

PLOT



N° 81

Maths en Action

Le Plot a 25 ans !

Directrice de publication

Marie-Laure Darche-Giorgi

Responsable de rédaction

Michel Darche

Secrétariat

Madeleine Schlienger

Comité de Rédaction

Jacques Borowczyk

Daniel Boutté

Michel Clinard

Gérard Chauvat

Roger Crépin

Luce Dossat

Georges Le Nezet

Serge Parpay

Michel Soufflet

Raymond Torrent

Abonnements

PLOT APMEP

Université, BP 6759

45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement

150 FF pour 4 numéros par an

Adhérent APMEP : 130 F

Abonnement étranger : 150 F
+ tarif avion

Photocomposition et maquette

i.c.e.- Limoges

Impression

Fabrègue - St-Yrieix

Editeur

Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers, Limoges,
Orléans - Tours, Nantes, Rennes,
Rouen, Toulouse, Brest, Caen,
Clermont-Ferrand et La Réunion

Diffusion

Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

Publié avec le concours du Ministère
de la Coopération et de la
Francophonie

1 - Maths et modélisation (Suite et fin)	2
rapport du CNRS-1997	
2 - Les prix de la SME (prix européens)	12
3 - Apprendre à penser	15
Soriano Ayala (Almería-Espagne)	
4 - Pour un service civil des maths ?	33
Hélène Desmaret, Bordeaux	
5 - Clins d'œil	35
Marcel Berger (<i>in memoriam</i>)	
6 - T'as pas 100 ... francs ?	40
Claude-Alain Blatti, Lausanne	
7 - T'as pas 100 euros ?	43
Laboratoire d'économétrie de l'X	
8 - Les numéros 74 à 81 du Plot	46
9 - Bulletin de commande et d'abonnement	47

EDITORIAL

Dernier numéro de l'année 1997. Pour ceux qui ne se sont pas encore réabonnés, c'est le moment !!! Ce numéro représente 25 ans de rédaction et d'évolution du journal par l'équipe du PLOT.

1998, 99 et 2000 seront l'occasion d'aller de l'avant, toujours avec des numéros à thèmes, mais orientés plus fortement collègues et lycées, et surtout vers l'apport de réponses à :

- comment enseigner les mathématiques après l'an 2000 ?
- comment accroître l'apprentissage des maths par l'action ?

Multiplier les propositions d'activités qui donnent place à l'esprit inductif des enfants. Les mathématiques, comme les autres sciences expérimentales, doivent permettre à l'enfant de développer des initiatives, les tester, les valider.

Quoiqu'en pensent notre ministre et nos prix Nobels, la main à la pâte doit pouvoir se développer aussi en mathématique et cela jusqu'au baccalauréat.

Mathématiques et outils de modélisation

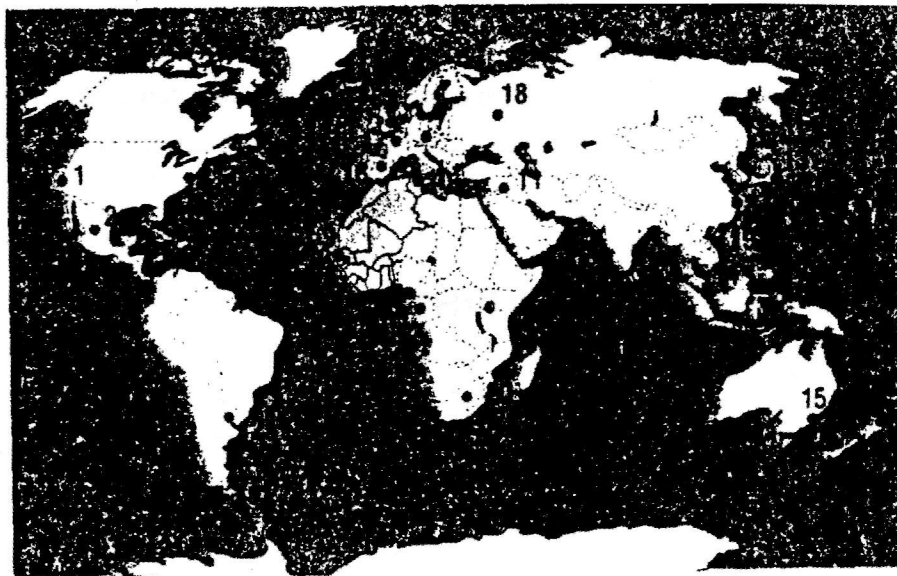
Rapport CNRS - 1997

Suite et fin de l'article paru dans le PLOT 79

Tous les quatre ans, le Comité National de la Recherche Scientifique du CNRS - Centre National de la Recherche Scientifique - publie son rapport de conjoncture. Cette radioscopie de la recherche permet de connaître l'état des lieux de chaque grand domaine de la recherche. Le PLOT a déjà publié dans ses numéros les rapports de conjoncture 1989 et 1993 concernant les mathématiques.

Voici la fin de la radioscopie 1997.

