'intérêt dont certains, moins algébriques sont évoqués plus loin.

La géométrie algébrique complexe a été très bousculée récemment par le dialogue avec la physique mathématique, en particulier la théorie des champs : citons par exemple la découverte de la symétrie miroir, qui est un phénomène de dualité entre des familles de variétés projectives d'un type particulier, dit de Calabi-Yau. Des conjectures décrivent des relations très précises entre une variété et son "miroir", permettant notamment l'énumération des courbes rationnelles sur la variété. Citons aussi les "fonctions thêta non abéliennes" sur l'espace des modules des fibrés principaux sur les courbes, les invariants de Donaldson et, plus récemment, de Seiberg-Witten (évoqués dans un contexte plus général dans le chapitre "Interactions avec la physique") sur les surfaces algébriques, et bien d'autres. Beaucoup de ces théories ont maintenant un statut mathématique, mais pas toutes : l'intuition de la théorie des champs, qui est le moteur commun de toutes ces découvertes, échappe actuellement à la plupart des mathématiciens. Rendre cette théorie rigoureuse est probablement un objectif à long terme, mais il est peut-être possible de développer une intuition mathématique parallèle.

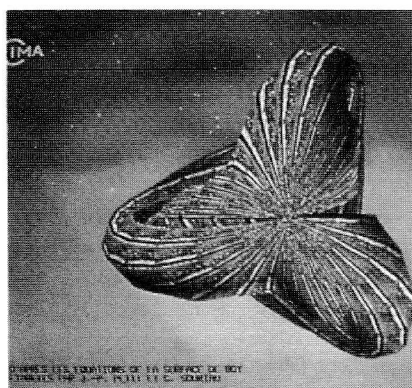
D'autres domaines plus classiques restent très attirants. La théorie de Mori cherche à décrire la structure fine des variétés algébriques. Elle est maintenant bien comprise en dimension inférieure ou égale à trois, beaucoup moins en dimension plus grande. Les méthodes utilisées sont très algébriques ; le cas des variétés complexes non algébriques est très mal compris.

Citons aussi la cohomologie de l'espace des modules des courbes, le problème de caractériser les jacobiniennes de courbes parmi les variétés abéliennes (problème de Schottky), la recherche de critères simples pour décider si une famille d'hyper-surfaces sur une variété peut être découpée par des hyperplans dans un plongement convenable (conjecture de Fujita), la théorie des cycles algébriques (quel type de sous-variétés contient une variété donnée ?), etc.

La géométrie algébrique réelle étudie les systèmes d'égalités et d'inégalités polynomiales dans le domaine réel. Son émergence en tant que sous-discipline remonte à une quinzaine d'années ; elle attire à la fois des topologues, des algébristes, des géomètres, des théoriciens des modèles, tout en étant à la source de nombreuses applications. Les questions essentielles s'articulent autour de grands problèmes historiques : topologie des ensembles algébriques réels (16e problème de Hilbert), algèbre réelle et sommes de carrés (17e problème de Hilbert), rapport entre fonctions analytiques et fonctions algébriques, ensembles semi-algébriques et généralisations, effectivité et algorithmique dans la continuation du théorème de Sturm.

Les théories de modélisation des espaces topologiques par des objets algébriques se sont fortement développées récemment. Après la connaissance approfondie des modèles rationnels à la suite de Quillen et de Sullivan, plusieurs théories rendant compte de la partie de torsion ont vu le jour. Des modèles algébriques simpliciaux plus fins permettent de prendre en compte les opérations de Steenrod.

La théorie de l'homotopie est essentiellement née avec l'introduction par Poincaré du groupe fondamental d'un espace. Son problème central est la classification, à déformation continue près, des applications



Surface de Boy réalisée par Sabine Porada au Cima. Cette proposition topologique permet de simuler le retournement de la sphère

continues entre espaces. Cela est motivé par des questions diverses, entre autres la classification à déformation près des espaces, en particulier de petite dimension et la théorie des variétés via la construction de Thom-Pontryagin. Il y a eu durant les quinze dernières années des avancées considérables dans le domaine de l'homotopie équivariante, c'est-à-dire en présence d'actions de groupes. Cela débouche naturellement sur l'étude des actions de groupes sur les variétés. Des conjectures majeures ont été résolues. Par ailleurs, la théorie de l'homotopie entretient des liens étroits avec la K-théorie algébrique et l'algèbre homologique. Un développement spectaculaire en cours est l'introduction des techniques d'homotopie stable dans un domaine central de la géométrie algébrique moderne, la théorie des schémas.

La théorie de l'homotopie a déjà connu plusieurs révolutions et offre toujours de vastes champs à explorer. L'école française, avec Serre et Thom, en a initié une très large part ; elle est actuellement très bien placée sur la scène internationale, mais numériquement faible.

3 - Analyses et équations aux dérivées partielles

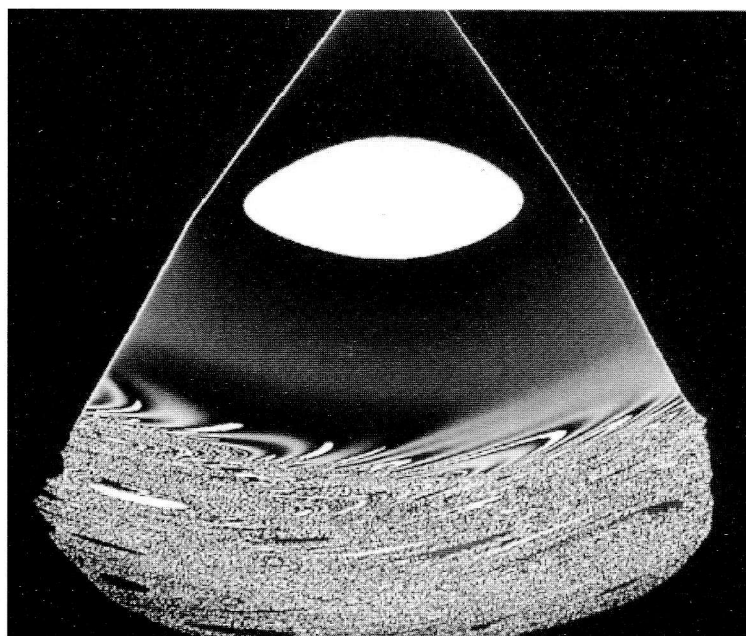
L'analyse est quelquefois présentée comme l'étude des inégalités et des espaces de fonctions. Ce travail en profondeur et de longue haleine a permis des progrès très remarquables dans la résolution des équations aux dérivées partielles. C'est l'aboutissement de ce succès qui sert de fil directeur à la présentations qui suit.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires et non-linéaires constituent un vaste ensemble très actif qui s'est développé considérablement dans la période récente. Par nature, ce domaine présente de multiples interactions avec plusieurs autres champs des mathématiques et il est très utilisé dans la modélisation de phénomènes relevant d'autres disciplines comme la physique, la chimie, la biologie, l'économie, l'imagerie, etc. Les bases théoriques sont continuellement enrichies par l'apport de techniques venant de l'analyse, de la géométrie, voire de l'algèbre. Des connexions nouvelles se développent de ce point de vue aussi avec la géométrie

différentielle, les systèmes dynamiques et les probabilités. D'autre part, les domaines d'applications ne cessent de s'élargir, allant des problèmes de la chimie, comme ceux de la **combustion** ou de la cinétique des réactions, à certains aspects de la gestion financière.

La période récente a vu une grande diffusion de plusieurs théories issues de l'étude des EDP. Celle des D-modules, qui dégage les concepts algébriques profonds régissant les EDP linéaires, offre des développements importants dans plusieurs domaines : théorie des représentations de groupes, géométrie des singularités, analyse complexe, géométrie algébrique. L'analyse microlocale qui peut être vue comme une analyse de Fourier très généralisée, faisant intervenir des concepts de la géométrie symplectique, a permis d'obtenir plusieurs résultats importants en théorie spectrale, en **mécanique des fluides** et en théorie du contrôle. La théorie des fonctionnelles et des applications harmoniques est aussi l'objet d'intenses recherches, et des idées venues de la géométrie et de la topologie permettent des avancées spectaculaires.

De grands progrès dans la compréhension des EDP sont venus d'autres domaines de l'analyse. Par exemple, les problèmes géométriques qui apparaissent en analyse complexe sont par nature inti-



$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C^{te}$$



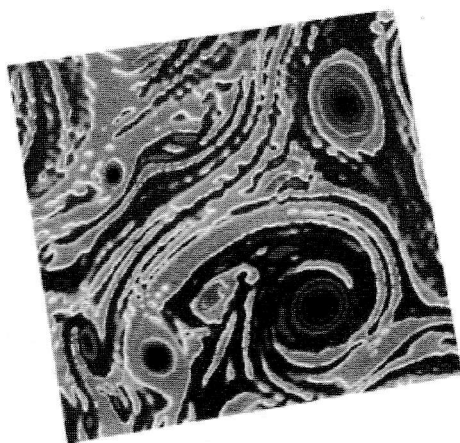
mement liés à des phénomènes de propagation des singularités. Outre la théorie des ondelettes, l'analyse harmonique fine fournit des instruments indispensables à l'étude des EDP. L'analyse harmonique non-commutative est étroitement reliée à l'étude des groupes de Lie ; en introduisant de nouveaux types d'opérateurs sur des espaces de fonctions, elle ouvre de nouvelles perspectives. L'analyse fonctionnelle classique est toujours une source de problèmes difficiles, en particulier la classification des espaces de Banach, avec des ouvertures vers les algèbres d'opérateurs, les probabilités, la mécanique statistique et la statistique.

Plusieurs champs d'applications s'ouvrent. La mécanique statistique en est un exemple : des problèmes à grand nombre de variables peuvent s'étudier avec des intégrales du type de Feynman et des techniques venant des EDP. Un autre exemple est fourni par la physique du solide où les problèmes des milieux composites ou des

interfaces singulières font intervenir de nouvelles extensions des EDP linéaires. D'autre part, plusieurs types d'EDP non-linéaires, celles intervenant dans les problèmes de **propagation-diffusion**, celles concernant les lois de conservation ou celles de type transport, par exemple l'équation de Boltzmann, méritent la poursuite de grands efforts de développement. Les problèmes de la turbulence ou ceux liés aux interactions entre fluides et structures constituent d'autres exemples. Cette liste est loin d'être exhaustive et il est probable aussi que les travaux de modélisation en cours dans les domaines variés décrits plus loin vont faire apparaître de nouvelles problématiques et de nouvelles théories.

De fameux problèmes ouverts comme, en mécanique des fluides, la régularité globale pour l'équation de Navier-Stokes, ou, en théorie spectrale, la localisation des résonances, motivent et guident aussi les travaux de plusieurs écoles.

La France a une tradition très forte dans le domaine des EDP, et plusieurs séminaires célèbres servent de référence en constituant un fonds technique mondialement utilisé. La tendance du milieu est plutôt à la diversification, et rares sont les



Visualisation d'un champ de tourbillon
(M.Farge, LMD/ENS)

champs d'études qui ne sont pas abordés par un laboratoire français. Une limitation pourrait apparaître si on ne prenait garde à maintenir un potentiel suffisant en chercheurs et un développement adéquat des moyens de calcul.

En conclusion, le domaine des EDP se caractérise par une grande ouverture et

un grand dynamisme. Depuis longtemps, et particulièrement en France, il est très bien structuré, ce qui permet un enrichissement et une diffusion du savoir-faire à la fois vers les autres parties des mathématiques et vers les applications.

4 - Probabilités et statistiques

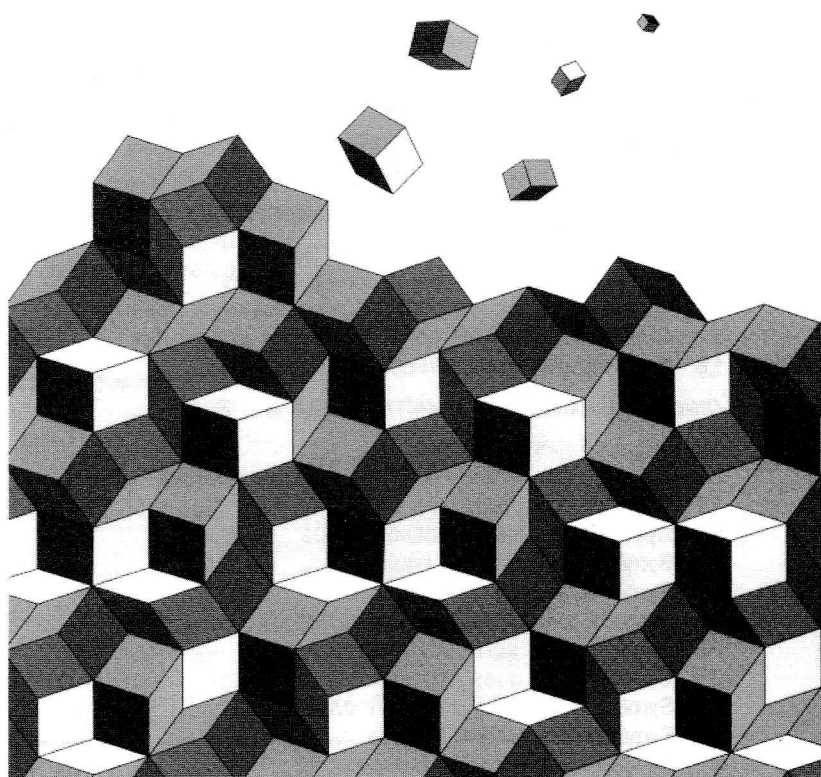
Probabilités et statistiques sont les **mathématiques du hasard**. Ce point de vue a enrichi les mathématiques d'une intuition d'un autre type. Le cœur des probabilités est l'étude des objets mathématiques construits pour modéliser les comportements avec des données inconnues ou imprévisibles. Cette branche est très sophistiquée, et l'école française est prestigieuse en ce qui concerne l'analyse des objets classiques. Elle est aussi très présente sur certains champs nouveaux : superprocessus, probabilités quantiques, systèmes infinis de particules. On peut regretter que l'étude mathématique de sujets apparus récemment en physique statistique, tels que **percolation** ou étude des milieux aléatoires, soit encore trop peu développée en France.

En revanche, la présence d'une école

probabiliste très forte a favorisé l'intervention des probabilités dans d'autres domaines des mathématiques comme les espaces de Banach, la théorie des groupes, l'analyse harmonique, la géométrie riemannienne, les systèmes dynamiques, avec des résultats de tout premier plan.

Par nature, les probabilités sont aussi une science appliquée. Soulignons la place des mathématiques financières au développement rapide ces dernières années, où des modèles très élaborés sont appliqués quotidiennement et où les questions posées sont à la fois techniques et fondamentales. Grâce aux compétences accumulées et à l'activité de quelques mathématiciens, c'est un sujet où la France est active et qui devient une source de débouchés pour les étudiants de mathématiques. Un autre domaine de probabilités appliquées en pleine évolution est le **traitement d'images** et l'algorithmique aléatoire, où plusieurs équipes de grande valeur se sont investies.

Il y a cependant beaucoup de parties des probabilités appliquées qui pourraient fructueusement être renforcées, compte tenu des enjeux économiques sous-jacents : réseaux de files d'attente, simulation,



Pavages non-périodiques

méthodes de Monte-Carlo.

La situation en statistiques est parallèle, quoique moins favorable. Les statisticiens partent du point de vue de l'utilisateur et utilisent des méthodes probabilistes. Ils cherchent à estimer les paramètres des modèles et à faire des prévisions à partir des observations. Là encore, la théorie est bien représentée en France. C'est un domaine en pleine évolution où les mathématiques prennent de plus en plus d'importance, comme les techniques d'ondelettes, les grandes déviations, la géométrie. Les statistiques sont une science appliquée et d'un usage constant dans l'économie, la médecine, l'industrie, et toutes les autres disciplines scientifiques. Malheureusement, les théoriciens sont assez peu présents sur ce terrain et, mis à part quelques groupes de statisticiens appliqués, il reste un gros travail à accomplir pour les rapprocher des utilisateurs.

En résumé, pour ce domaine, en France, la situation des théoriciens est saine et la production de grande valeur.

Analyse de quelques thèmes transversaux

Il s'agit de thèmes souvent nouveaux qui ont le caractère commun de motiver

des chercheurs d'horizons différents. En général, ils se caractérisent aussi par un besoin de fonder les théories.

1 - Groupes quantiques

Il s'agit d'un domaine apparu il y a environ une dizaine d'années, qui a développé rapidement des interactions spectaculaires avec de nombreux autres domaines des mathématiques et de la physique théorique : on peut citer par exemple la topologie de basse dimension (invariants "quantiques" des entrelacs et des variétés de dimension 3), la théorie des représentations des groupes algébriques en caractéristique non nulle (conjectures de Lusztig), les bases cristallines et leurs applications combinatoires, les q -fonctions spéciales, les théories des champs conformes, les sous-facteurs, etc. Plusieurs points de vue complémentaires se sont développés à propos de la notion même de groupe quantique : quantifications d'algèbres enveloppantes ou d'algèbres de fonctions sur des groupes de Lie, déformations, C^* -algèbres de Hopf, etc. Les questions motivant les recherches dans le sujet sont très variées, selon le point de vue adopté et les applications envisagées. C'est un domaine où il y a encore beaucoup à défricher, qu'il faut laisser se développer en recrutant des gens de valeur, et qui est maintenant bien représenté en France.

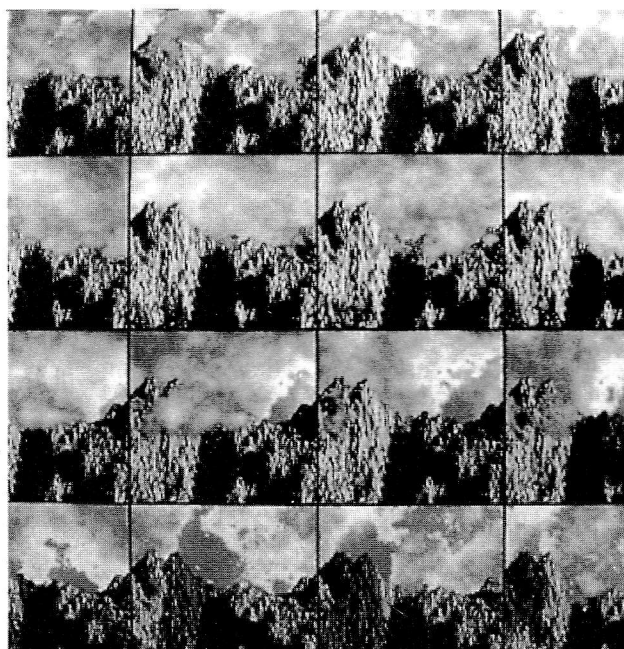
2 - Fonctions automorphes

L'étude des fonctions automorphes et de leurs liens avec l'arithmétique occupe une place très centrale. Selon certains qui reprennent un mot de Godement, c'est là le **jardin des délices** ou l'**opium des mathématiciens**.

Ce domaine est tiré en avant depuis trente ans par un ensemble imposant de conjectures formulé par le mathématicien canadien Robert Langlands. Ce programme propose une correspondance entre deux types d'objets de nature apparemment très différente : les représentations du groupe de Galois d'un corps, qui relèvent de la théorie des nombres, et les fonctions automorphes, qui relèvent de l'analyse. La réalisation de ce programme représente un travail immense qui met en jeu l'analyse sur les groupes (formule des traces), l'étude des représentations des groupes de Lie

Miniature d'Ermengol de Béziers.
Le bréviaire d'amour





Simulation de la dynamique des nuages sur décor de montagnes en fractals par Jean François Colonna

réels et p -adiques (correspondance de Howe), la géométrie algébrique avec l'étude de certaines variétés algébriques associées à des groupes (variétés de Shimura, variétés de Drinfeld). Ce dernier point a progressé récemment.

Signalons que se placent aussi dans ce domaine les résultats de Wiles et de Taylor sur les congruences entre formes modulaires et leur rapport avec les représentations du groupe de Galois, résultats qui jouent un rôle essentiel dans la démonstration du théorème de Fermat.

La correspondance de Langlands a un analogue géométrique, qui ne fait pas intervenir de théorie des nombres, pour lequel Beilinson et Drinfeld ont introduit il y a deux ans une approche nouvelle très prometteuse.

Ce domaine a d'excellents représentants en France et fait l'objet d'une grande activité internationale.

3 - Systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est l'étude qualitative des équations différentielles. Le père fondateur de la théorie est **Henri Poincaré**, mais la place éminente que la France occupe actuellement dans le domaine est due plus à un concours de circonstances qu'à l'existence d'une véritable école. La structure, ou plutôt l'absence de

structures, des systèmes dynamiques dans notre pays reflète cette génération spontanée.

Le principal attrait du sujet est qu'il fait appel à des techniques de nombreux domaines et qu'il interagit avec beaucoup de branches différentes des mathématiques. La relation est forte avec les sciences où le temps est un paramètre essentiel, comme par exemple la mécanique (en particulier la mécanique céleste, qui fut à l'origine des travaux de Poincaré), l'hydrodynamique et les systèmes loin de l'équilibre (turbulence, structures spatio-temporelles), la dynamique des populations.

Les principaux axes de recherche sont d'abord les problèmes internes à la théorie : classer les systèmes, dans le cadre mesurable, topologique, différentiable ou holomorphe, décrire les propriétés les plus probables, étudier les feuilletages suivant ces thèmes. On développe à la fois des méthodes locales (singularités, formes normales, etc.), des méthodes globales (théorie de l'homotopie, méthodes variationnelles, etc.) et des méthodes probabilistes et statistiques (notions d'entropies). Par ailleurs, des modèles de systèmes dynamiques ont été construits, dont l'étude est devenue un véritable enjeu, car elle permet de dégager des concepts théoriques. Citons par exemple **le problème des trois corps**, les

billards, l'application "standard", l'attracteur de Hénon, etc. Enfin les interactions avec d'autres champs, particulièrement la théorie des nombres, les groupes de Lie et la géométrie riemannienne, sont aussi des sujets très étudiés.

La France est en pointe sur pratiquement tous les sujets du domaine, mais une faiblesse des systèmes dynamiques français est le manque de développement des interactions avec la physique mathématique et l'industrie. En URSS, cela se faisait naturellement par des structures communes et des institutions où coopéraient mathématiciens et physiciens. Certains projets français vont dans ce sens, mais il reste beaucoup à faire.

4 - Analyse numérique

Les plus grandes avancées réalisées ces dernières années en analyse numérique s'inscrivent sans doute dans le domaine des équations aux dérivées par-

tielles. Elles ont permis une compréhension correcte non seulement d'équations modèles théoriques, mais aussi des problèmes de base de la mécanique, se traduisant par la construction d'algorithmes bien appropriés à leur discrétisation. Toutes les grandes méthodes de discrétisation ont été analysées en France dès leur apparition: méthodes de différences finies, en particulier pour les schémas en temps, méthodes d'éléments finis, méthodes spectrales et d'éléments spectraux, méthodes particulières, de volumes finis, d'ondelettes, techniques de décomposition de domaines et de synthèse modale en vue du calcul parallèle. La réécriture des algorithmes en vue de leur traitement par des machines parallèles est un enjeu majeur qui conditionne l'accomplissement de gros calculs, dont l'industrie a aussi besoin. Citons, parmi les résultats encore incomplets - bien que faisant l'objet d'une énorme quantité de travail -, les systèmes hyperboliques non linéaires pour lesquels les difficultés théoriques et numériques sont considérables, et les méthodes asymptotiques sur lesquelles travaillent beaucoup de chercheurs. D'autres recherches concernent les problèmes numériques actuels en algèbre linéaire, l'approximation par des fonctions splines ou des fractions rationnelles, le traitement du signal. Les contributions françaises à ces questions se caractérisent le plus souvent par leur grande rigueur mathématique.

De nombreux problèmes trop coûteux à résoudre par des méthodes déterministes sont maintenant traités de façon satisfaisante au moyen d'algorithmes aléatoires : le recuit simulé, les algorithmes génétiques, les algorithmes d'apprentissage. Quoique largement utilisées, ces méthodes demandent encore à être étudiées sur le plan théorique.

5 - Histoire des mathématiques

L'histoire des mathématiques a certainement un caractère transversal, car elle touche les mathématiciens de toute obédience. Elle est pratiquée en France par une centaine de personnes et dans le monde par environ un millier. Le sujet est en pleine expansion au niveau de la recherche avec l'apparition de nouvelles collections de livres, de nouvelles revues, de nombreuses conférences et associations savantes, et avec la création de plusieurs instituts, en particulier



un institut Max Planck à Berlin.

Les recherches sur les mathématiques non occidentales, soit pré-grecques, soit dans des traditions largement indépendantes comme l'Asie, ont connu un important développement. Des découvertes archéologiques et philologiques importantes ont permis par exemple de comprendre en détail la naissance du nombre écrit abstrait. De grands projets éditoriaux, faisant intervenir les nouvelles technologies, concernent les œuvres de mathématiciens et physiciens comme Leibnitz, d'Alembert, Condorcet, Poincaré, Jacobi, Weyl, Einstein. L'histoire des mathématiques aborde aussi des questions essentielles comme les rapports entre mathé-

maticiens et société.

La France occupe une bonne place dans les résultats obtenus, en particulier grâce à des travaux sur l'Asie et ses relations avec les mathématiques européennes, les mathématiques en Méditerranée, l'histoire des statistiques, les mathématiques dans les écoles d'ingénieurs, etc. Le CNRS joue un rôle important dans ce domaine. □



Extrait de "Le Jardin
Perdu". Editions
Alternatives - 1997

L'étrange théorème de Mr MORLEY

Maxime Cunin, Tours

Les lignes qui suivent ne sont que la narration des efforts d'un non-mathématicien dilettante qui s'est abandonné à cette bizarre passion de "l'amour-haine" pour un théorème insolite qui, semble-t-il, fait actuellement l'objet de bien des commentaires. Je ne sais s'il convient de remercier l'ami qui me l'a soumis - non peut-être sans arrière-pensée - mais je le ferai quand même pour le laborieux plaisir que j'en ai tiré. Et j'y associerai les mathématiciens qui ont bien voulu valider mes résultats et, surtout, les maîtres qui m'ont initié à la géométrie il y a de cela ... quelque soixante ans ...

Dans un célèbre chapitre de son ouvrage : Le rationalisme appliqué, le philosophe Gaston Bachelard commentant les réflexions du mathématicien Georges Bouligand, s'interroge sur la raison profonde qui fait du théorème de Pythagore, une vérité première, ce qu'il nomme sa pythagoricité.

Après avoir souligné que l'utilisation du carré pour en illustrer la démonstration n'est qu'un cas particulier, que tout polygone régulier ferait aussi bien l'affaire et même n'importe quelle figure pour autant que les deux autres soient semblables, il conclut que la similitude est le facteur causal de cette propriété du triangle rectangle. Dès lors, si la forme de la figure choisie est indifférente, la pythagoricité réside dans la nature profonde du triangle rectangle lui-même.

Devant la figure au maximum dépouillée (figure 1), il écrit:

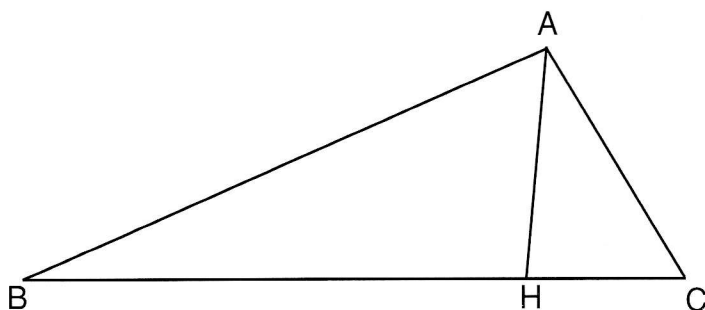


Figure 1

"Prenons donc un triangle rectangle quelconque. Coupons-le par la hauteur issue du sommet de l'angle droit. Nous avons ainsi construit, en dedans, deux triangles rectangles semblables au triangle donné. Le triangle construit sur l'hypoténuse peut aussi bien être construit "en dedans". Il se superpose alors au triangle matrice. La conclusion est évidente: la somme des deux parties ABH et AHC est égale au triangle ABC. La démonstration n'a besoin d'aucun artifice."

Le philosophe clôt ainsi son chapitre: "Il semble que le professeur de mathématiques puisse dire à son disciple:

Coupe le triangle rectangle en deux et médite. Tu tiens une vérité première, une beauté rationnelle première. Elle éclairera toute ta vie de géomètre. Elle t'apprendra à aller à l'essentiel ... Georges Bouligand, en suscitant en toi le rationalisme éveillé, t'a appris à penser comme un dieu géomètre, à travailler sans rien faire".

Le lecteur voudra bien excuser ce long préambule : il ne m'a pas semblé inutile avant d'aborder quelques réflexions sur la question qui nous occupe ici: la résolution du théorème de Morley (figure 2).

Tout amateur qui aborde pour la première fois, sans informations préalables, sans idées préconçues et en toute naïveté le théorème de Morley, éprouve d'entrée un étrange sentiment né du rapprochement de la belle simplicité de la proposition et de la présence d'êtres mathématiques rares en géométrie élémentaire : les trisectrices, dont on sait qu'elles ont fait pâlir des générations de géomètres à la recherche de la fameuse trisection de l'angle.

La première difficulté est le tracé d'une figure exacte, à quoi s'ajoute la complexité due au nombre considérable d'angles qu'elle propose ; car on reconnaît vite qu'il n'y a pas de solution à espérer du côté des longueurs.

La recherche s'organise donc autour de la définition du triangle équilatéral (trois côtés égaux) et de sa propriété d'avoir trois angles égaux à 60° .

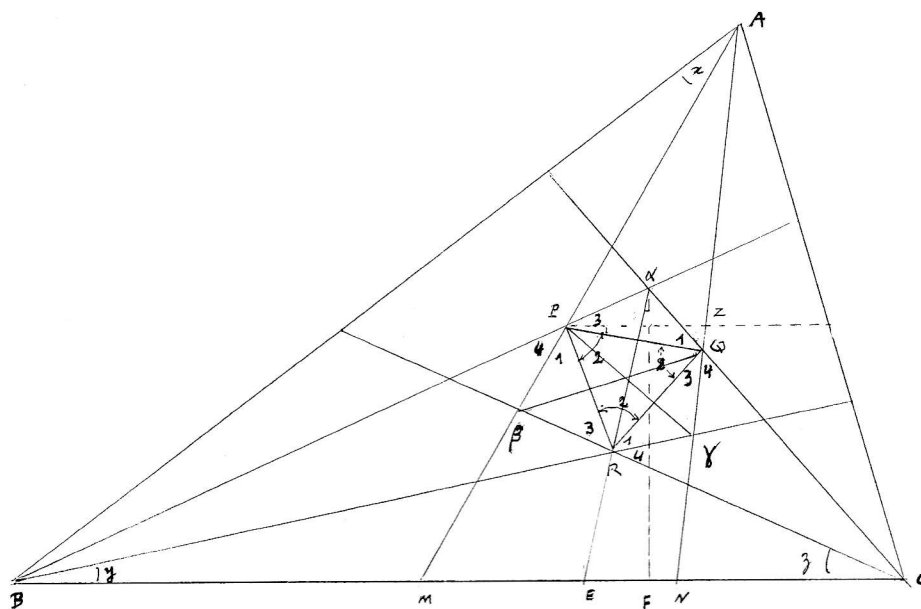


Figure 2

La première piste qui de présente sera alors de montrer que chaque angle du triangle PQR a pour mesure $\frac{1}{3}\hat{A} + \frac{1}{3}\hat{B} + \frac{1}{3}\hat{C}$. Belle illusion qui conduit (si l'on ne s'embrouille pas) à tracer des quantités de lignes et d'arcs capables ou à couvrir des pages de calculs peu fructueux.

Au bout de cette longue traque les choses peuvent devenir un peu plus claires si l'on ne met pas trop longtemps à faire les deux constatations suivantes : d'une part, la droite αR est bissectrice de l'angle $B\alpha C$ et qu'il en est de même de βQ pour l'angle $A\beta B$ et de γP pour l'angle $A\gamma B$; d'autre part que tout raisonnement conduit dans le triangle $B\alpha C$ est transposable dans $A\beta C$ et dans $A\gamma B$: avec des bissectrices, on est en pays de connaissance...

Il faudra encore pas mal d'heures de travail et d'efforts stériles avant d'épurer encore la figure et de tenter d'y voir un peu plus clair. Une remarque, mais qu'il faut attendre longtemps, permet enfin le pas décisif : dans un triangle équilatéral, les bissectrices des angles sont à la fois hauteurs et médiatrices.

Si le théorème de Morley est exact (ce dont on n'oserait douter!) PR étant égal à QR, le point R est nécessairement sur la médiatrice de PQ, c'est-à-dire sur la perpendiculaire à PQ en son milieu ; la démonstration de cette hypothèse suffirait à prouver que PQR est équilatéral, car le même raisonnement appliqué à chacune des bissectrices conduirait à la conclusion que les côtés PR, RQ

et QP sont égaux deux à deux.

Une première tentative consiste à prolonger αR jusqu'à son intersection E avec BC puis à abaisser la perpendiculaire αF sur BC.

En posant : $x = \hat{B}\alpha C/3$, $y = \hat{A}\beta C/3$ et $z = \hat{A}\gamma B/3$, on démontre aisément que l'angle $E\alpha F$ mesure $(z - y)$.

Traçons maintenant la droite PZ parallèle à BC; elle est perpendiculaire sur αF . Si l'on démontre l'égalité des angles ZPQ et $E\alpha F$, le problème est résolu.

Pour ce qui me concerne, cette piste ne m'a conduit qu'à m'enfermer dans un cercle vicieux ; il me semble bien que cette égalité est une conséquence de l'orthogonalité de αR et PQ.

Quelques jours encore de réflexion et une démonstration finalement très simple apparaît, en partant de l'hypothèse que l'angle formé par αR et PQ est nécessairement droit. On la trouvera ci-joint.

Commentaire :

On comprend mieux ce qui se passe en considérant les angles.

Chaque bissectrice étant perpendiculaire sur le côté qui lui est opposé, les triangles αPQ , βPR et γQR sont isocèles.