La communauté des mathématiciens est vaste et très diverse, mais aussi très unitaire car ses membres ont une démarche commune fondée sur l'élaboration de concepts à valeur universelle et sur l'exigence de démonstrations. Issues d'une longue tradition intellectuelle, les mathématiques construisent un langage et des



2

1 San Francisco	6 Honolulu	11 Damas	16 Madrid
2 Mexico	7 Prague	12 Buenos Aires	17 Paris
3 Londres	8 Shanghai	13 Tokyo	18 Moscou
4 New York	9 Dakar	14 Singapour	19 Séoul
5 Libreville	10 Tunis	15 Sydney	20 Johannesburg

Le tour du monde

Comment trouver un trajet permettant de passer par les vingt villes représentées ? facile !

Il n'y a qu'à étudier tous les parcours possibles et choisir celui qui correspond à une distance minimale !

Mais cette méthode n'est pas réalisable pratiquement.

Pour résoudre ces problèmes, les mathématiciens cherchent à mettre au point des procédés automatiques (des algorithmes) qui minimisent le nombre et le temps de calcul.

outils que la plupart des autres disciplines scientifiques adoptent à plus ou moins long terme pour traiter leurs propres modèles.

Exemples d'interactions externes

1 - Logique et informatique

Sous l'influence de l'informatique, on a assisté, depuis une quinzaine d'années, à un renouveau des méthodes et des problèmes de la logique. Ainsi, les questions de sécurité logicielle qui demandent des preuves de spécifications ont-elles amené le développement théorique et pratique sous la forme de prototypes semi-industriels, de langages de type fonctionnel comme les lambda-calculs typés, basés sur la logique intuitionniste.

Le regain d'intérêt pour cette logique a induit de nouveaux développements théoriques, tels la logique linéaire, apparue en 1986, et qui ne manipule plus des vérités éternelles mais des réalités contingentes, où la notion de coût est essentielle. Cette théorie privilégie la notion d'interaction entre unités, d'où l'intérêt et les espoirs qu'elle suscite dans le monde de l'informatique, en particulier en direction de la programmation parallèle en manque de substrat théorique.

Bien représentée au CNRS, la logique n'est présente en France que dans très peu d'universités, alors que ses applications se font de plus en plus nombreuses.

2 - Algèbre, géométrie et informatique

Il s'agit d'étudier les grands problèmes de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes du point de vue de l'effectivité, de la complexité et de l'efficacité. C'est un retour à la tradition historique calculatoire de l'algèbre, qui a été oubliée pendant une bonne partie du vingtième siècle et revient en force avec l'essor de l'informatique comme outil pratique et discipline scientifique. L'informatique théorique permet de mieux analyser la nature profonde des algorithmes, tandis que l'informatique pratique permet de tester les méthodes sur des exemples et de se tourner vers les applications.

Le calcul formel est bien implanté en France et il est utilisé dans d'autres domaines, l'astronomie par exemple. Le soutien du CNRS, qui a permis la mise au point d'un centre de ressources efficace, joue un rôle important, et il doit être maintenu.

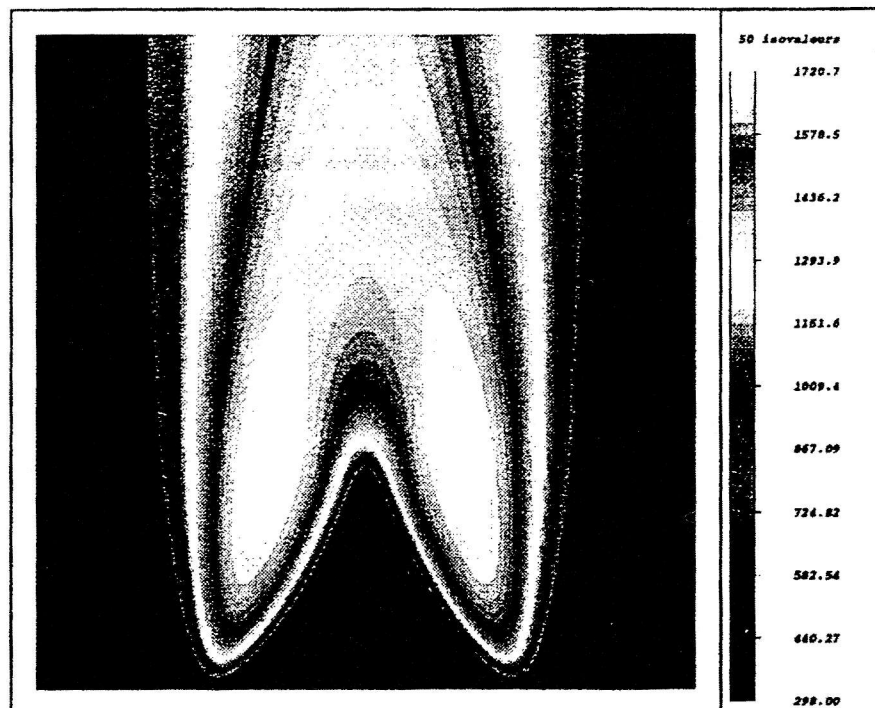
3 - Géométrie et physique

La géométrie différentielle a été dès son origine profondément liée à la physique et les allers-retours conceptuels sont nombreux et féconds. Les noms d'objets géométriques usuels le montrent bien : métriques d'Einstein, opérateurs de Dirac, spineurs, etc. Outre la symétrie miroir déjà évoquée dans un contexte algébrique, de nombreux progrès récents, centrés sur la géométrie, concernent en fait bien d'autres domaines. Les invariants de Seiberg et Witten, utilisant une équation de Dirac particulaire, ont permis des avancées spectaculaires dans la compréhension de la topologie de dimension 4 et en topologie symplectique, amplifiant des résultats de la théorie de Donaldson qui, elle, s'appuyait sur les théories de jauge non abéliennes.