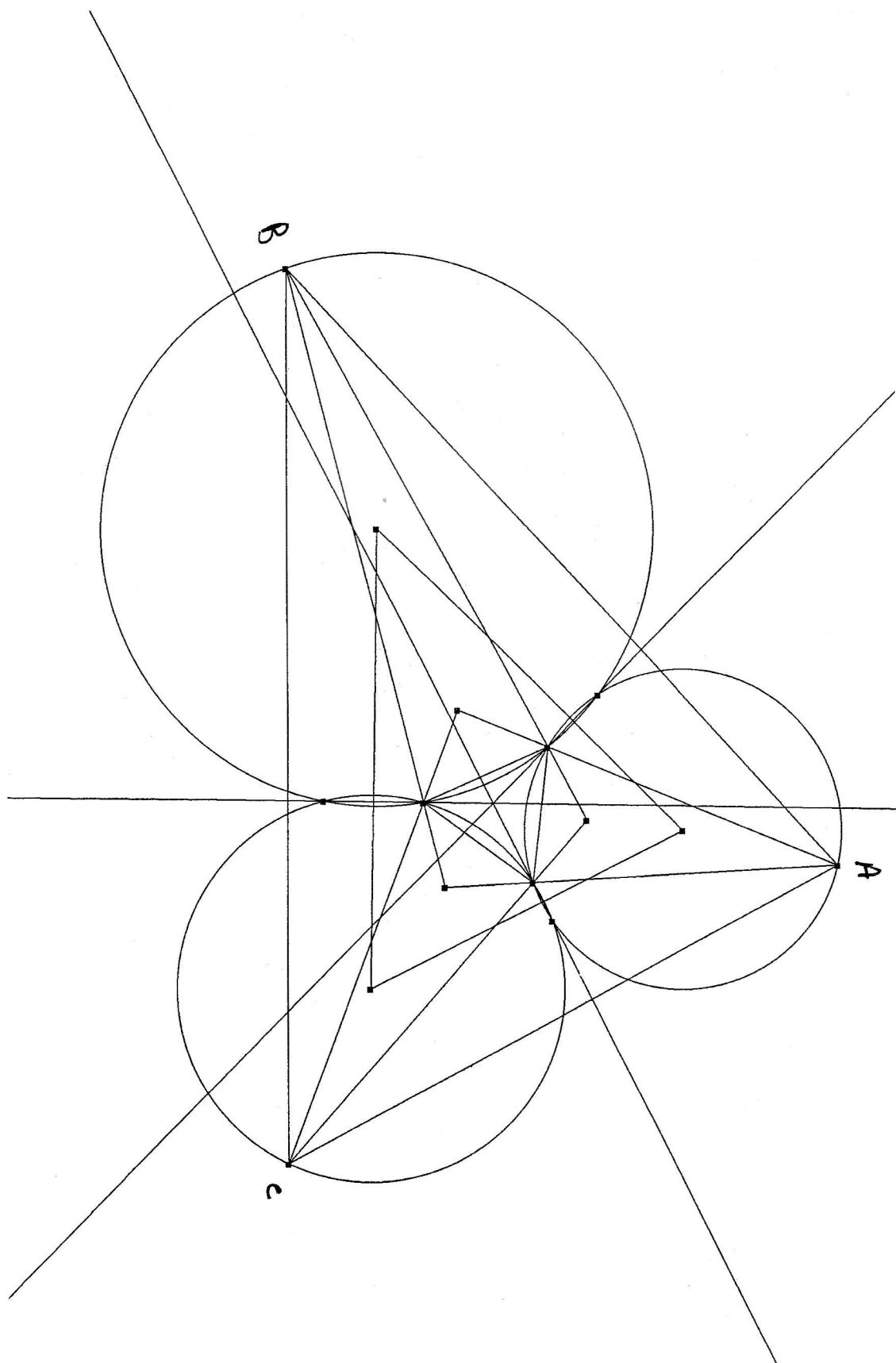
Leurs angles à la base sont égaux:

$$P_3 = Q_1 = (60^\circ - x),$$

$$Q_3 = R_1 = (60^\circ - z) \text{ et}$$

$$R_3 = P_1 = (60^\circ - y).$$

Figure 3



D'autre part,

$$\begin{aligned} Q_4 &= (x + z) \text{ ou } (60^\circ - y), \\ R_4 &= (y + z) \text{ ou } (60^\circ - x) \text{ et} \\ P_4 &= (x + y) \text{ ou } (60^\circ - z). \end{aligned}$$

Dressons le tableau suivant :

$$\begin{aligned} P_3 &= Q_1 = R_4 = 60^\circ - x \\ P_1 &= Q_4 = R_3 = 60^\circ - y \\ P_4 &= Q_3 = R_1 = 60^\circ - z \end{aligned}$$

d'où

$$P_3 + P_1 + P_4 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

et $P_2 = 60^\circ$

$$Q_1 + Q_4 + Q_3 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

et $Q_2 = 60^\circ$

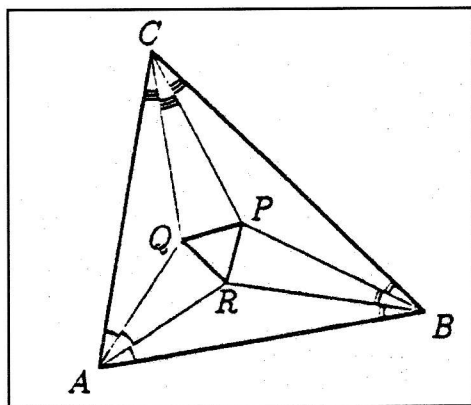
$$R_4 + R_3 + R_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

et $R_2 = 60^\circ$.

On constate qu'autour de chaque point P, Q, R et à l'intérieur du polygone $\alpha P \beta R \gamma Q$, on a: $180^\circ = (60^\circ - x) + (60^\circ - y) + (60^\circ - z) +$ l'angle correspondant de PQR qui vaut donc $(x + y + z)$ soit 60° .

On peut donc dire que l'équilatéralité de PQR est due à l'orthogonalité de chaque bissectrice sur le côté qu'elle coupe.

Morley Frank né à Woodbridge (Suffolk, Grande-Bretagne) 1860 - 1937



Le mathématicien Frank Morley, professeur à l'université de Baltimore, est spécialiste de géométrie. Il reste célèbre pour avoir découvert en 1899 le théorème de géométrie élémentaire qui porte son nom. Il lance alors un défi au monde mathématique pour en trouver les meilleures démonstrations. Ce n'est que dix ans plus tard que Satyanarayana en publie une solution trigonométrique, et que Naraniengar en donne une preuve élémentaire.

Le fils de Frank Morley, Christofer (1890-1957), est un romancier célèbre outre-Atlantique.

Le théorème de Morley

Les intersections deux à deux des couples de demi-droites qui divisent les angles du triangles ABC en trois angles égaux déterminent un triangle équilatéral PQR appelé *triangle de Morley* du triangle ABC. □

Extrait de "des mathématiciens de A à Z" Hauchecorne & Suratteau. Ellipses 1996.

Le défi de Morley

A tous les géomètres et aux autres mathématiciens

Dessinez d'abord un triangle
Que vous appelez ABC
Puis de chaque sommet, tracez
Les trisectrices des 3 angles ;
Les adjacentes aux côtés,
Se rencontrent en PQR,
Formant, par extraordinaire,
Dans le triangle précité
Un triangle ... équilatéral !

Je l'ai démontré, non sans mal
Mais qui pourra me conforter
En me montant de façon claire
Par une preuve élémentaire
Que je suis dans la vérité ,

Franck Morley
(P.C.C M. Cunin)

La main à la pâte en cycle 3

Michel Darche (Centre-Sciences, CCSTI région Centre)
et Jacques Pellissard (Ecole Jacques Prévert-Chartres)

Depuis 5 ans Centre-Sciences, CCSTI de la région Centre et les centres IUFM de l'Académie d'Orléans-Tours (Blois, Bourges, Chartres, Orléans) conduisent des actions de sensibilisation à la culture scientifique et technique vers les enseignants du primaire et leurs élèves. De toutes ces expériences, du matériel pour la classe s'élabore et est mis à disposition des enseignants sous différentes formes que nous décrivons ci-après.

Toutes ces actions visent à mettre en premier l'enseignant en action pour qu'il puisse s'approprier contenus et matériels et être le plus possible à même de faire mettre la main à la pâte aux enfants. Pour cela Centre-Sciences propose:

Des idées de manips scientifiques

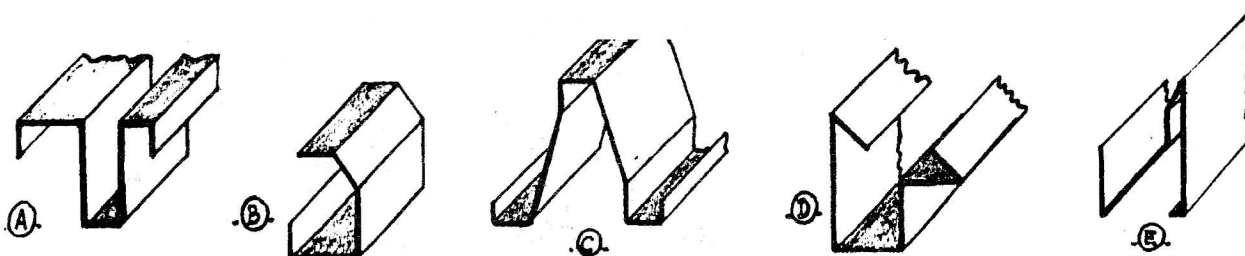
Dans le cadre des formations communes pour les élèves-professeurs de 3 jours, les futurs enseignants se frottent à la vulgarisation et mettent en œuvre des "manips" accessibles à tous.

Deux exemples :

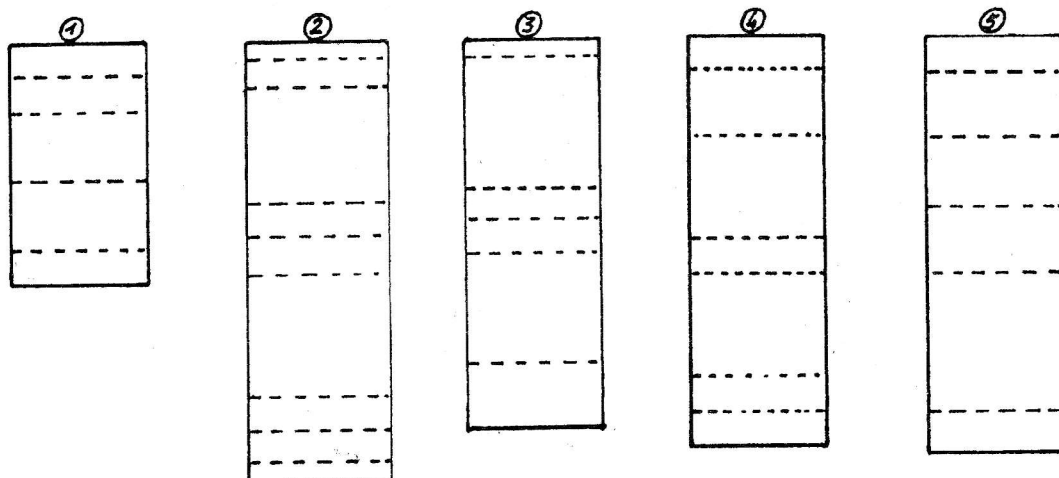
1 - Comment s'écoule le sable suivant la pente et la granulométrie ?

ou, figure ci-dessous :

2 - Trouvez quel tracé correspond à chaque profilé :

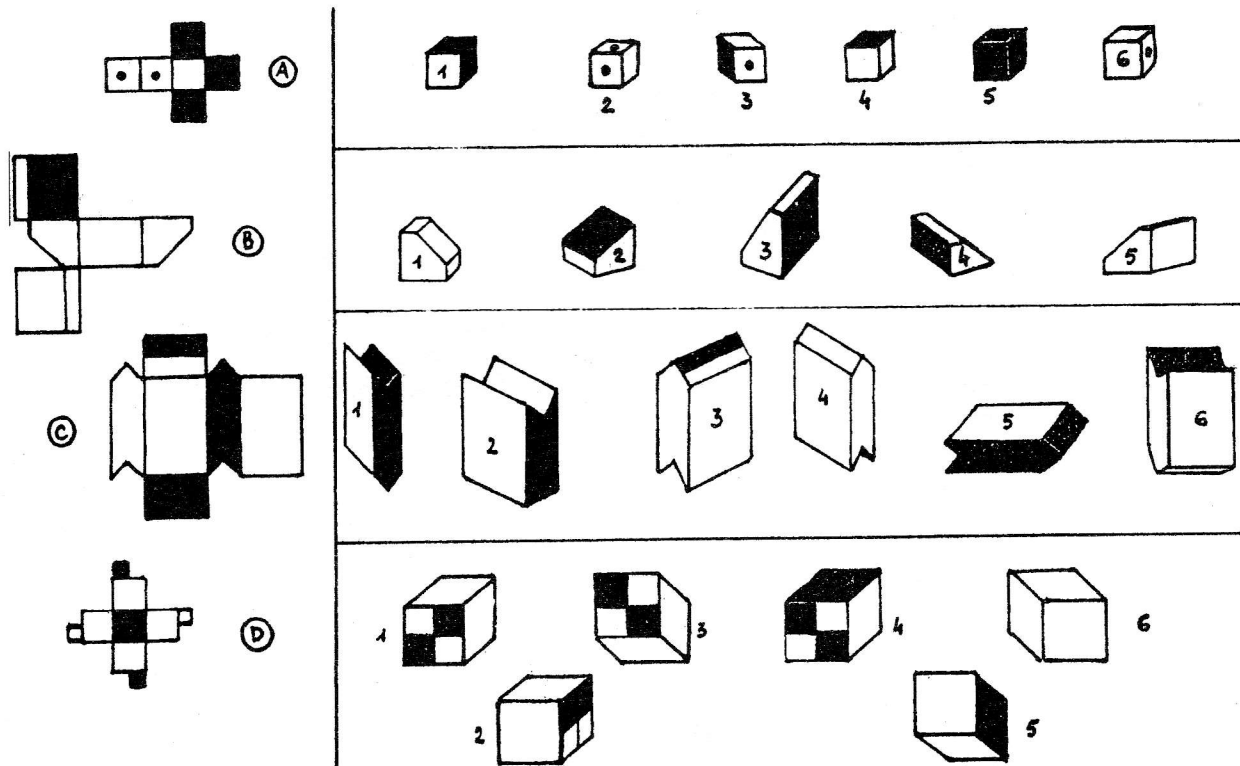


18



DÉVELOPPÉS
AVEC TRACÉ
DES LIGNES
DE PLIAGE

3 - Quels volumes correspondent aux développés proposés ci-dessous :



Des malles "rallye-science"

Des formations continues de 4 semaines qui permettent aux enseignants de réaliser une quinzaine d'expériences ou problèmes scientifiques à résoudre en manipulant. L'IUFM apporte son expérience du contenu et de la formation, Centre-Sciences apporte son savoir-faire technique et de communication.

Trois exemples de manipulations :

- 1 - comment trier un mélange comprenant du sable, de la limaille de fer et des graines avec différents ustensiles allant de la passoire à l'aimant,
- 2 - comment construire un labyrinthe de miroirs pouvant amener un faisceau de lumière sur une cible fixe.
- 3 - Le 3ème s'appelle «risque de confusion». Il invite les élèves à trouver d'autres exemples par rapport à l'exercice proposé:

Risques de confusion :

Certains mots ont des formes presque pareilles. Ils se ressemblent beaucoup. Mais leur sens est très différent.

Par exemple **Ponser et Pincer** ont des ressemblances de forme, une seule lettre, un seul son les rend différents et pourtant, ils n'ont absolument pas le même sens.

Il en est de même de **Penser et Pan-ser**, mais là le son est le même, seul le sens de la phrase peut les différencier.

A vous d'essayer de ne pas confondre:

• Echarde et Echarpe

(seule une lettre d'écriture très voisine les différencie)

• Solitaire et Solidaire

(seule une lettre d'écriture très voisine les différencie)

• Enumérer et Rémunérer

(seules une lettre et un son les différencient)

• **Habileté et Habilité**

(seules une lettre et un son très voisins les différencient)

• **Pédale et Pétale**

(seules une lettre et un son très voisins les différencient)

• **Affleurer et Effleurer**

(seules une lettre et un son très voisins les différencient)

• **Texte et Test**

(seuls les sons très voisins les différencient)

A vous maintenant de trouver quel peut être le second mot :

- **Eclipse et** ...
- **Illusion et** ...
- **Débouché et** ...
- **Facturé et** ...
- **Amnistie et** ...
- **Dévier et** ...
- **Perceuse et** ...

...

**Des expositions
"12 panneaux -
12 manips"**

Des formations continues de 4 semaines dans lesquelles les enseignants réalisent, sur le thème de leur choix, une exposition interactive qui circule ensuite dans les écoles.

Trois exemples réalisés à l'IUFM de Chartres :

- 1 - **"Au 3ème top"**, sur le temps qui passe,
 - 2 - **"Ne coupez pas !"** sur la communication,
 - 3 - **"Pythagore"** sur les nombres figurés.
- Panneaux et manipulations ont été entièrement réalisés par les stagiaires avec le concours technique et financier des formateurs et de Centre-Sciences.

Un exemple : (voir figure page 21)

Expositions et malles-rallyes circulent dans les écoles de chaque département avec le concours logistique du CDDP ou du centre IUFM.

**Des actions
"100 chercheurs
dans 100 classes"**

...qui s'échelonnent sur 6 mois à partir de la Science en fête : les enseignants

accueillent un chercheur dans leur classe, lequel arrive avec une petite musette de "manips de coin de table" qui lui permettent d'illustrer son propos : la passion de la recherche.