Parmi les sujets où les idées des physiciens ont permis de progresser, on peut citer aussi les méthodes variationnelles d'EDP en analyse globale, en particulier sur les relations entre courbure et topologie et la topologie symplectique, dont beaucoup de propriétés sont encore mystérieuses, la géométrie kählérienne et ses liens avec la théorie quantique des champs, la géométrie différentielle non-commutative et les interprétations physiques qu'en propose Alain Connes, l'usage des spineurs en géométrie et la supersymétrie, la géométrie sous-riemannienne et son usage en théorie du contrôle, les approches géométriques à la théorie des nombres, la géométrie à courbure négative et ses liens avec la théorie ergodique et le chaos quantique, etc.

Devant ce foisonnement un peu étourdissant, le fait que la France ait un grand nombre de mathématiciens de talent, travaillant à seulement quelques heures de train les uns des autres, est un atout considérable qui doit lui permettre de continuer d'être à la pointe de la recherche sur des points fondamentaux de la compréhension du monde physique.

Température T pour
une flamme pauvre
hydrogène-air de type
Bunsen.



4 - Modélisation

Les modèles mathématiques, discrets ou continus, déterministes ou stochastiques, prennent en compte des phénomènes non linéaires de plus en plus complexes, dans des géométries multidimensionnelles. Ils s'appliquent à de nouveaux domaines scientifiques (environnement, réseau de neurones, etc.), à des problèmes industriels représentant des enjeux économiques, voire stratégiques. La puissance des ordinateurs actuels, notamment parallèles, permet non seulement la simulation numérique de phénomènes connus mais aussi de véritables "expérimentations numériques", donnant en retour une évaluation des hiérarchies de modèles en confrontation à la situation expérimentale réelle.

La validation est une phase cruciale, et demande au préalable une étude théorique incontournable des phénomènes critiques qui peuvent se produire dans les modèles. A la base, on trouve la théorie des bifurcations et celle des systèmes dynamiques. Toutefois, les problèmes posés par les physiciens, chimistes, biologistes... sont le plus souvent extrêmement complexes et nécessitent le recours à de nombreuses branches des mathématiques: équations aux dérivées partielles, méthodes asymptotiques et homogénéisation, singularités, méthodes géométriques, frontières libres, groupes de Lie et leurs représentations,

probabilités, etc. La démarche du mathématicien modélisateur couvre ainsi tout le spectre, de l'analyse du système jusqu'au code de calcul.

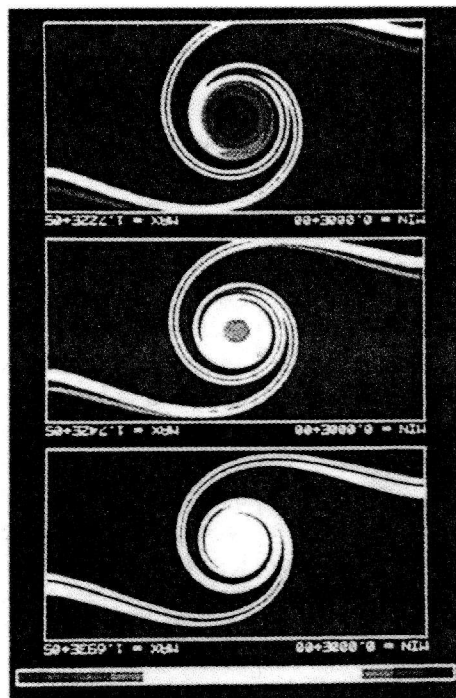
Voici une liste, non limitative, des domaines où la modélisation est en plein essor :

Mécanique des fluides

Les équations de la mécanique des fluides sont depuis longtemps l'objet de simulations numériques : actuellement la création d'un nouvel avion repose majoritairement sur des expérimentations numériques "en taille réelle". Bien qu'étudiées depuis longtemps, les instabilités hydrodynamiques, transition vers la turbulence et chaos, ou ondes de surface par exemple, sont encore largement incomprises. De grands efforts sont en cours concernant les fluides non newtoniens, le vaste domaine de la combustion, à l'interface entre l'hydrodynamique et la chimie, le couplage fluide-structure.

Nouveaux matériaux

La modélisation ne se limite plus aux plaques, elle s'applique actuellement aux nouveaux matériaux parmi lesquels ceux dits intelligents (à mémoire) et à l'optimisation de forme sous contraintes technologiques (Conception Assistée par Ordinateur).



Configurations d'allumage dans un tourbillon. L'allumage apparaît dans les bras du tourbillon et dans le noyau de réactifs prémélangés.

Électromagnétisme

L'évolution récente de la technique de détection par les radars conduit à de nouveaux problèmes liés à la furtivité, soit par des méthodes actives de type antennes, soit par l'utilisation de nouveaux matériaux. Ces problèmes requièrent la modélisation et la simulation numérique précise des ondes électromagnétiques.