Trois exemples :

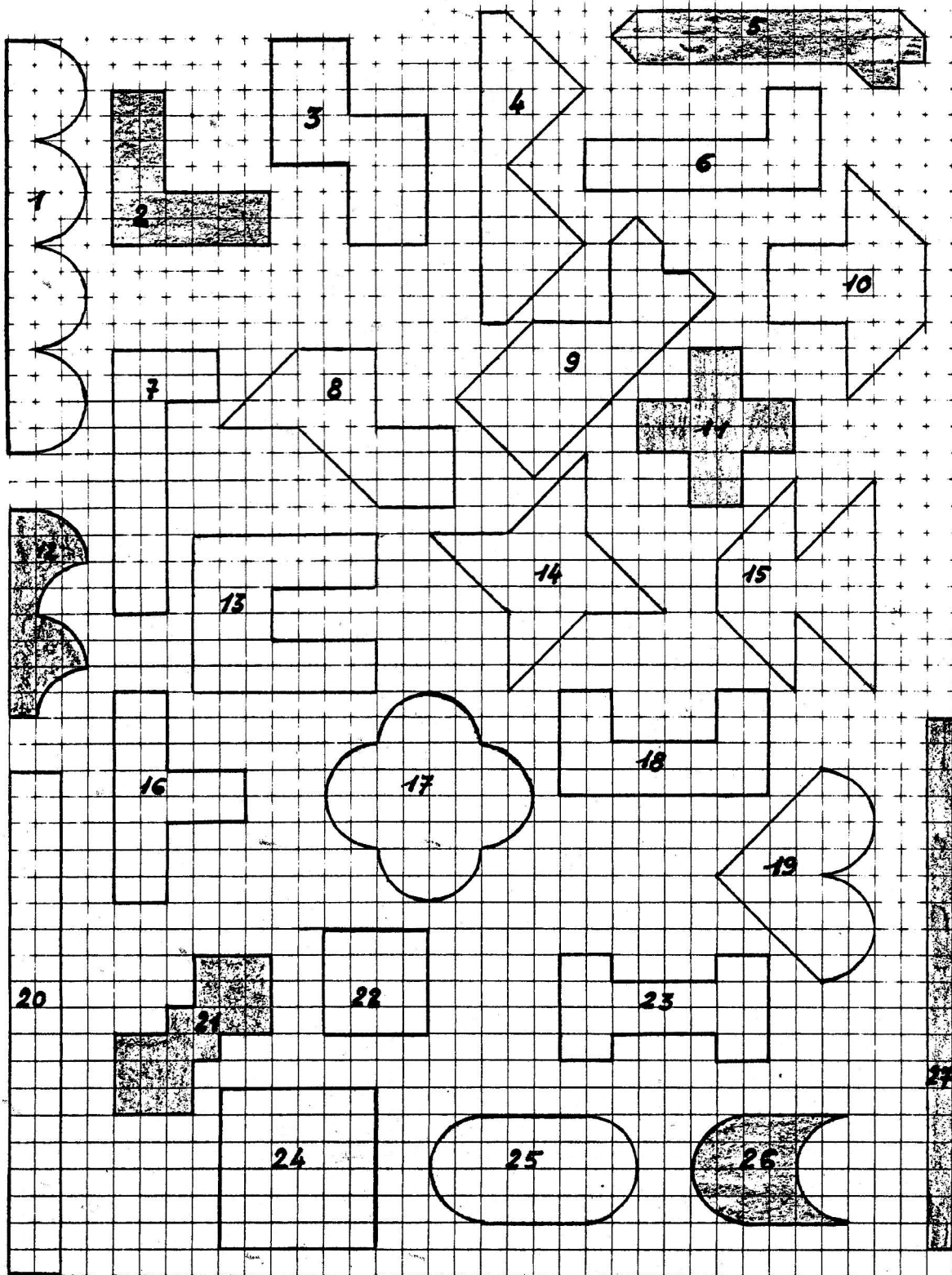
- du très froid au très chaud : des chercheurs du CRPHT-CNRS (Centre de recherche en physique des hautes températures) présentent à des élèves de Cours Moyen la palette allant de l'air liquide qui s'éparpille au milieu des enfants au four de verrier qui permet de construire un récipient en verre,
- les matériaux réofluidifiants ou réodurcisants : autrement dit, de la boue aux gels... de beauté que les enfants fabriquent avec de la maïzéna ou de l'argile et de l'eau.
- de l'électricité au laser : comment ça marche ?

En résumé une palette d'activités très diverses, souvent éphémères, rarement capitalisées, que les enseignants peuvent s'approprier et réexploiter par eux-mêmes dans de nouvelles actions où la pédagogie informelle joue pleinement son rôle culturel.

Centre-Sciences y est bien sûr toujours prêt à y apporter son concours et ses ressources par des actions qui sont conduites sur toute l'Académie d'Orléans-Tours qui coïncide avec la région Centre. □

**Ellipse
Allusion
Débauché
Fracturé
Amisbce
Délier
Berseuse**

Parmi ces figures, quelles sont celles qui ont la même surface ?



Les mathématiques appliquées en Bretagne

Extrait de "Réseau" - Journal du CCSTI de Rennes

Les mathématiques étudient les propriétés d'objets abstraits : les nombres, les figures géométriques, les fonctions, les espaces ... ainsi que les relations qui s'établissent entre eux. Leurs applications sont multiples. Le physicien, le chimiste et le biologiste doivent rendre compte des phénomènes naturels, souvent très complexes, et font appel aux mathématiques pour établir des modèles relativement simples, quoique imparfaits.

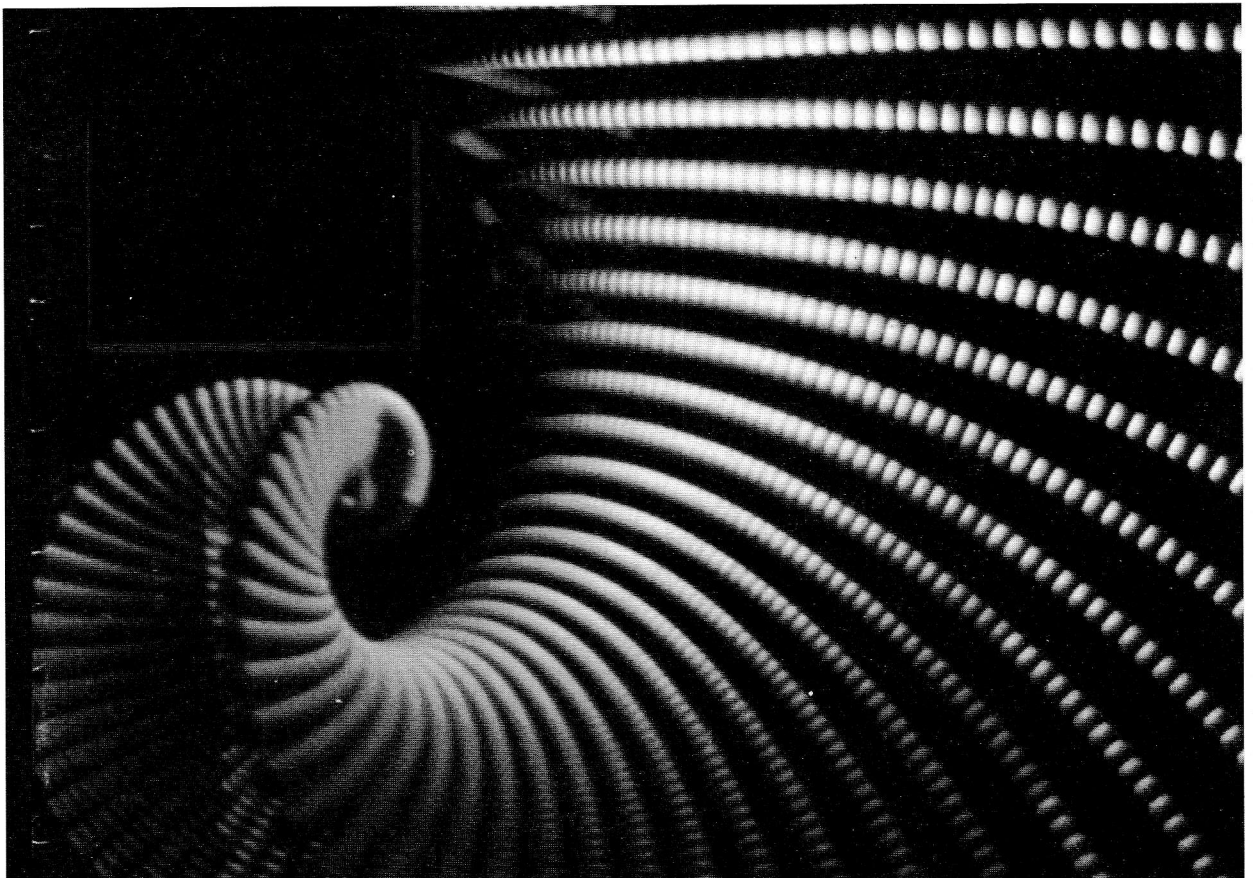
La Bretagne compte plusieurs équipes de recherche en mathématique : à Rennes où se situe l'IRMAR - Institut de recherches mathématiques, à Vannes où règnent les statistiques.

A Brest, l'Ecole nationale supérieure des ingénieurs des études et techniques d'armement (ENSIETA) se penche sur les réseaux neuronaux, quand il faut, avec les outils mathématiques adaptés au système

binaire de nos ordinateurs, prendre en compte le "ni oui ni non", le "ni 1 ni 0" des données fournies par la réalité.

Derrière une image encore austère, s'active une communauté de chercheurs qui, loin de se limiter à la résolution de grandes équations abstraites, emploient tout leur art à simplifier les problèmes complexes, que l'on ne sait pas traiter, pour en faire des problèmes simples, pour lesquels nous sommes capables aujourd'hui de trouver des solutions, grâce aux nouvelles théories (fractales, théorie du chaos, distributions, ondelettes, ...).

C'est ainsi que l'on retrouve, dans la résolution de problèmes bien réels, comme la sécurité informatique ou la modélisation du cerveau, les équations qui autrefois blanchissaient les tableaux noirs (puis blancs) de nos lycées pour, croyait-on, le seul plaisir de "faire des maths".



La géométrie algébrique

Pierre Berthelot.
IRMAR, Rennes

De nos jours, l'utilisation des méthodes très puissantes de la géométrie algébrique contribue à faire de la théorie des nombres une des branches les plus vivantes et les plus attractives des mathématiques.

L'équipe de Géométrie de l'IRMAR, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, possède un profil original, axé principalement sur les aspects arithmétiques de sa discipline.

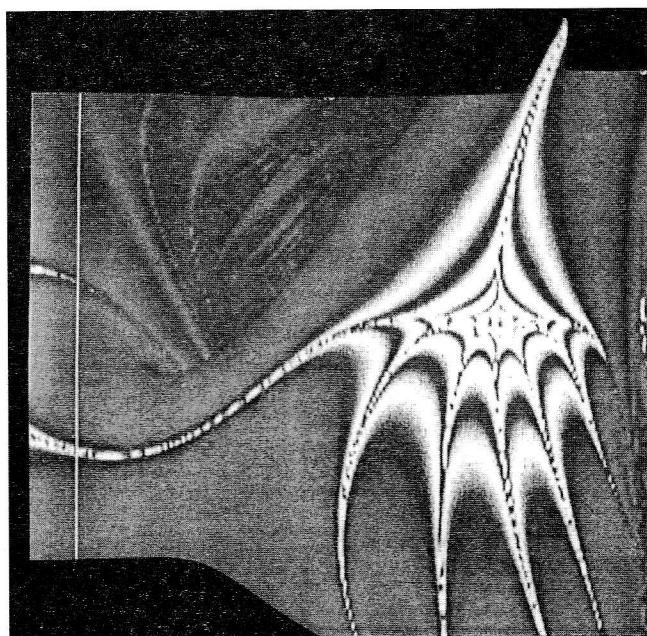
Qu'est-ce que la géométrie algébrique

En simplifiant, on peut dire que la géométrie algébrique a pour objet l'étude des systèmes d'équations algébriques en un nombre quelconque de variables. L'ensemble des solutions d'un tel système constitue un objet géométrique complexe : ainsi, une équation à 2 variables définit une courbe dans le plan, une équation à 3 variables, une surface dans l'espace à 3 dimensions, un système de 2 équations à 3 variables, une courbe dans l'espace... L'étude de ces objets appelés "variétés algébriques", met en oeuvre les techniques de l'algèbre et de la géométrie, et souvent aussi celles de la "théorie des nombres".

Les recherches de l'équipe de Géométrie algébrique sont principalement orientées vers ces problèmes liés à la théorie des nombres, comme l'étude des solutions de systèmes d'équations algébriques à valeurs entières, ou dans certains corps particuliers (1). Un aspect particulier est l'étude de certaines courbes importantes en arithmétique, comme les courbes elliptiques ou les courbes modulaires.

Le calcul modulo N

Dans l'étude arithmétique des variétés algébriques, on emploie une méthode



fondamentale, issue de la théorie des nombres la réduction *modulo n* (2) des données à valeurs entières, n étant un entier fixé. Le principe en est très simple : toute quantité multiple de n est considérée comme nulle. Lorsque n est un nombre premier, traditionnellement noté p , les règles de calcul sont en tout point semblables aux règles habituelles.

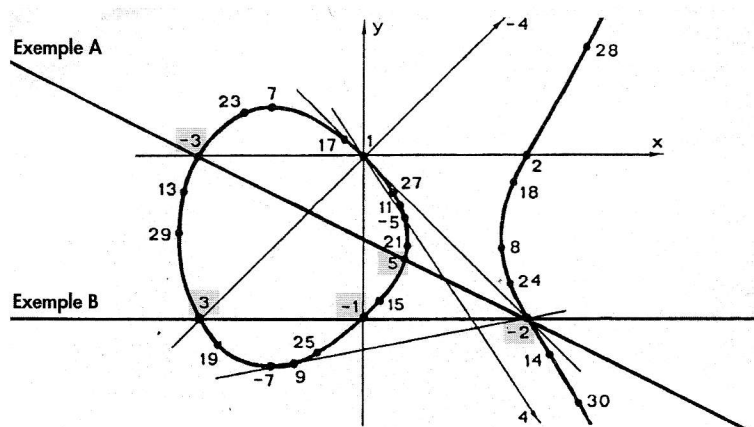
L'ensemble construit ainsi, appelé "corps fini", est composé des classes des nombres entiers allant de 0 à $p-1$. Il peut alors être enrichi par toutes les constructions usuelles de l'algèbre : polynômes, racines d'équations algébriques, vecteurs, matrices... De cette manière, on fabrique des objets géométriques plus simples, dont les propriétés reflètent ceux du monde réel.

Des retombées technologiques

Si les problèmes de la géométrie algébrique sont en général du domaine de la recherche fondamentale, ils ont aussi des applications technologiques parfois inattendues. Omniprésent dans la technologie actuelle, le codage binaire des données se prête directement par sa mesure au calcul modulo n . C'est ainsi que la sécurité des transactions électroniques repose souvent sur la méthode de cryptographie à clé publique, dite RSA, basée sur l'impossibilité, lorsque p et q sont deux grands nombres premiers, de retrouver p et q en connaissant

(1) corps : ensemble régi par les lois fondamentales de l'addition et de la multiplication des nombres.

(2) modulo n : relation d'équivalence entre deux entiers dont la différence est un multiple de n .



Cette figure représente les points à coordonnées rationnelles de la courbe elliptique d'équation $y^2 + y = x^3 - x$.

Toute courbe elliptique possède une loi d'addition naturelle ; ici, la somme de 3 points alignés est égale à 0. Exemple A : $-3 + 5 - 2 = 0$; exemple B : $-3 - 1 - 2 = 0$.

seulement le produit $n = pq$, même avec l'aide des ordinateurs les plus puissants.

La géométrie algébrique modulo p intervient aussi dans la construction des codes correcteurs d'erreurs les plus performants, basés sur les points de certaines courbes algébriques à coordonnées dans un corps fini. Grâce à l'augmentation continue de la puissance de calcul des microprocesseurs, l'utilisation de telles techniques, mettant en oeuvre des algorithmes sophistiqués, deviendra de plus en plus fréquente dans les années à venir.

Un prix de l'Académie des sciences

Le prix "Charles-Louis de Saulces de Freyeinet" a été décerné en 1995 par l'Académie des sciences à Pierre Berthelot pour ses travaux, qui ont permis le développement de certaines théories, dites "cohomologiques", grâce auxquelles on peut réduire le calcul d'informations sur des objets géométriques à des problèmes d'algèbre linéaire.

Les réseaux neuronaux en quête de genèse

Les réseaux neuronaux fonctionnent. Pourtant, personne ne sait vraiment "pourquoi ça marche".

"On peut aujourd'hui comparer l'engouement pour les réseaux de neurones à celui qu'à provoqué, à une certaine époque, l'intelligence artificielle et les systèmes experts. Ceux-ci n'étaient rien d'autre, finalement que des langages de programmation". Enseignant-chercheur à l'ENSIETA, Nicolas Seube ne se paie guère de mots : les réseaux de neurones ont trouvé de nom-

breuses applications, mais elles sont basées sur des "modèles arbitraires", des "métaphores biologiques approximatives" du fonctionnement du cerveau humain. En un mot, ce sont des systèmes empiriques. D'où sa volonté d'en venir aux bases théoriques.

"Nous voulons mettre l'accent sur les aspects théoriques des réseaux de neurones, et sur les méthodes mathématiques permettant de proposer des alternatives constructives aux algorithmes neuronaux existants".

Les bits de la machine

Les réseaux neuronaux sont définis comme étant des systèmes artificiels, basés sur des calculs informatiques et conçus, approximativement, sur le modèle du traitement de l'information par les humains. Les bits de la machine, unités du langage binaire, apprennent à se substituer à la physique des neurones du cerveau. Les applications de ces réseaux sont variées, englobant la reconnaissance des formes et des images, la reconnaissance et la synthèse de la parole, la robotique (auto-apprentissage du robot), l'automatique (commande de procédés industriels de fabrication), et bien d'autres domaines encore, allant de la mise en conservation des haricots aux virtualités d'évolution de la vie sur une planète.