Interaction laser-matière

La construction de lasers de haute puissance laisse entrevoir la possibilité de l'étude mathématique d'un domaine de la physique inexploré jusqu'alors.

Environnement

Cette rubrique regroupe des thèmes en pleine évolution, en climatologie, météorologie, géologie, glaciologie, systèmes écologiques, etc. La mécanique des fluides géophysiques dans des milieux souvent aléatoires fait intervenir des échelles d'espaces et de temps considérables. Il est donc indispensable d'élaborer des modèles simplifiés globaux, par exemple pour les interactions océan-atmosphère ou la circulation de l'air en milieu urbain. Les techniques à cheval sur les probabilités et le calcul scientifique sont encore trop peu développées en France.

Mathématiques du vivant

Il s'agit là d'une branche des mathématiques appliquées, nouvelle en France, sur laquelle plusieurs groupes commencent à travailler. Citons, parmi les recherches en cours, les problèmes de propagation d'épidémies, le séquençage de génomes, les écoulements sanguins, la morphologie du cœur. Des collaborations entre biologistes, médecins et mathématiciens devraient être encouragées.

Réseaux de neurones

Les problèmes posés par les réseaux de neurones et la vision artificielle sont étudiés par des équipes au double profil mathématique et informatique, avec de multiples interactions.

5 - Mathématiques et économie

Parmi les nombreuses interventions des mathématiques en économie, l'exemple des mathématiques financières montre bien l'explosion des besoins. En effet, avec l'ouverture des marchés organisés en France à la suite des États-Unis et de la Grande-Bretagne, s'est développée une activité financière dont les enjeux sont considérables et qui rapproche la banque de l'assurance. Il y a dans ce domaine un grand

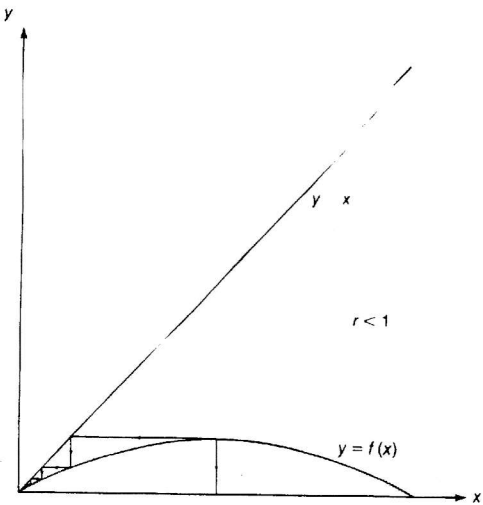
besoin de modèles, d'ingénieurs mathématiciens capables de faire tourner des calculs en temps réel, de nombreuses questions de recherche et de développement.

L'objet d'étude lui-même est abstrait, l'exemple le plus simple en est la couverture des produits dérivés. Il n'est pas étonnant que les modèles soient assez sophistiqués. Ils font intervenir, le plus souvent simultanément, les problèmes inverses en EDP, les équations différentielles stochastiques, les simulations statistiques, et renvoient à de nombreuses questions théoriques de ces domaines.

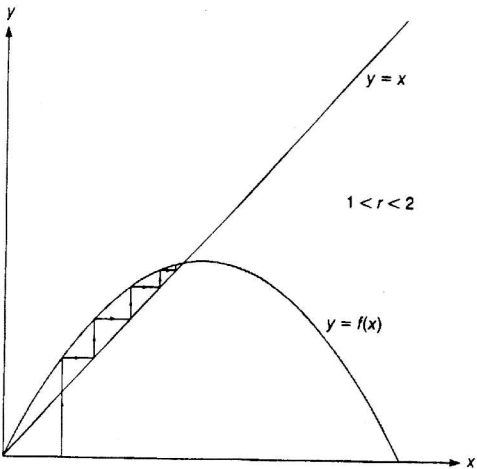
Les banques et les assurances devraient jouer leur rôle d'industriels en finançant une recherche appliquée de qualité qui pourrait utiliser la richesse du niveau de formation mathématique en France.

La situation française et le contexte international

La situation des mathématiques françaises est très bonne. Elle est excellente au niveau scientifique : en effet, rares sont les secteurs des mathématiques non représentés en France, et dans certains notre pays a une bonne avance. Cela est dû en partie à la place importante que les mathématiques occupent dans l'enseignement français. Au niveau matériel, la situation est aussi relativement bonne dans l'ensemble. L'existence du CNRS est un atout d'une importance incomparable pour le maintien au plus haut niveau de la recherche mathématique. Il est primordial de préserver ces



(a)



(b)

Itération correspondant à la suite logistique à l'aide des deux courbes $y = rx(1 - x)$ et $y = x$. On choisit une valeur d'entrée x_1 ; la valeur de sortie est obtenue en traçant à partir de là une droite verticale jusqu'à l'intersection avec la courbe $y = rx(1 - x)$. On recommence avec cette nouvelle valeur x_2 . On répète le processus indéfiniment.

deux atouts, le CNRS et la qualité de l'enseignement, et il convient de ne lâcher ni sur l'un, ni sur l'autre.

Il est également important de s'intéresser à la situation dans les autres pays et de défendre la science chez nos partenaires. Un événement majeur est l'effondrement survenu dans les pays de l'Est, et notamment en Russie. Cet énorme bassin de connaissances mathématiques et de savoir-faire s'est ouvert largement aux contacts et, en même temps, il a été déstabilisé par un arrêt brutal des moyens matériels mis à disposition. Il en a résulté un grand remue-ménage des idées et des hommes dans presque tous les champs des mathématiques. La France en a largement bénéficié grâce à d'excellentes initiatives comme les postes d'accueil CNRS ou les postes PAST. Une des conséquences de ces bouleversements est que, désormais, tous les mathématiciens travaillent dans le même monde. Il n'existe plus cet au-delà où des théories inconnues étaient en mouvement - on en a vu plusieurs émerger récemment -, et où certains travaux méprisés à tort pouvaient trouver un écho favorable : le défrichage du travail de De Branges par l'école de Leningrad en est un exemple.

Il semble qu'aux Etats-Unis la situation soit moins bonne, avec moins d'emplois, moins de moyens, et un fléchissement déjà perceptible dans certains domaines. Il est indéniable que le nombre de colloques importants y a diminué. Il faut espérer que cette période défavorable ne durera pas et que nos collègues américains retrouveront rapidement de meilleures conditions de recherche.

En Europe, on assiste à une coopération renforcée entre les pays. Il s'y déroule de plus en plus fréquemment des colloques importants, de sorte que les mathématiciens français rencontrent leurs collègues allemands, britanniques, suisses, italiens ou autres ailleurs que dans une université américaine. Les centres de rencontres européens (Oberwolfach, CIRM à Marseille-Luminy) se sont imposés comme des lieux privilégiés pour organiser des colloques mathématiques et sont donc très recherchés. Des instituts accueillant un grand nombre de visiteurs ont été créés dans la plupart des pays du monde. Ceux qui sont situés en Europe (Institut Max Planck à

Bonn, Institut Isaac Newton à Cambridge, ICTP à Trieste, Institut Mittag-Leffler en Suède, Institut Henri Poincaré à Paris et Institut des Hautes Etudes Scientifiques à Bures-sur-Yvette, etc.) ont un grand rayonnement. L'augmentation des crédits européens pour la recherche joue aussi un rôle fondamental dans cette évolution. Cette situation très positive n'exclut pas quelques dysfonctionnements au niveau des programmes de la Commission Européenne et des erreurs de répartition, auxquels il est urgent de remédier en instaurant des structures d'administration de la recherche mieux adaptées aux besoins de chaque discipline.

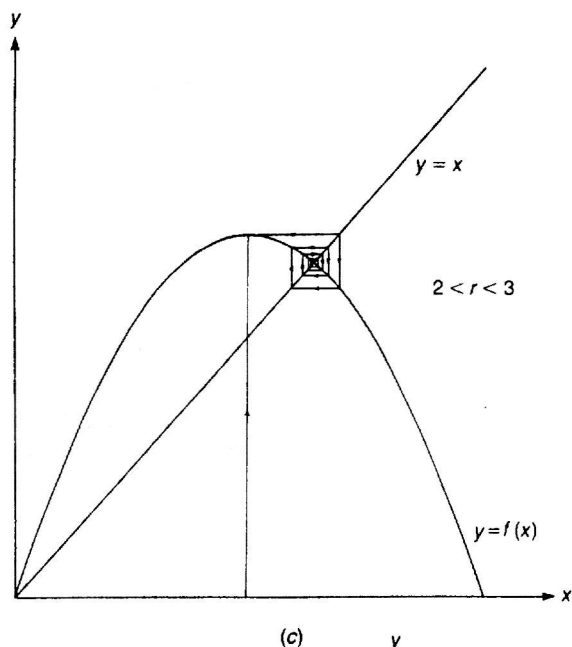
Dans les pays en développement, la situation n'a guère évolué. Parfois, elle s'est même aggravée, par exemple en Algérie. Il faut pouvoir accueillir des étudiants et des chercheurs de ces pays dans de bonnes conditions. Mais il faut aussi préserver les structures de formation qui y existent et multiplier les initiatives de coopération, telles celles mises en œuvre par le CIMPA. Dans le sud-est asiatique, certains pays atteignent un niveau de développement économique élevé, et l'émergence d'universités fortes est à prévoir. Il est important que les mathématiques y prennent leur place, et les mathématiciens français doivent s'y employer.

Vœux sur les moyens et les hommes

Les mathématiques, comme toute science, ont un coût, et les considérations socio-économiques ont leur importance. Les désastres qui frappent la recherche dans certains pays appellent à la vigilance.