"Pourquoi ça marche"

Ce n'est pas si évident. Un réseau de neurones est avant tout un système à

entrée-sortie : le dispositif, qui reçoit des signaux à l'entrée, est capable de les traiter en tenant compte de leurs caractéristiques. Il en ressort un signal qui est la résultante des opérations effectuées. *"Si on prend un modèle où les neurones sont répartis sur plusieurs couches, on s'aperçoit souvent qu'il y a surdimensionnement des paramètres par rapport au problème. Ce qui empêche toute analyse fine des résultats"*. Ça marche, mais en quelque sorte à l'aveuglette, par accumulation des moyens.

Le théorème de Barron

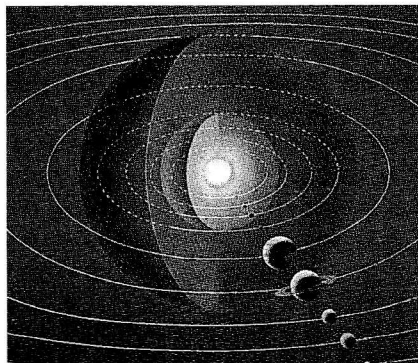
Sur quel principe de base s'appuyer pour éviter cela? Par exemple, sur le théorème de Barron, qui date des années 1980. Suivant la régularité de la fonction à approcher, et la précision escomptée, il permet d'estimer le nombre minimal de cellules élémentaires à déployer dans un modèle à une seule couche. En d'autres termes, comme toutes les cellules (d'entrée, de sortie et intermédiaires) sont interconnectées, il y a moyen de prévoir leur nombre en suivant un algorithme mathématique bien défini.

"Il est important de revenir à cette base", commente le mathématicien, *"car on bute sur certaines limites : alors que des modèles simples résolvent des problèmes compliqués, on utilise de plus en plus aujourd'hui des modèles extrêmement compliqués, qui s'avèrent d'analyse très délicate"*. Le théorème de Barron, d'un point de vue pratique, permet aussi de réduire le nombre de cellules à implanter au niveau des micro-ordinateurs qui simulent les réseaux des neurones. Les réseaux neuronaux ne sont pas un gadget de l'histoire des sciences !

Les mathématiques appliquées à l'imagerie médicale

"En imagerie médicale, les mathématiques font partie du quotidien".

L'un des thèmes importants traités en imagerie médicale est la modélisation anatomique du cerveau. Il existe, pour les neu-



rochirurgiens, un "Atlas du cerveau", publié par Talairach dans les années 50. Mais les planches de papier constituant cet atlas ne sont pas suffisamment précises. Grâce à l'informatisation de cet ouvrage de référence et à l'ajout de nouvelles données, Didier Lemoine participe à la mise en place d'un atlas anatomique tri-dimensionnel, dans le cadre du projet de recherche Atlas, mené par Christian Barillot (chercheur CNRS) et Bernard Gibaud (chercheur INSERM) au sein du laboratoire SIM, partenaire du CERIUUM.

En 20 ans, de nombreuses techniques d'imagerie médicale sont apparues, complémentaires les unes des autres. Le traitement mathématique permet de synthétiser les informations provenant de ces différentes techniques.

La numérisation ouvre la voie à de nouvelles perspectives, comme la transmission des images d'un médecin à l'autre, via un réseau de télécommunications... L'atlas du cerveau se retrouve ainsi au cœur d'un ensemble d'outils d'aide à la décision, cette dernière restant toujours sous la responsabilité du médecin ou du neurochirurgien.

De matrices en logique floue

Pour Emmanuel Cordonnier, directeur scientifique du CERIUUM *"les mathématiques sont des outils au service des différentes disciplines scientifiques."* A chaque point réel sur une image IRM (image par

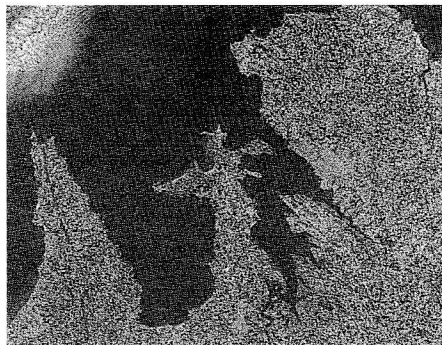
La théorie des systèmes dynamiques permet, par exemple, d'étudier la stabilité du système solaire : l'attraction des planètes les unes sur les autres introduit de légères perturbations dans les orbites elliptiques que décrivent ces planètes autour du soleil. Ces perturbations sont-elles suffisantes pour, à la longue, éjecter une planète du système ou, au contraire, la faire tomber dans le Soleil ?

résonance magnétique) du cerveau d'un patient, doit correspondre un point de l'image obtenue par scanner sur le même patient, la correspondance entre les deux se calculant à l'aide d'une matrice tri-dimensionnelles, c'est-à-dire composée de trois lignes et de trois colonnes : c'est une transformation "rigide".

L'atlas numérique du cerveau doit pouvoir être utilisé dans tous les cas. Or, chaque cerveau est unique : il faut donc, dans cet atlas, prendre en compte un positionnement dit "flou" des différentes coordonnées, de manière à pouvoir y superposer n'importe quel cerveau : il faut alors faire appel à une transformation "élastique".

Une autre technique importante en imagerie médicale est la morphologie mathématique : à partir d'une forme aux contours complexes, l'alternance d'érosion et de dilatation des différents points de l'image produit une forme mieux définie. Cela permet, au choix, d'éliminer le "bruit" lié à l'instrument, ou de mettre en valeur les détails.

Mais les mathématiques ne sont là que pour assister le neurochirurgien. Lui seul pourra, au cas par cas, évaluer la morphologie du cerveau de son patient : cette morphologie peut être fortement modifiée par une tumeur cérébrale ou toute autre contusion.



Actuellement, seule la méthode fractale permet de décrire la complexité d'un littoral rocheux. Le découpage des côtes finistériennes est, à ce titre, un bon exemple de figure fractale.

Des moyens importants

"Prenons l'exemple d'une structure cérébrale stratégique, comme le sillon de Rolando, une région périphérique du cerveau qui délimite deux zones fonctionnelles majeures", explique Didier Lemoine. Grâce à l'atlas numérique, le neurochirurgien pourra situer approximativement cette structure, malgré la complexité de l'organisation tri-dimensionnelle des sillons. Une autre utilisation de la modélisation numérique sera le pilotage de l'appareil de radiothérapie, pour le traitement des tumeurs cérébrales.

Matrices, probabilités, calcul numérique, logique floue, ... comment ne pas évoquer aussi le calcul fractal? Lui seul permet d'appréhender la rugosité d'une surface naturelle, l'intensité d'un relief, la forme des circonvolutions cérébrales. *"Tout ceci paraît complexe, mais le domaine de l'imagerie médicale bénéficie d'importants moyens de calcul",* souligne Emmanuel Cordonnier, qui fait remarquer que si l'imagerie médicale utilise les mathématiques, elle les fait aussi progresser, en leur soumettant des problèmes pertinents. L'imagerie médicale et les mathématiques font bon ménage!

Les mathématiques de l'optimisation et de la décision

Ce domaine, constitué d'un véritable arsenal de modèles et de techniques, a la particularité de résoudre des problèmes concrets du monde économique industriel...

Ali Ridha Mahjoub, professeur à l'université de Bretagne occidentale est responsable du laboratoire "Systèmes de production et optimisation", une composante de la jeune équipe Informatique de l'UBO qui a de nombreux axes de recherche ayant trait aux mathématiques de l'optimisation et de la décision.

Qu'entend-on par optimisation? *"Il s'agit d'un ensemble vaste de modèles et de techniques, qui permet de déterminer la meilleure solution pour un problème concret, et par conséquent de faciliter la prise de*

décision", définit Ali Ridha Mahjoub. Ces méthodes sont utiles dans beaucoup de domaines : l'industrie, la finance, les services, les transports, la médecine, la biologie, la physique, les télécommunications... En d'autres termes, elles concernent autant, pour des raisons de coût et de profit, la production de biens de consommation que la réalisation d'un réseau de télécommunications. Au laboratoire SPO, elles interviennent dans la résolution de plusieurs problèmes comme le calcul de l'énergie minimale en physique statistique, dans un modèle de "verre de spins", un phénomène magnétique d'une grande complexité, que nous ne développerons pas ici.

Le voyageur de commerce

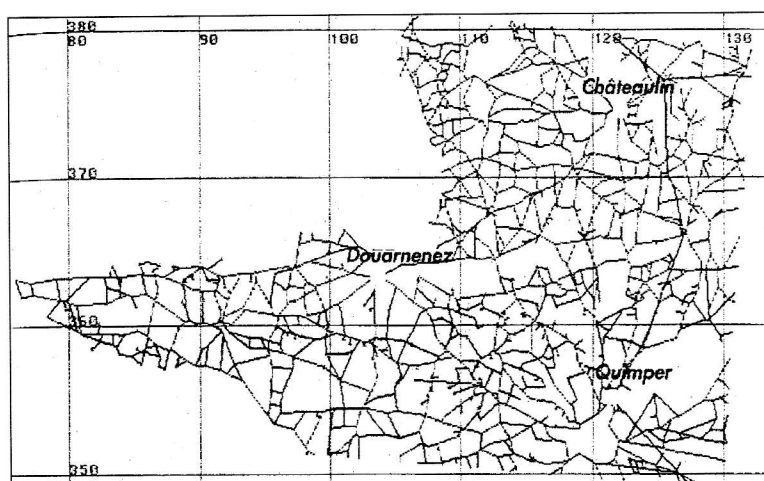
Pour parler de l'optimisation, il faut d'abord faire la part entre deux champs totalement différents l'un de l'autre : l'optimisation "discrète", mettant en oeuvre des variables entières (1, 2, -1, etc) et l'optimisation "continue", qui traite de problèmes dont la solution cherchée peut être représentée par des variables réelles telles que 0,1 ; 3,18 ; π ...

Les travaux de Ali Ridha Mahjoub et de Jean Pierre Barthélémy portent sur l'optimisation discrète, une discipline se situant à l'intersection des mathématiques appliquées et de l'informatique.

"Actuellement, nous nous intéressons beaucoup à la conception de réseaux de télécommunications... Il faut mettre en place des réseaux fiables, qui continuent à fonctionner en cas de panne. Il faut prendre en compte certaines contraintes, telles que le coût des liaisons et des centres de transmission. Chaque type de réseau est caractérisé par un ensemble de paramètres. Notre objectif est de développer des modèles et des techniques qui permettent de résoudre efficacement ces problèmes et d'élargir davantage l'ensemble des situations réelles auxquelles ces techniques peuvent être appliquées".

Une des branches de l'optimisation discrète est l'optimisation combinatoire, dont les problèmes se formulent en termes de graphes (des points reliés par des traits). Il existe dans ce domaine un problème très connu : un voyageur de commerce ayant un certain nombre de villes à visiter, désire établir entre ces villes, une tournée qui soit de longueur minimale.

Le nombre de tournées possibles entre n villes est de l'ordre de factorielle n (s'écrit $n!$). Pour 100 villes, le nombre "factorielle 100" ($100! = 100 \times 99 \times 98 \dots$) dépasse le nombre d'atomes de l'univers. "pour calculer la meilleure solution de cet ensemble, le plus puissant ordinateur mettrait des dizaines d'années. Le but est donc de développer une technique qui soit applicable dans un délai raisonnable." □



◀ Voici un exemple d'application des mathématiques de l'optimisation. Cette carte de la région de Châteaulin et du Cap Sizun, dans le Sud Finistère, est celle des itinéraires de collecte du lait, calculés à l'aide d'un logiciel d'optimisation. Le résultat est un gain d'environ 10%, à la fois en temps et en distance parcourue.

Laurent Schwartz, un géant de ce siècle

Emmanuel Deshayes, X-Paris

Laurent Schwartz est né à Paris en 1915. Il vient d'éditer aux Editions Odile Jacob un livre : *"un mathématicien aux prises avec le siècle"*.

Ce livre autobiographique commence par "je suis mathématicien" mais les 14 chapitres de ce livre vous feront parcourir bien autre chose que les mathématiques de ce siècle. Vous y lirez la vie d'un mathématicien qui transporte sa rigueur de raisonnement dans la vie courante, une vie entière, multiple, faite de 3 vies qui s'entrecroisent : les mathématiques, la politique, les papillons ! Ceci à travers 3 grandes parties : "les années de jeunesse", "au soleil de la science" et "au cœur du combat politique".

Comme vient de le souligner Michel Demazure, «les historiens disent que les siècles commencent en France aux années 15 (1715, 1815, 1915). Et que le XXe siècle a fini en 1989, lors de la chute du mur de Berlin. Laurent Schwartz, né en 1915 est donc par excellence un homme de ce siècle, le siècle de la politique, des engagements et des illusions, et comme il l'écrit, "aux prises" avec lui. Laurent Schwartz a souvent dit qu'il n'avait pas choisi de militer (pour le trotskysme, pour la réforme, pour les droits de l'homme), que cela s'était imposé à lui,

quitte à l'empêcher de se consacrer à ses activités de prédilection, la recherche. Mais *"la découverte mathématique est subversive"*».

Nous lui devons la théorie des distributions, qui lui vaudra d'être le premier français à recevoir la Médaille Fields en 1950, le prix Nobel des mathématiciens.

"C'est un mathématicien et il doit être mathématicien" disait de lui un de ses professeurs de collège. Laurent Schwartz parle doucement. Comme pour savourer cette logique toute mathématique qui a déterminé son existence, construit son destin extraordinaire.

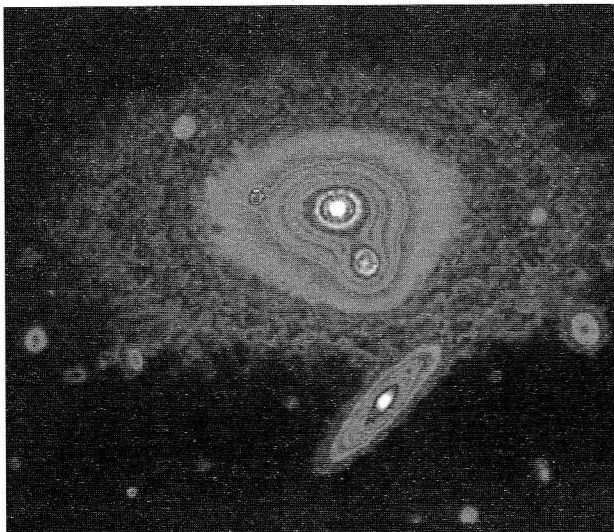
Dans sa bibliothèque, les deux volumes de la Théorie des distributions disent page à page ses intuitions et ses doutes.

"Trouver une théorie qui rendait les fonctions indéfiniment dérivables et permettrait la dérivation terme à terme des séries convergentes, c'était exactement le genre de recherche qui me convenait : théorie cohérente mais restant près des réalités et des applications", expliquait le mathématicien à son entrée à l'Académie des Sciences en 1972.

Le chercheur a longtemps répugné à mettre en forme cette "découverte" des distributions qui lui a valu une médaille Fields. *"J'ai pondu un livre de 300 pages mais j'en suis très mécontent. Il était bon de faire un livre pour que tout le monde puisse utiliser les distributions. Il est paru mais j'ai perdu un temps précieux pour la recherche."*

Infatigable, Laurent Schwartz a toujours cherché. Sur les particules élémentaires en mécanique quantique relativiste en 1969, en Topologie et analyse fonctionnelle en 1970, sur les Mesures de Radon en 1973 ou sur l'Analyse hilbertienne en 1979. Parce que faire de la recherche toute sa vie est la seule chose raisonnable pour un chercheur. Parce que *"réfléchir sur un problème qui*



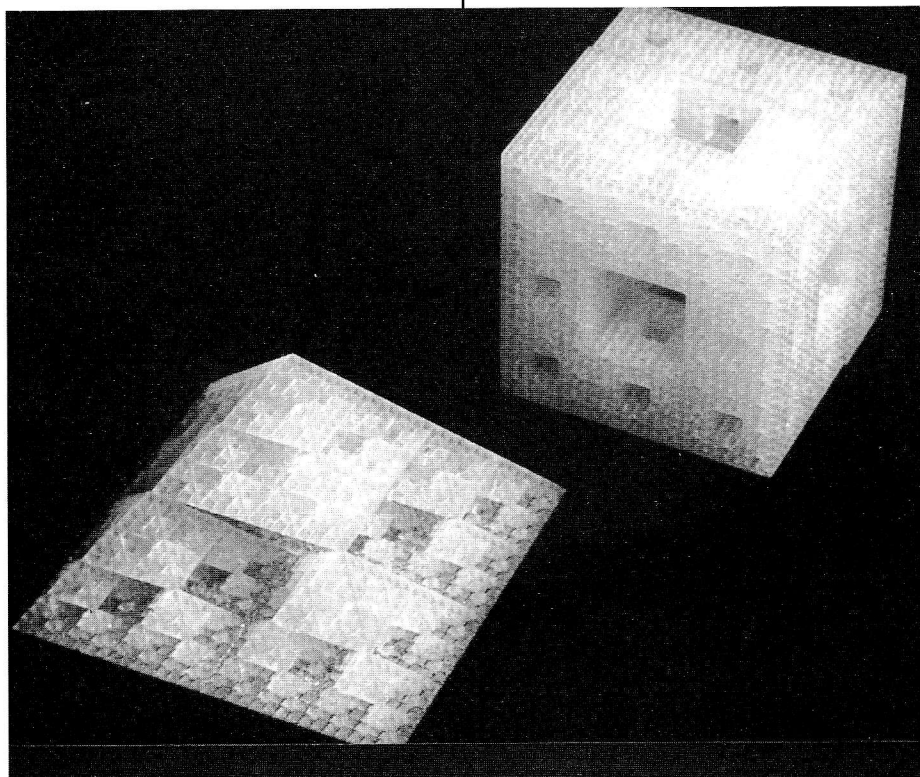


résiste” est peut-être l’unique privilège de ceux qui aiment la difficulté. *“J’aime sécher dans la vie, avoue-t-il. J’ai eu des difficultés, des difficultés qui m’ont arrêté, mais rien ne vaut mieux que des difficultés pour progresser”.*

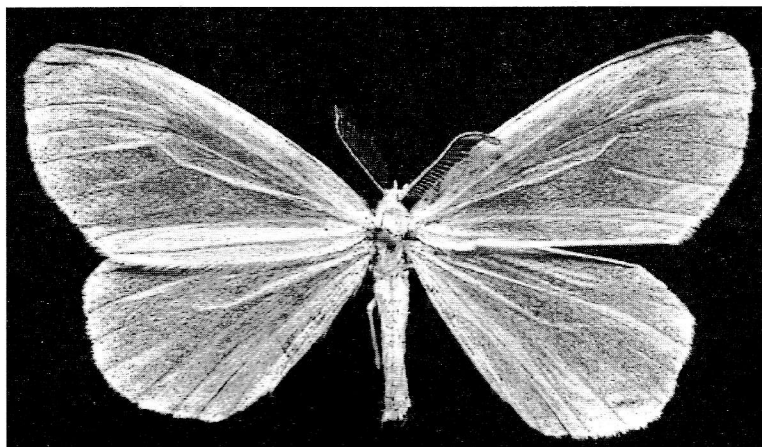
La parabole est belle. Et derrière se cache cet enseignement : “Plusieurs fois dans ma vie, j’ai changé tout. Je crois que pour être un vrai chercheur, il ne faut pas se bloquer dans une direction. Il faut regarder autour et s’apercevoir tout-à-coup qu’une chose qu’on croyait secondaire devient beaucoup plus importante, et être capable de tout changer”.

La difficulté, Laurent Schwartz l’a souvent rencontrée, contournée, abolie. Si bien qu’elle est devenue sa compagne, honnie, fidèle, complice, dans la recherche mais aussi dans l’enseignement et dans la politique.

Un exemple : à son entrée comme professeur à l’Ecole polytechnique en 1959, l’X lui est totalement inconnue. A la demande du Directeur de l’Ecole, il est chargé de changer tout l’enseignement, en particulier en mathématique. Son souhait : *“fabriquer des élèves motivés par l’enseignement des mathématiques pures et appliquées pour en faire de bons ingénieurs parce que je*



Le papillon est l'emblème du centre de Mathématiques. Laurent Swartz, son fondateur, en possède 19 000 dans sa collection



pensais que la formation scientifique vraie est absolument indispensable pour de bons ingénieurs et que la formation mathématique est une part indispensable de cette formation scientifique”.

Il réforme le département de mathématiques, renouvelle le corps enseignant et crée en 1966 un centre de recherche de mathématiques.

Dans le même temps, Jacques-Louis Lions réintroduit les mathématiques appliquées.

“Il est indispensable, pensait-il déjà, que l’industrie soit fortement insufflée par la recherche scientifique. Il n’est pas admissible que des ingénieurs ignorent complètement ce qu’est un laboratoire de recherche. Les élèves doivent acquérir cette idéologie de l’ingénieur qui est celle de l’ingénieur qui connaît les sciences modernes, les sciences pures et les sciences appliquées, et qui connaît la technologie”.

Enseignement, recherche et industrie doivent se couper sans se recouper. □

Parallèlement à ses activités mathématiques, Laurent Schwartz est un militant politique. En 1936, il adhère au parti trotskiste et le quitte en 1947. En 1960, il est un des fondateurs du Parti Socialiste Unifié. Il milite en faveur de l’indépendance de l’Algérie, de la paix au Viêt-nam et pour le retrait des troupes soviétiques d’Afghanistan. A partir de 1985, il préside le comité national d’évaluation des universités.

Extrait de “Les mathématiciens de A à Z”

Laurent Schwartz se promenant à Varsovie, passe devant un arrêt d’autobus. Il lit machinalement la destination : Place Banach. «Je me dois d’y aller» se dit-il, et il attend avec quelques personnes. L’autobus arrive bien plein. Laurent Schwartz s’avance vers la porte, mais le contrôleur lui dit : «ne montez pas, c’est ... complet !».

Extrait de “Les mathématiciens de A à Z”

Maths 2000 : défaite ou triomphe ?

Apmep, SMF, SMAI, ...
et Palais de la Découverte

Le 7 mars 1997, le Palais de la découverte organisait une réunion-débat autour de ce thème réunissant, outre l'Apmep, la SMF (Société mathématique de France), la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) et l'UPS (Union des professeurs de spéciales).

Les maths jouissent d'un curieux privilège : elles laissent rarement indifférent. Périodiquement, on voit paraître dans la littérature ou les médias, sous des plumes célèbres ou moins célèbres, certaines attaques passionnées contre "la didacture des maths", suscitant des réactions non moins passionnées.

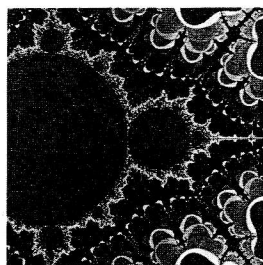
Si l'on s'essaie à une typologie, ces débats portent principalement sur trois points :

- la place des maths dans notre société technologique et industrielle,
- le rôle des maths dans la recherche, hors recherche non mathématique,
- la place des maths dans l'enseignement, sous le double aspect de leur rôle formateur et de leur rôle comme instrument de sélection.

Claude Allègre

La défaite de Platon

ou la science du XX^e siècle



Fayard le temps des sciences

Ces polémiques ne sont pas nouvelles, ni certains des arguments avancés ça et là, notamment concernant le dernier point. Déjà, en 1746, M. de la Chapelle, dans un Discours sur l'étude mathématique, où l'on essaye d'établir que les enfants sont capables de s'y appliquer, devait répondre à l'objection que "les mathématiques pourraient bien éteindre l'imagination".

Dans son dernier ouvrage, avant d'être Ministre de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie, *La défaite de Platon*, Claude Allègre alimentait de nouveau la polémique, sur les trois points cités, en examinant "au galop" les rapports des maths au réel et aux autres sciences et leur place dans l'enseignement.

Les participants à cette réunion-débat animée par Michèle Chouchan (France-Culture) étaient : Claude Allègre (géophysicien), Michel Broué (mathématicien), François Cuzin (biologiste), Ivar Ekeland (mathématicien), Luc Ferry (Président du Conseil National des Programmes) et Didier Dacunha-Castelle (ancien Président du CNP).



Ce débat, loin de satisfaire les praticiens-pédagogues présents, a laissé d'autant plus d'amertume que le "méchant" de l'équipe occupe une position éminente et stratégique dans le nouveau gouvernement pour l'enseignement des sciences.

Ce qu'en disent les participants de l'Apmep

Claude Allègre y a suivi un raisonnement du type :

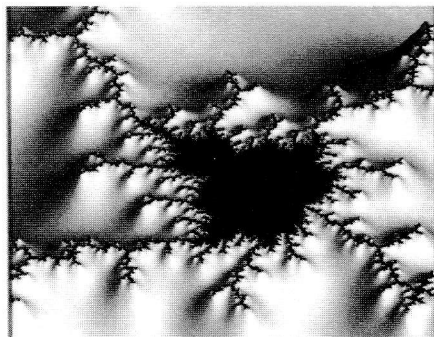
- les mathématiques n'ont pas à se confronter au réel à cause de leur mode de validation, au contraire des autres sciences. Par suite, les modèles mathématiques peuvent être un obstacle à la reconnaissance des faits expérimentaux.

- l'enseignement des mathématiques tend à promouvoir les raisonnements hypothético-déductifs, qui ne recouvrent pas l'activité scientifique dans la confrontation avec le réel. Claude Allègre dénonce l'inculture mathématique de la population, justifiant une remise en cause de son enseignement. Il y a trop de cours et pas assez de place laissée à l'autonomie des élèves et à l'expérimentation.

Opposant mathématiques et sciences du réel, C. Allègre y a restreint les mathématiques et leur raisonnement à un «raisonnement cartésien», aussi hégémonique que restreint et sclérosé.

Ce point de vue, comme quelques autres, ont montré que les pratiques nouvelles de l'enseignement des mathématiques issues des formations des IREM sont encore aujourd'hui trop méconnues du public et peut-être aussi de beaucoup d'enseignants.

Comment faire connaître à tous les évolutions de l'enseignement des mathématiques depuis 20 ans ? Des activités par "résolution de problèmes" aux Projets d'actions éducatives (les PAE scientifiques et mathématiques) en passant par les multiples "Rallyes" et autres activités de type "Maths en jeans" ?



La défaite de Platon Claude Allègre, Fayard, 1995 Quelques extraits

Page 426 : **Mathématiques et Nature**

« Tout ceci nous invite à nous pencher sur la question des mathématiques et de leur rôle dans les Sciences de la Nature.

Comme on l'aura noté, nous ne les avons pas mentionnées en tant que telles parmi les composantes de la science. Ce n'est pas un oubli : les mathématiques ne constituent pas à proprement parler une science, et ne sont pas en tout cas une "science comme les autres". Le physicien-théoricien Murray Gell-Mann, grand admirateur de cette discipline s'il en est, écrit pourtant : «Les mathématiques ne sont pas vraiment une science si l'on entend par science une discipline vouée à la description de la Nature et de ses lois».

Page suivante, on trouve :

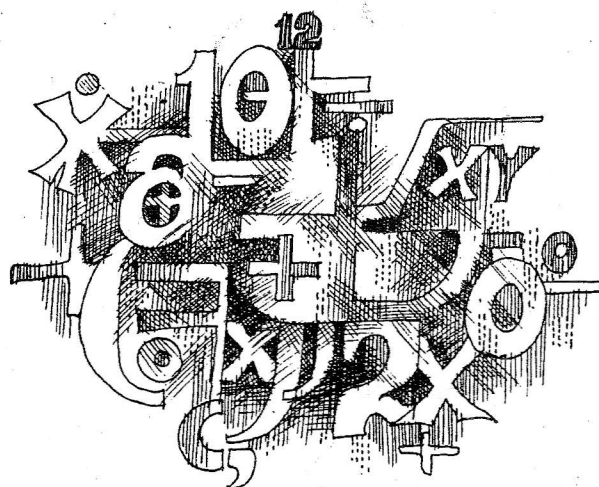
et l'observation du réel ?

«Evidemment, construction mentale, les mathématiques, discipline des formes, des nombres et des relations, prennent leurs racines dans le réel.

La géométrie est d'abord née de l'observation des figures géométriques existant dans le monde réel (voir Michel Serres : les origines de la géométrie. Flammarion, 1995). Les répertorier, les classer, découvrir leurs propriétés est une démarche identique à celle de la physique, car, une fois définies, ces lois (le théorème de Pythagore, par exemple) peuvent être confrontées à l'observation du réel. Mais en est-il de même lorsqu'on développe des géométries abstraites, multidimensionnelles, ou particulières, comme celle de Lobatchevski qui stipule que par un point on peut mener plusieurs parallèles à une droite donnée, ou encore celle de Riemann, géométrie sphérique à trois dimensions, ou d'autres encore plus abstraites, comme celle de Hilbert (même si, ultérieurement, elles peuvent se révéler utiles en Physique)».

Page 432 : **des maths pour l'autotoute**

« Je résumerais volontiers le rôle des mathématiques dans les sciences du réel par la métaphore suivante : elles sont de très belles voitures destinées à parcourir le



“champ” de la science ; lorsque ce “champ” est une route bien balisée, elles permettent d’aller vite et loin ; lorsqu’il est un désert inexploré (sans faits expérimentaux), elles peuvent aider à mener l’exploration rapidement, mais ne remplacent pas la boussole (l’intuition) ; lorsqu’il s’agit d’une jungle touffue (trop de faits d’observation complexes et entremêlés), elles s’arrêtent à l’orée, impuissantes.



Tel est le rôle des mathématiques comme auxiliaires des sciences de la nature : important, parfois décisif, mais non central. Pour autant, les “mathématiques appliquées” sont-elles destinées à ne devenir qu’un langage ? Quand on connaît les relations entre les progrès de l’ordinateur et ceux de la biologie moderne, qui sont toutes deux cybernétiques, mais ont aussi comme caractéristique commune d’avoir maintenu les mathématiques à la lisière de leurs développements, on peut s’interroger sur ce que sera à l’avenir cette nouvelle répartition des rôles.

Et pour finir, page 435 :

le hold-up intellectuel.

En fait, par le biais d’une succession de penseurs qui, héritiers de Descartes à Auguste Comte, s’est développée, notamment en France, l’idée que dans le développement scientifique, l’abstraction est plus importante que l’observation et l’expérience, que le raisonnement déductif l’emporte sur le cheminement inductif. C’est cette école de pensée, qui s’est donné les mathématiques pour emblème, que nous appellerons l’«école platonicienne». Elle s’est emparée de l’enseignement des sciences et, par là, de l’image que l’on a de la science, réalisant ainsi un véritable hold-up intellectuel. C’est ainsi que les mathématiques et leur mode de raisonnement ont envahi l’enseignement des sciences et toute la formation des esprits.

Les sciences en ont pâti. Les mathématiques aussi, car éloignées du réel, elles n’ont pas pleinement joué leur rôle. Ni sur le plan culturel ni sur le plan esthétique.



Tatouage faciale
chez une femme Makwa



**Quelques éléments de “réponses” écrits
avant et après.**

Jacobi (lettre à Legendre, Juillet 1830)

J'ai lu avec plaisir le rapport de M. Poisson sur mon ouvrage (Œuvres complètes de Jacobi, vol.1, p. 454) et je crois pouvoir en être très content ... mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupé de préférence, du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels. Un philosophe tel que lui aurait dû savoir que le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que, sous ce titre, une question de nombres vaut bien une question de système du monde.

Von Neumann (in The mathematician. Complete works, vol 1. p 1-9)

Je crois que c'est une relativement bonne approximation de la vérité - qui est bien trop compliquée pour permettre autre chose qu'une approximation - que les idées

mathématiques ont leur origine dans l'empirique, bien que la généalogie soit quelquefois longue et obscure. Mais une fois qu'elles sont ainsi conçues, le sujet commence une vie propre à soi, qu'il vaut mieux comparer à une vie créative, gouvernée par des motivations presque entièrement esthétiques, plutôt qu'à n'importe quoi d'autre, et en particulier à la science empirique.

Il y a cependant un autre point sur lequel, je crois, il faut insister. Quand une discipline mathématique voyage loin de ses sources empiriques, ou plus encore, si c'est une deuxième ou troisième génération inspirée seulement indirectement des idées provenant de la “réalité”, elle est sujette à de très graves dangers. Elle devient de plus en plus esthétisante, de plus en plus l'art pour l'art (en français dans le texte). Ceci n'est pas forcément mauvais, si le domaine de cette discipline est encore entouré de sujets qui ont des relations plus proches avec l'empirique, ou si la discipline se trouve sous l'influence d'hommes avec un goût exceptionnellement bien développé. Mais il y a un grave danger que le sujet se développera sur la ligne de moindre résistance: que le courant, loin de ses sources, se séparera en une multitude de branches insignifiantes, et que la discipline deviendra une masse désorganisée de détails et de complexités.

Autrement dit, loin de ses sources empiriques, ou après beaucoup d'hybridations, un sujet mathématique est en danger de dégénérescence. Au début, le style est classique ; quand il montre des signes de devenir baroque, alors le signal du danger s'élève. Il est facile de donner des exemples, de tracer une évolution concrète dans le baroque ou le haut baroque mais, de nouveau, ce serait classique.

Femme Tsonga
(province de Gaza)



Von Neumann in *"The role of mathematics in the sciences and in the society"* (Complete works, vol VI p. 477)

Mais toujours, une bonne partie des mathématiques qui deviennent utiles se sont développées sans aucun désir d'être utiles, dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quels domaines elles deviendraient utiles. Il n'y avait aucune indication générale qu'elles deviendraient utiles. C'est vrai de toute la science. Les succès sont en large mesure dûs au fait qu'on oublie complètement ce que l'on veut au bout du compte, ou même si l'on voulait quoi que ce soit au bout du compte, en refusant de porter ses investigations sur les choses qui profitent et en se guidant seulement sur des critères d'élégance intellectuelle.

Et je crois qu'il est extrêmement instructif de regarder le rôle que la science joue dans la vie de tous les jours et de noter que dans ce domaine le principe du laisser-faire a conduit à des résultats étranges et merveilleux.

Mathématiques et imagination

Rémy Langevin
(Université de Bourgogne
janvier 1977)

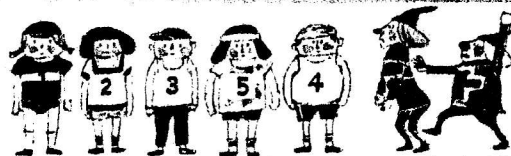
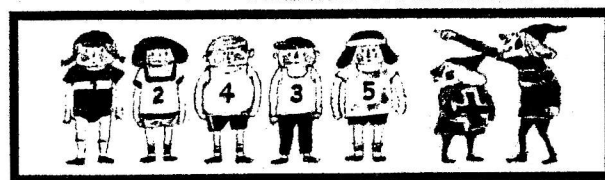
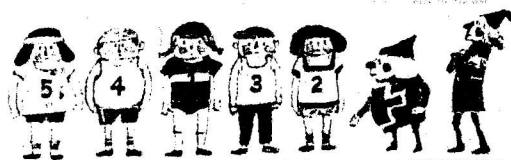
Il est aujourd'hui à la mode de critiquer les mathématiques, identifiées à des calculs longs et fastidieux, ou à un vocabulaire ésotérique, et de trouver toutes les

vertus au "concret". Seule l'initiation précoce aux sciences expérimentales permettrait de donner aux générations à venir les capacités d'imagination et d'adaptation qui leur font aujourd'hui défaut. Il est vrai que les sciences expérimentales ont été négligées en France, surtout au cours des siècles passés, quand le clerc de notaire ou l'homme cultivé étaient d'abord hommes d'églises.