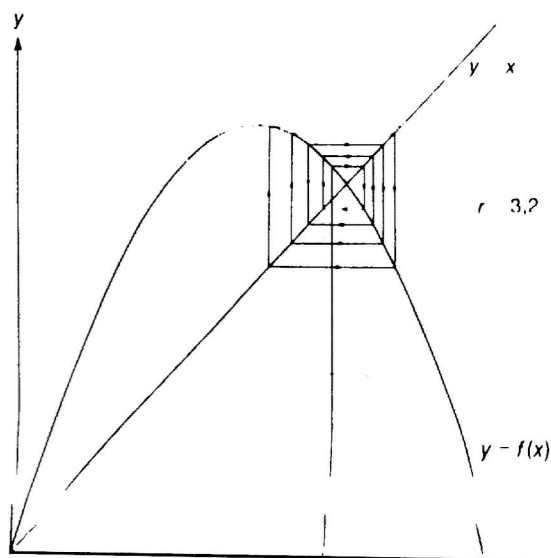
1 - Renouveau du potentiel humain

La recherche mathématique en France est très majoritairement universitaire, mais le CNRS, avec seulement un dixième des mathématiciens, occupe une place de premier plan et aide à maintenir l'excellence. Il existe un flux sortant vers l'université, cinq à dix chargés de recherche devenant professeurs chaque année. Le nombre de recrutements doit compenser ces sorties, renouveler les générations et



(c)

Les illustrations de c à f montrent des situations correspondant à diverses valeurs du gain r . On voit que l'itération est très sensible aux variations de la valeur de r .



(d)

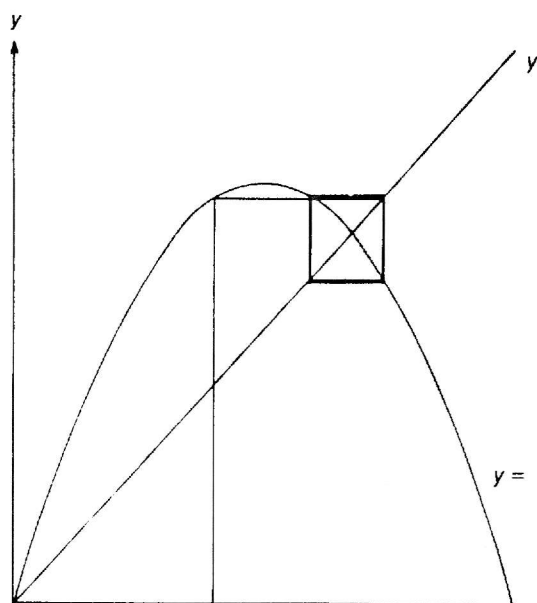
commencer à lisser le choix prévisible des départs massifs à la retraite d'enseignants-chercheurs dans la période 2000-2010. Le fléchage volontariste "deux tiers en province, un tiers à Paris" pour les affectations des entrants a permis une consolidation très positive des équipes de province. Toutefois, il conduit au vieillissement des équipes parisiennes. Un fléchage plus précis des lieux d'affectation ou des thèmes de recherche n'est pas très adapté aux mathématiques dans la mesure où le CNRS recrute des chercheurs a priori capables de s'adapter et d'être mobiles.

L'âge moyen de promotion ou d'accès au grade de directeur de recherche a tendance à augmenter, ce qui est logique vu le nombre d'entrants qui est très largement supérieur au nombre de promus. Les

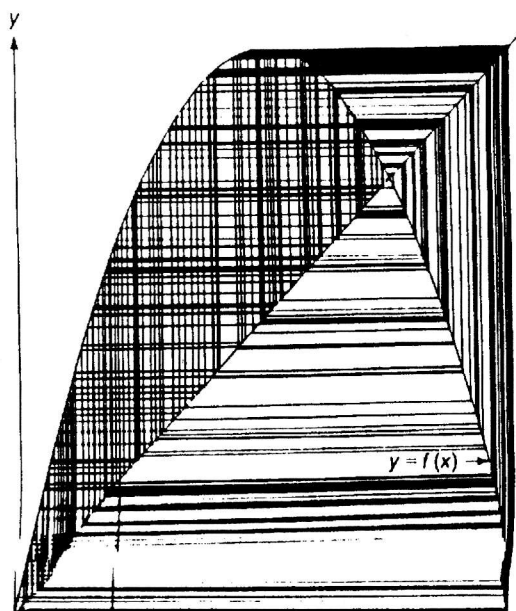
universitaires, qui aimeraient profiter de détachements au CNRS pour avoir plus de temps à consacrer à la recherche, tout comme les chargés de recherche, qui ont un grand retard de carrière par rapport à leurs collègues enseignants-chercheurs, vivent difficilement cette situation qui n'est pas saine à long terme. En mathématiques, la recherche se développe par une symbiose entre le CNRS et l'Université. C'est une très bonne chose, et il faudrait lever certains obstacles administratifs pour favoriser encore plus les échanges entre ces institutions.

2 - De grands équipements en mathématiques ?

Jusqu'à ces dernières années, les seuls grands équipements en mathéma-



(e)



(f)

tiques étaient les centres de rencontres et les bibliothèques. Bien sûr, celles-ci ont encore une importance fondamentale, mais des évolutions sont en cours. Leur informatisation a besoin d'être généralisée, ainsi que le développement de bases de données. La transmission informatique de documents se développe de plus en plus. On voit apparaître des revues électroniques consultables par ordinateur. Certains mathématiciens se contentent désormais de mettre leurs pré-publications sur leur "page-maison" dans Internet et de diffuser une note brève par courrier électronique à leurs correspondants du monde entier.