Afin de ruiner la prétention des mathématiques à contribuer à une formation équilibrée des esprits, il faut commencer par bâtir une caricature des mathématiciens. J. Swift l'avait fait avec talent dans les voyages de Gulliver. Ses Laputiens ont besoin de domestiques pour leur frapper la bouche ou les oreilles avec une petite vessie gonflée afin qu'ils dédaignent délaissier leurs profondes spéculations mathématiques un instant pour répondre à leur interlocuteur ou écouter celui-ci. Il est très facile, après une telle caricature, de faire des mathématiques une rhétorique stérile.

Et vive la liberté de l'imagination !

Cependant, rien de plus loin de l'imagination d'un peintre, par exemple, que la juxtaposition de coups de pinceau aléatoires. Un tableau du Titien ou de Matisse est construit avec des proportions soigneusement choisies. Les chercher est presque un exercice de géométrie. C'est souvent le mélange de l'imagination et de la rigueur qui permet la création artistique. Il en va de même en mathématiques. La liberté dans le choix des axiomes, dans le



Les nombres en ordre

Plus grand, plus petit



choix des problèmes, des sources d'inspiration est féconde si elle est suivie de rigueur dans les déductions. Cela implique qu'il y ait tant de manières de faire des mathématiques : le calcul, le dessin en deux parmi d'autres.

Confiner les mathématiques à un rôle d'outil de calcul au service de l'économie ou des sciences expérimentales reviendrait à priver ces dernières de certaines de leur plus belles avancées. Comment Kepler aurait-il pu se rendre compte que les orbites des planètes étaient elliptiques si les anciens n'avaient pas d'abord reconnu et étudié cette courbe ?

Faut-il enfin laisser les mathématiques à quelques spécialistes, car elles exigent trop d'efforts pour le profane ? Les nombreux lycéens qui se passionnent pour la résolution d'un problème s'inscriront en faux. La solution d'un problème de mathématique intéressant peut être à la fois non mécanique, surprenante et élémentaire. Peu de domaines peuvent à tous les niveaux offrir des défis accessibles.

Il serait dommage de se priver d'une aussi belle école d'esthétique, de rigueur et d'imagination.

**Contribution au
groupe de travail
de l'Apmep
"Prospective Bac"**

Régis Gras et Annie Larher
(octobre 1996)

Question 1 : Les mathématiques sont-elles seulement une discipline de service ? Pourrait-on se contenter, dans une formation

générale, de faire enseigner par chaque discipline les mathématiques dont elle a besoin ?

**Apports spécifiques de l'enseignement
mathématique par rapport aux autres
disciplines**

L'enseignement des mathématiques vise à faire atteindre par les élèves, de façon plus spécifique que les autres disciplines, les objectifs suivants :

- effectuer un calcul en utilisant un algorithme formel, donc assez général pour être utilisé dans différentes circonstances, c'est-à-dire instanciable de façon quelconque, contrairement aux situations des autres sciences où les grandeurs sont spécifiées,
- optimiser un résultat à partir d'une famille de résultats plausibles, en utilisant des critères objectifs (par exemple en utilisant la fonction max-min ou le maximum de vraisemblance ou le minimum de risque),
- représenter une situation par un graphique, un diagramme qui fassent apparaître les propriétés relationnelles (par exemple, entre 2 ou 3 variables qualitatives), topologiques (un plan de circulation) algébriques (entre variables réelles, par ex),..., des objets de la réalité physique ou des objets mathématiques,
- modéliser et formaliser une situation-problème en fonction de contraintes imposées ou de degrés admis dans celle-ci,
- différencier ce qui est général de ce qui est particulier (mise en garde à l'égard de l'induction ou de l'analogie hâtives). De plus, exprimer ce qui est général dans une classe de situations voisines, par l'explicitation des invariants,

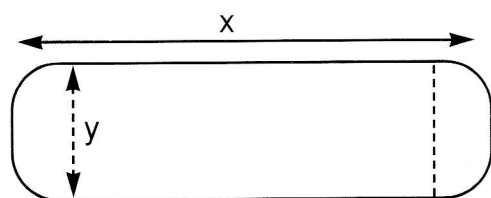
- structurer une ensemble de données selon les méthodes géométriques ou combinatoires pour l'analyser, pour permettre d'émettre des hypothèses, de proposer des inférences, tout en contrôlant le degré de confiance,

- disposer de méthodes sur la base de la logique propositionnelle (connecteurs, quantificateurs) qui permettent de conduire à un raisonnement indépendant de la sémantique pouvant être irréfutable dans un champ déterminé et sur la base d'hypothèses admises.

De façon plus générale, dans leur formation scientifique et sociale, l'enseignement des mathématiques contribue fortement à munir les élèves de modes de pensée et d'outils permettant entre autres de refuter des arguments d'autorité.

Un même problème, deux présentations, deux types d'enseignement (d'après une activité de l'IREM de Strasbourg)

I - La figure ci-dessous représente un rectangle accolé en demi-cercles dont le diamètre est égal à la largeur du rectangle.



1 - Sachant que le périmètre de cette figure vaut 40, en déduire une relation entre x et y .

2 - Montrer que l'aire du rectangle, en fonction de x , est égale à :

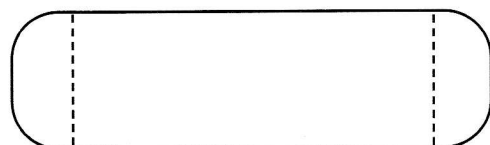
$$A(x) = x\left(\frac{40}{\pi} - \frac{2x}{\pi}\right)$$

3 - Représenter graphiquement la fonction A pour $x \in [0 ; 20]$

4 - Quelle conjoncture découle de cette représentation graphique quant au maximum de la fonction A sur l'intervalle $[0 ; 20]$?

5 - Montrer que $A(x) \leq \frac{200}{\pi}$ pour tout x de l'intervalle $[0 ; 20]$.

6 - Pour quelle valeur de x , de l'intervalle $[0 ; 20]$, l'aire du rectangle est-elle maximale?



II - Le maire d'une petite ville de province projette de construire un nouveau terrain de sport. Celui-ci doit avoir une forme rectangulaire et disposer à chacune de ses extrémités de deux aires en forme de demi-disque de diamètre égal à la largeur du rectangle. Lors de l'établissement du budget prévisionnel, le conseil municipal a décidé l'achat de la pose d'une clôture de 400 m de long au maximum.

Le maire tient à ce que l'on utilise le maximum de clôture permis, tout en veillant à ce que la partie rectangulaire du nouveau terrain occupe la plus grande surface possible. Dans ce but, il demande donc de déterminer ses mesures avant d'entreprendre les travaux.

Et si c'est l'aire totale du terrain qui doit être la plus grande possible ?

Question 2 : A quoi sert l'épreuve de mathématiques dans un examen de fin d'études comme le baccalauréat ? Est-elle nécessaire ? Si oui, à quoi ?

Fonctions de l'évaluation

Dans les faits, on considère généralement que l'épreuve de mathématiques au baccalauréat doit remplir (actuellement plus ou moins bien) une double fonction :

- sommative : évaluer par un bilan les acquisitions de l'élève au cours de ses études dans l'enseignement secondaire et dans la filière choisie, à la fois à travers ses connaissances et ses démarches ;

- prédictive ou pronostique : évaluer les capacités de l'élève à poursuivre des études ultérieures qui sont le plus souvent visées par le choix de la filière donc contribuer à son orientation de façon positive.

Ceci signifie que cette dernière fonction ne peut être véritablement bien assumée que si les résultats de l'examen sont couplés à ceux d'un contrôle continu. De plus les variantes de formation après bac sont telles (courtes ou longues par exemple) que la spécification des capacités devrait prendre en compte, sans s'illusionner sur la portée du pronostic qui ne peut intégrer les motivations et les contraintes sociales et économiques.

Question 3 : Si l'on sait assez bien évaluer l'acquisition des connaissances, qu'en est-

il de l'évaluation des démarches que l'enseignement des mathématiques est censé faire acquérir ? Sont-elles indépendantes des filières suivies (bilan) et visées (pronostic) ?

Remarques au sujet des démarches

Certes les acquisitions de connaissances peuvent varier d'une filière à une autre, mais des démarches communes sont partagées entre ces différentes filières et évaluables ; citons à titre d'exemple :

- communiquer oralement ou par écrit, de façon claire et soignée un résultat ou une représentation (graphique, tableau, plan...);
- conduire un raisonnement de 3 à 5 pas de façon rigoureuse sans paralogisme (erreur de bonne foi), donc en particulier, sans "cercle vicieux", aussi bien dans un cadre

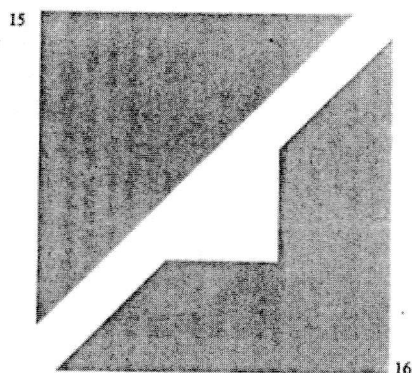
géométrique, que dans des cadres arithmétiques ou algébriques ;

- adopter une attitude critique face à un résultat, par exemple numérique (vraisemblance : ordre de grandeur ; pertinence : précision, nombre de décimales ; adéquation : conformité à la situation, ...) mais aussi bien face à un texte argumentatif ;
- fournir un exemple iconique ou numérique pour une situation générale ;

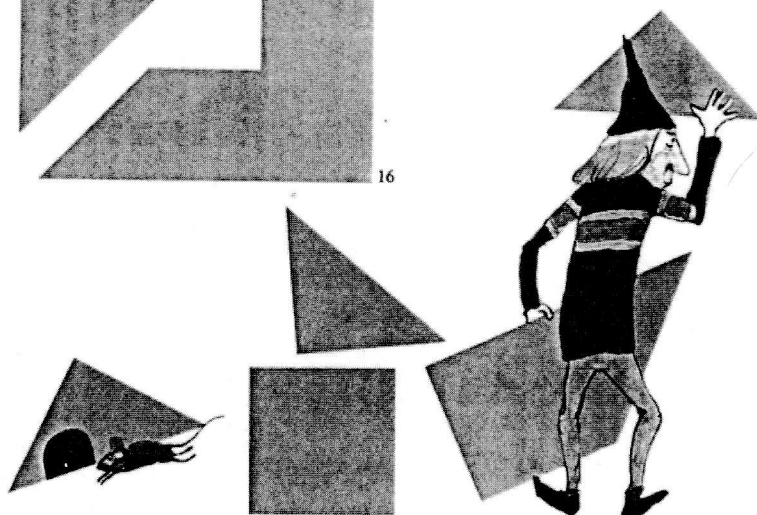
- émettre des hypothèses de plausibilité en faisant le choix de ce qui semble le plus probable ;

- faire choix d'une méthode ou d'une stratégie ayant les meilleures chances de déboucher sur une solution. De façon plus générale, se servir des espaces de libertés laissés dans ou hors du temps d'enseignement pour exercer sa créativité, voire sa fantaisie inventive.

Mais assembler n'est pas tout.
On peut aussi jouer à séparer



Méli et Mélo ont inventé un
produit qui sépare ce qui
était soudé



Monsieur Allègre et Descartes

Vincent Jullien,
mathématicien, historien et
philosophe
Ecole Normale Supérieure
de Fontenay
(Le Monde, 22 juin 1997)

J'ai récemment eu sous les yeux un texte de Claude Allègre (le point n° 1279) intitulé "Les erreurs de Descartes".

Il y écrit (ou fait écrire) que Descartes a défendu l'immobilité de la Terre. Descartes fut l'un des plus puissants et plus efficaces héliocentristes du 17^e siècle, et sa formule sur "*l'immobilité de la Terre en ces cieux*" est une clause de prudence. La suite soutient que la Terre et ses cieux sont emportés autour du Soleil ; c'est une thèse essentielle du Traité du monde.

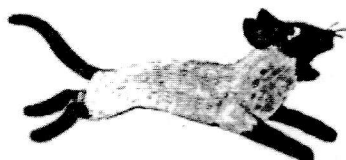
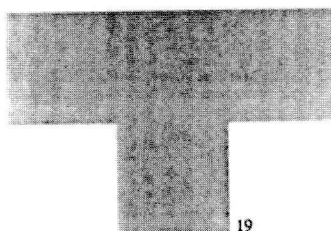
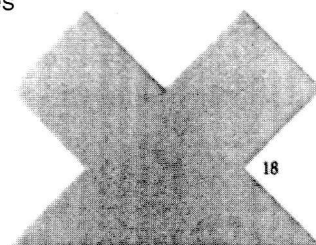
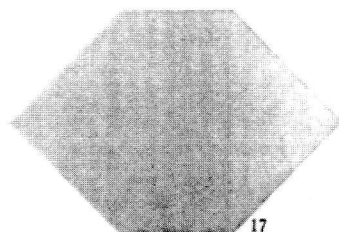
Plus contestable encore est la

conception de la science, de la vérité et de l'histoire de la science que révèle cet article : «Descartes s'est trompé sur à peu près tous les sujets», ce qui exact (et même en mathématiques, je puis le confirmer), mais ne permet évidemment pas de porter un jugement négatif (voire violemment hostile) sur l'œuvre de Descartes.

En effet, selon des critères anhistoriques, tous les savants du passé se sont "trompés" sur presque tout. Newton pensait que toute conception ondulatoire de la lumière était insoutenable. Kepler estimait que les astres avaient une âme. Einstein rejetait la physique quantique et l'idée d'un Univers non homogène. Galilée croyait que les marées s'expliquaient par le mouvement diurne et fournissaient une preuve du mouvement de la Terre ; il ne voulait pas des orbites elliptiques de Kepler. Copernic défendait la sphère des étoiles fixes. Perrin refusait obstinément la chimie moléculaire.

Je m'arrête, car il suffit de songer à n'importe quel savant du passé pour obte-

Regarde bien ces formes. Peux-tu retrouver les cinq morceaux dont elles sont faites ?



Le chat et la souris sont ravis
d'être enfin séparés !

nir un exemple (voire une foule d'exemples) d'erreurs. C'est - bien entendu - la vie même de la science et il est choquant de lire une moquerie, 350 ans après, sur Descartes qui croyait (l'idiot !) que c'était la quantité de mouvement qui était conservée dans le choc mécanique au lieu de l'énergie.

A l'époque, tous les concepts (mouvement, énergie, action, force, travail, ...) étaient en gestation. Ce fut une formidable avancée conceptuelle de proposer une loi générale de conservation lors des modifications des systèmes mécaniques isolés, comme le fit Descartes. Qu'elle ait dû être profondément modifiée est le propre des "*vérités scientifiques*" qui sont (mais je pensais que chacun en était aujourd'hui convaincu) provisoires, interpénétrables et toujours en devenir.

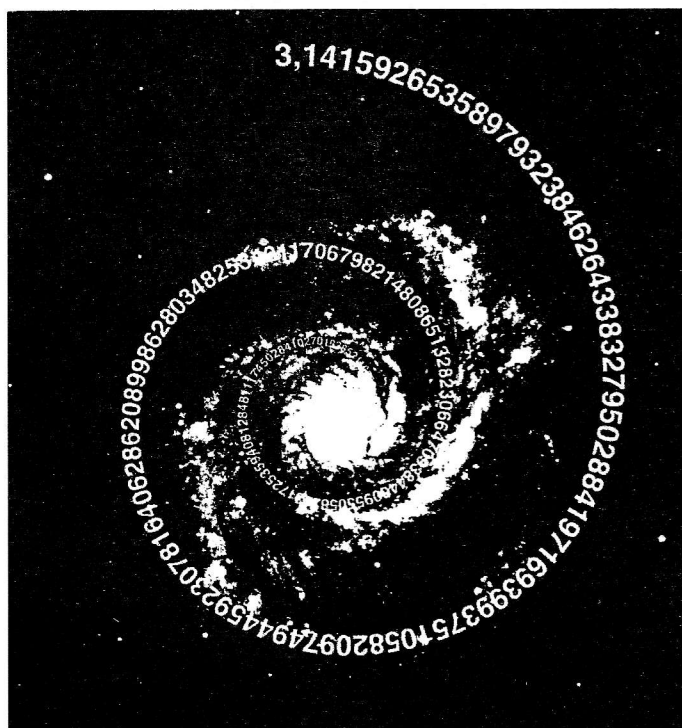
Quant au misérable argument anticartésien, selon lequel la racine de ces tares réside dans l'interaction qu'il admet entre science et métaphysique, il condamnerait tout autant Leibniz, Pascal, Kepler, Cantor et même Newton, dont les concepts de temps et d'espace absolus sont théolo-

giquement fondés. Cette bordée anticartésienne passe aussi à côté d'une leçon que l'auteur du Discours de la méthode nous a donnée : nous pouvons et nous devons penser en hommes libres, sans anathèmes et en évitant - si possible - de mêler la science aux querelles du temps.