Le développement de réseaux de communication efficaces est donc ressenti comme une nécessité de plus en plus cru-

ciale. Ce problème ne date pas d'hier, mais comment ces réseaux seront-ils financés ?

D'autres besoins d'un type nouveau sont aussi apparus. L'accroissement de la complexité des problèmes étudiés nécessite le développement d'ordinateurs très puissants. En particulier, les machines parallèles et les stations de travail en grappe promettent pour l'avenir un énorme essor du potentiel de calcul, pour peu que les algorithmes nécessaires à leur utilisation soient disponibles. Il faut encourager le développement de gros moyens de calcul internes aux laboratoires des Universités et du CNRS, pour qu'un chercheur désirant justifier ses résultats théoriques ou d'analyse numérique n'ait plus à faire appel à des "calculateurs" dans le privé ou à l'étranger. D'autre part, il faut

absolument veiller à la formation de chercheurs capables d'écrire ou de superviser l'écriture de grands programmes de calcul, notamment sur les machines parallèles : ces logiciels doivent pouvoir être écrits en langages modernes et compatibles avec plusieurs types de machines. Néanmoins, le besoin le plus criant à l'heure actuelle est celui d'ingénieurs informaticiens, indispensables pour la maintenance des réseaux déjà installés dans les laboratoires.

Les mathématiciens sont donc maintenant demandeurs de grands équipements. Des efforts importants ont été faits dans la période récente, mais il est nécessaire de ne pas couper l'élan donné pour que les mathématiques françaises puissent rester dans le peloton de tête.

Conclusion

Les interactions

On peut constater dans la période récente une nette augmentation des interactions, à la fois entre les différentes branches des mathématiques, mais aussi entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques. De nombreux résultats exigent des connaissances profondes dans plusieurs domaines fondamentaux. Le cloisonnement entre mathématiciens purs et mathématiciens appliqués est de plus en plus flou, et il est clair que de nombreuses coopérations se mettent en place. D'un autre côté, les mathématiciens ont de plus en plus d'échanges et de collaborations avec leurs collègues des autres disciplines. C'est le cas pour la physique, mais aussi pour l'informatique, la biologie et la chimie.

Enfin, les liens avec l'économie sont aussi en progression. Il est significatif de voir que le congrès international de physique mathématique qui s'est tenu à Paris en 1994 impliquait un groupe exceptionnel de mathématiciens.

Le CNRS est certainement un lieu privilégié pour la mise en place de structures adaptées à des équipes interactives. Cependant, l'évaluation n'est pas toujours facile dans le cas d'actions pluridisciplinaires, et

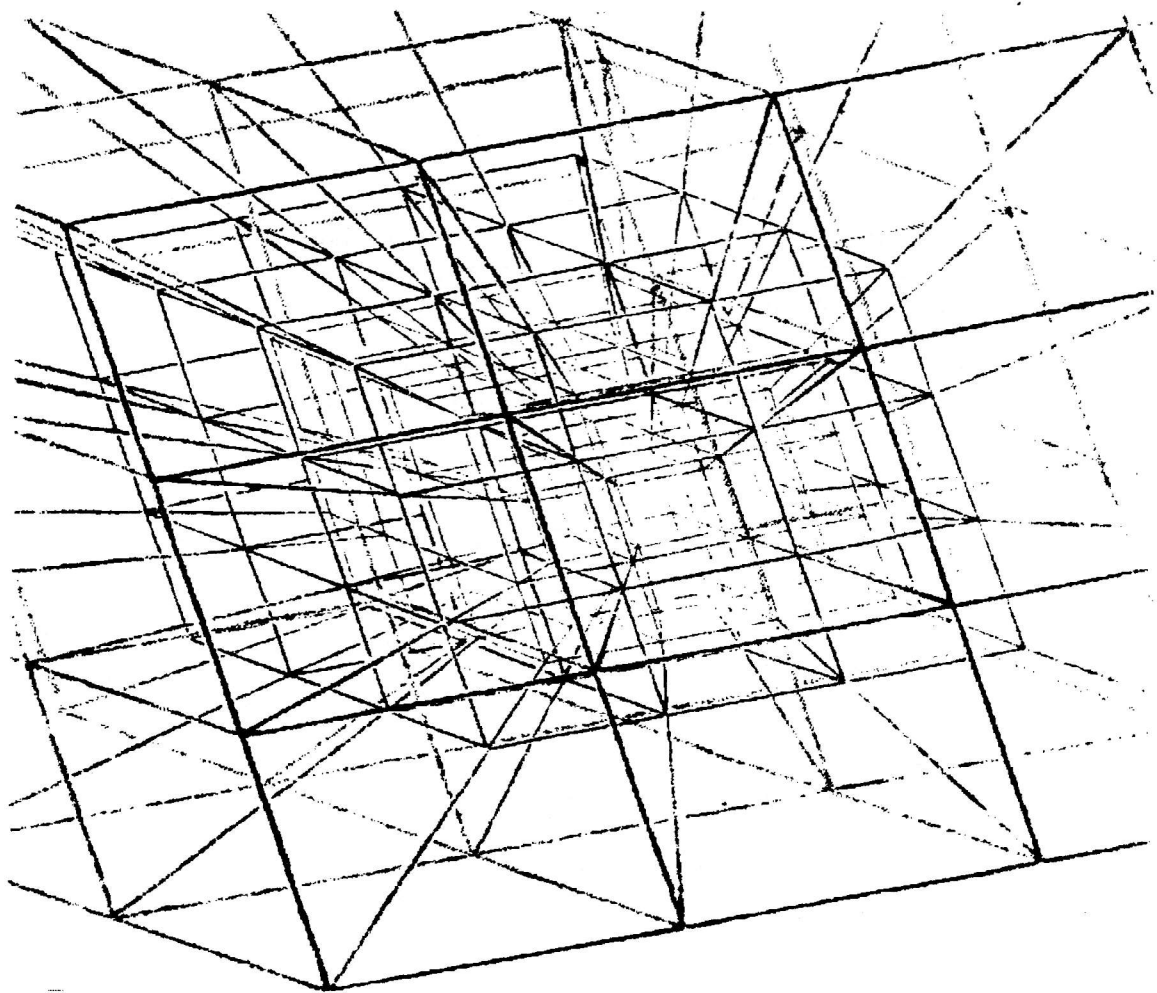
la rigueur de gestion indispensable doit pouvoir être imposée dans un cadre adéquat.