Domage qu'il soit si mal entendu. Il faut aussi s'interroger : pourquoi cette montée aux créneaux ? Descartes - ou son épouvantail, sa caricature - est mobilisé dans un but précis qui n'a rien à voir avec la science ou l'épistémologie. Le voici associé à Claude Allègre, pour les besoins d'une polémique idéologique, aux nouveaux philosophes d'aujourd'hui qui, tournant effectivement leurs vestes au gré des vents inconsistants, se sont trompés pour ne pas penser faux ... comme Descartes.

La philosophie et la science, l'idéologie et la politique n'ont pourtant pas, je crois, les mêmes critères du vrai et du faux, du juste et de l'erronné. ☐

π relief



BIBLIOTHÈQUE
POUR LA SCIENCE

Le fascinant nombre π



3,14 29265358
2354626433832795
02884152108888375
105121174115923
1088
345
1486
347138
5505821725704
08128481124302841
0270191105559

POUR LA
SCIENCE
DIFFUSION BELIN

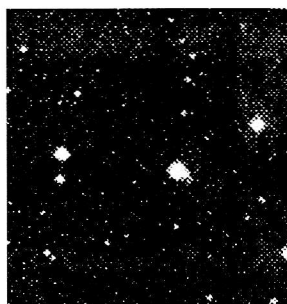
Oui, pour les curieux qui ont tout oublié, les curieux qui ont quelques souvenirs du lycée, les curieux qui cherchent à rendre l'enseignement moins abscons que le pensent certains (cf article sur "maths.

défaite ou triomphe ?).

Plongée dans les mathématiques du XXI^e siècle

«Explorer π , c'est comme explorer l'Univers ...» dit David Chudnosky, et son frère Gregory d'ajouter «... ou plutôt explorer le monde sous-marin, car nous sommes dans la vase et tout semble forme. Nous avons besoin d'une lampe, et notre ordinateur est cette lampe.»

(les 2 frères ont réussi !) à calculer, les premiers, un milliard de décimales en 1989 puis 4 en 1994 battus depuis 1995 par Kanada avec 6,5 milliards de chiffres !)



π se dissimule dans ce nid d'étoiles, dont la distribution est aléatoire : si l'on fait correspondre à chaque étoile un couple d'entiers (obtenus à partir de ses coordonnées - hauteur et déclinaison - sur la voute céleste

Dans cette exploration,

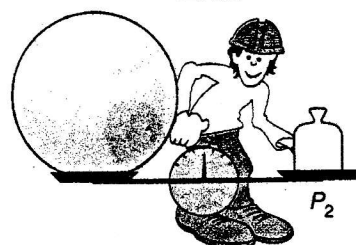
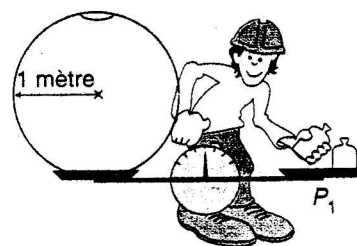
Vous traverserez la géométrie - π n'est-il pas né chez les géomètres grecs ? - puis l'analyse, avec ses formules magiques et ses perles arrachées à l'océan sans limite des mathématiques, l'algèbre des nombres irrationnels et transcendants, la toute nouvelle théorie de la complexité, le hasard avec la théorie des suites aléatoires.

Vous y remplacerez la combinaison de plongée par une machine à calculer, un tableur ou un ordinateur plus puissant.

Vous y rencontrerez aussi quelques fous - obsédés par ces décimales sans fin - et quelques génies - les mêmes parfois - et vous subirez le charme des profondeurs des questions philosophiques et mathématiques et qui se concentrent sur π avec obstination.

Le livre se termine par des approches de π de plus en plus près :

Mesure de π à l'aide d'une sphère, dont le volume est égal à $4\pi r^3/3$. Le personnage pèse un récipient sphérique d'un mètre de rayon avant et après remplissage, divise la différence de masse (exprimée en kilogrammes) par 1000 (masse d'un mètre cube d'eau), puis multiplie le résultat par $3/4$ pour obtenir une valeur expérimentale de π .



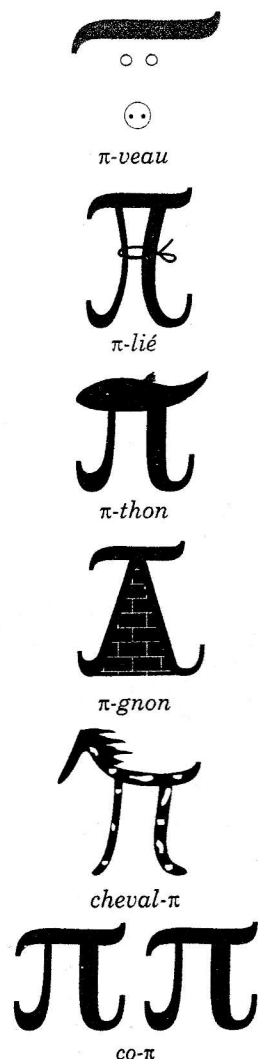
$$\frac{(P_2 - P_1)}{1000} \times \frac{3}{4} = \pi$$

une liste des meilleurs calculs du nombre, des Babyloniens à l'aube du XXI^e siècle,
- une liste des meilleures formules d'approximation,
- des exemples de construction à la règle et au compas (comme celle-ci inspirée des Egyptiens),
- une liste de toutes les séries et autres formules qui mènent à π .

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (\text{Euler} - 1740)$$

Les têtes de chapitre :

- Premières rencontres avec π (comment le définir et le calculer ?)
- Intrigues et amusements autour de π
- Histoire de π au temps de la géométrie
- Histoire de π au temps de l'analyse

La galaxie π 

- Du calcul à la main à l'ordinateur
- Des algorithmes compte-gouttes
- Des mathématiques vivantes
- Le calcul isolé des chiffres de π
- π est-il transcendant ?
- π est-il aléatoire ? (désordre et complexité de π)

Pi : 50 milliards de décimales

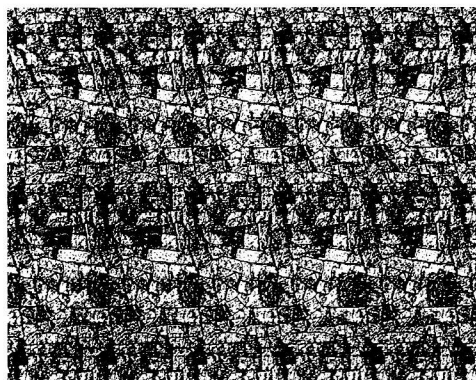
Nouveau record dans le calcul du nombre pi: le Pr Kanada da Yasumasa, de l'Université de Tokyo, vient de porter ce calcul à plus de cinquante milliards de décimales - exactement : 51.539.607.552.

Le précédent record appartenait à deux frères, David et Grégory Chudnovsky, de l'Université Columbia, qui avaient obtenu plus de 48 milliards de décimales.

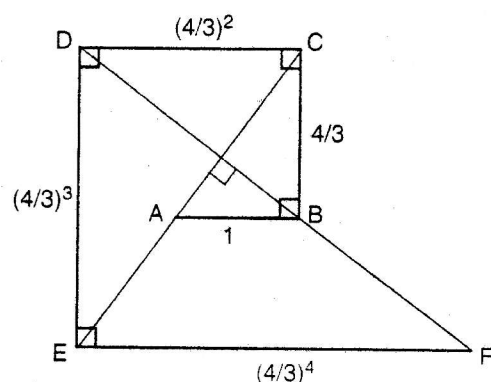
Le Pr Kanada a obtenu ce résultat en 29 heures, en juin, à l'aide d'un ordinateur Hitachi composé de 1.024 calculateurs. Rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre, la connaissance de pi ne cesse d'être affinée : au deuxième millénaire avant notre ère, les Babyloniens lui attribuaient pour valeur 3,125 et les Egyptiens le carré de 16/9e, soit 3,16... Les Grecs, au IIIe. siècle avant notre ère, avancèrent l'utilisation de 22/7e (soit 3,14285), chiffre plus proche de la valeur exacte de pi (3,14159...).

L'arrivée d'ordinateurs puissants a permis de donner régulièrement à pi un nombre accru de décimales : le millionième chiffre après la virgule a été obtenu en 1973, le deux-millionième en 1981 et le dix-millionième en 1983. Mais pi est un nombre transcendant ; il ne cesse donc de se dérober.

Corse-Matin - Samedi 26 juillet 1997

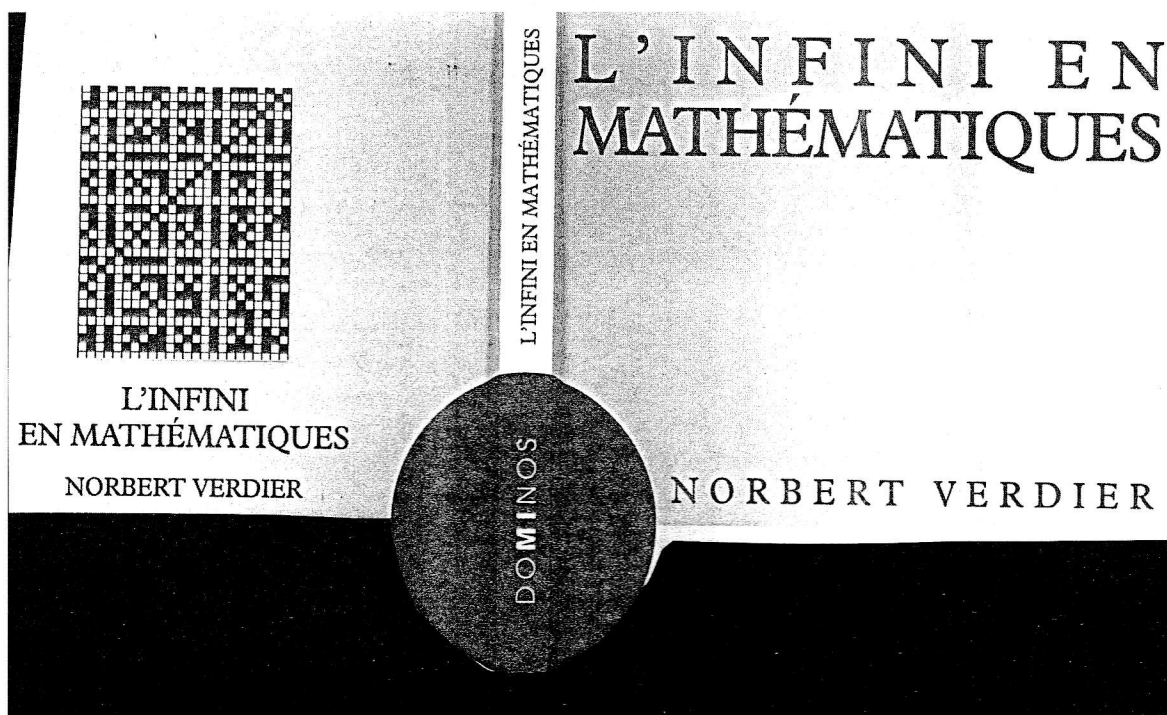


CONSTRUCTION 2 (à partir de l'approximation des Égyptiens) :



$$\begin{aligned}
 AB &= 1 \\
 BC &= 4/3 \\
 CD &= (4/3)^2 \\
 DE &= (4/3)^3 \\
 EF &= (4/3)^4 = 3,16049 \approx \pi \\
 \text{Erreur} &: 0,6 \%
 \end{aligned}$$

Selon la façon dont on le regarde, π apparaît aléatoire ou non. Avec ce stéréogramme dû à l'artiste japonais Jun Oi, on voit apparaître de l'ordre : une sphère, une pyramide et un cône.



**L'infini mathématique
Norbert Verdier.**

Dominos Flammarion, 1997

Nous reviendrons dans un prochain Plot sur l'infini. Norbert Verdier, enseignant-chercheur de mathématiques à Paris-Orsay, vous propose de parcourir son histoire et, ainsi, de réfléchir à la philosophie des mathématiques, de quoi compléter votre propre réflexion sur cette fin de siècle (cf maths fin de siècle, bis-répétita).

Mathématiciens, philosophes et enseignants luttent depuis les Grecs avec le concept d'infini, concept qui apparaît comme élément à la fois perturbateur et moteur de leurs recherches. Tantôt ils envisagent l'infini par rapport au fini, tantôt ils essaient de l'appréhender directement.

A travers ce petit livre de poche, fort agréable à lire et illustré à bon escient d'images originales, on retrouve des thèmes connus présentés de façon nouvelle et percutante.

Vous y trouverez des éléments de réponse ou plutôt de questionnement pour vos élèves comme :

- une infinité d'infinis,
- $(\text{card } [0, 1])^2 = \text{card } [0, 1]$

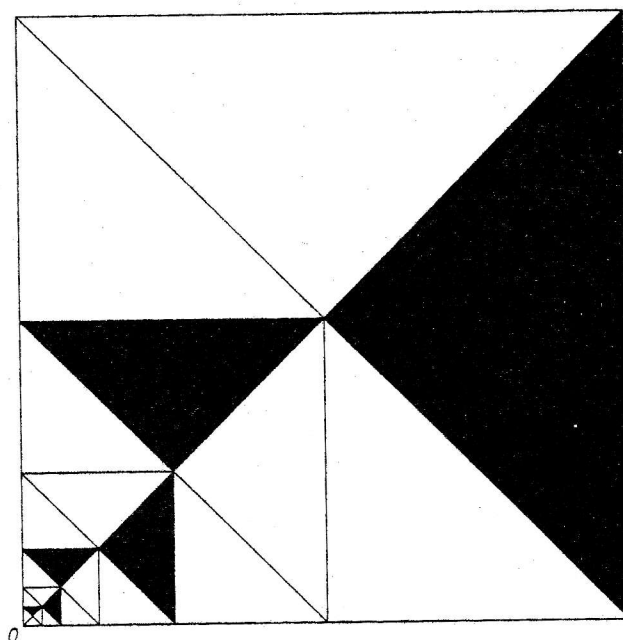
Vous y trouverez aussi la confrontation de la précision mathématique, de l'infini mathématique et du monde de l'ordinateur, monde fini par définition même si ce fini s'étend, avec la machine, à l'infini. Le rapport entre ordinateur et mathématique n'est-il pas aussi le rapport entre fini et infini, pensée et calcul ?

L'auteur aborde ainsi l'an 2000 qui sera l'année mondiale des mathématiques et questionne le lecteur sur ce que sera le 3ème millénaire ... des mathématiques (une autre façon de revenir au débat du Palais de la découverte).

En guise de conclusion, l'auteur pose une question "simple" : «les mathématiques : découvertes ou inventions ?». Un élément de réponse qui illustre combien le propos : «il est courant d'être en désaccord sur des questions politiques (cf débat du Palais), philosophiques ou religieuses. En mathématiques, il en est de même».

Sommaire :

- la notion mathématique de l'infini
- l'infini chez les Grecs
- vers une théorie mathématique de l'infiniment petit
- une théorie mathématique de l'infini
- la dualité fini-infini
- l'infini existe-t-il ?
- peut-on éviter la question de l'infini ?
- le continu en questions
- l'infini et les machines



0, est le passage à la limite, une extrapolation

Prochains numéros du PLOT

Octobre 97

n°80 : Les ateliers des Journées Nationales
de l'Apmep à Albi

décembre 97

n°81 : numéro spécial
Astronomie, des instruments,
des mesures, des calculs.
du cours moyen aux terminales

**Du fer dans les
épinards
sous la direction de
J.-F. Bouvet.**
Seuil, 1997

Pour finir et vous divertir tout en réfléchissant sur la notion de "vérité", voici un recueil d'idées reçues où chacun trouvera de quoi alimenter ses certitudes et son esprit "cartésien".

Comme le dit, dans ce livre, Didier Nordon, "«avoir l'esprit cartésien» a un sens on ne peut plus réducteur (cf débat du Palais-ndlr) ; la pensée de Descartes est plus complexe que ne croient ceux qui l'assimilent à une espèce de gros bon sens raisonnable... La pensée d'un auteur est toujours plus complexe que l'image de cet auteur dans le grand public."

Je vous citerai 3 "idées reçues" développées dans ce livre :

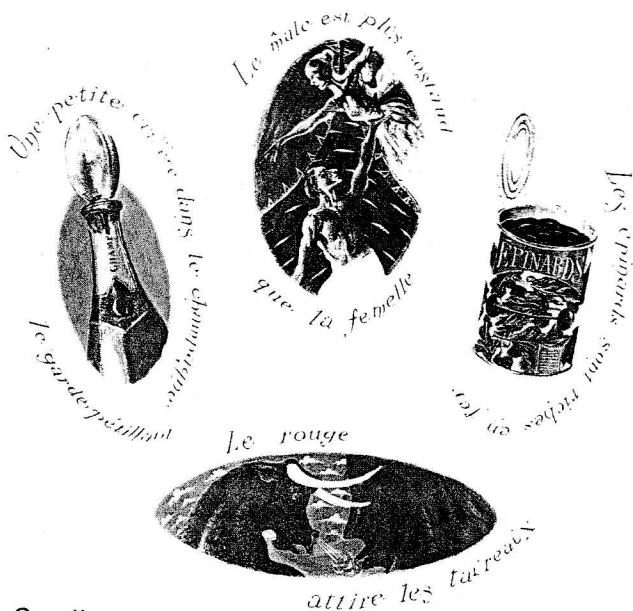
- les enseignants dépriment (mais non, mais non, pas plus que d'autres)
- l'homme et la femme ont le même cerveau (mais non, mais non !)
- c'est mathématique ! (ah, ça c'est sûr !!)
- $X + X = \text{femelle}$, $X + Y = \text{mâle}$ (mais non, mais non !!!)

science ouverte

Sous la direction de
Jean-François Bouvet

Du fer dans les épinards

ET AUTRES IDÉES REÇUES



Seuil