L'avenir des mathématiques

Les mathématiques françaises se portent très bien. Elles continuent de jouer un rôle important. Elles en sont redevables pour une bonne part au CNRS. Toutefois, il convient de comprendre les contingences et les raisons de cette situation et de ne pas se contenter des succès récemment obtenus sur la scène internationale. Les mathématiciens ont fait preuve, depuis quelques années, d'une grande ouverture, bénéfique à bien des égards. Les applications apportent beaucoup, et pas seulement au niveau financier. Mais un équilibre doit être maintenu, et il faut consolider au niveau théorique les avancées venues des applications. Il est remarquable que ce soit la collaboration ouverte entre des mathématiciens théoriciens très curieux et des modélisateurs soucieux de rigueur qui ait permis une avancée significative dans plusieurs domaines, comme la théorie des ondelettes. Cela nous montre avec force qu'il est essentiel de préserver l'unité des mathématiques. Les mathématiques françaises ne doivent pas perdre leur identité en se morcelant, elles doivent garder une structure cohérente. □

Parions que la vitalité des mathématiques permettra de surmonter les difficultés, comme le laisse à penser la phrase suivante d'Edward Witten :

"I do think that, looking at things in the long run, some of the most exciting mysteries we know about in trying to expand our knowledge of fundamental nature law are mathematical".



3 jeunes mathématiciens à l'honneur

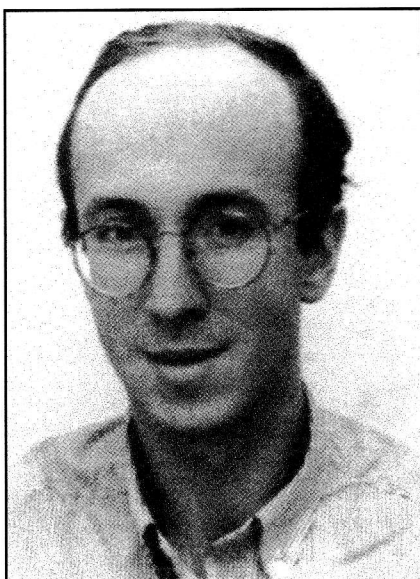
La position des mathématiques françaises est excellente. L'école française est la seconde du monde, quel que soit le critère retenu : nombre de médailles Fields, invitations de conférenciers français aux derniers congrès internationaux, répartition de ceux-ci entre les divers domaines, etc.

En voici un nouvel exemple avec 3 jeunes mathématiciens français (moins de 30 ans) qui viennent de recevoir le Prix 1996 de la Société Mathématique Européenne :

- **Alex Bonnet**, professeur à l'université de Cergy-Pontoise,
- **Loïc Merel**, chargé de recherche CNRS à l'université Pierre et Marie Curie
- **Ricardo Perez-Marco**, chargé de recherche CNRS à l'université de Paris-Sud.

Alexis Bonnet

Né en 1966 à Marseille, il entre à l'Ecole Polytechnique en 1985, soutient sa thèse, dirigée par Henri Berestycki, en 1992. Ingénieur du Corps des Mines, il travaille au Courant Institute à New-York, au CERMICS (laboratoire de recherche commun à l'INRIA et à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) puis à l'ENS. Il est actuellement professeur à l'université de Cergy-Pontoise. Il a reçu notamment le prix Jeune Chercheur de la DRET, le prix Louis Armand de l'Académie des Sciences.



et l'analyse non linéaire

De nombreux phénomènes en physique, chimie, technologie, économie ou gestion conduisent à des problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires ou à des questions d'optimisation. L'analyse appliquée qui concerne ces problèmes s'est considérablement développée, produisant des résultats spectaculaires et rendant possible une intervention des mathématiques dans des domaines où l'on n'aurait guère imaginé jusqu'à peu qu'elles soient pertinentes.

Dans le même temps, ces motivations ont conduit à des théories mathématiques nouvelles.

Les contributions d'Alexis Bonnet concernent la modélisation de la combustion, les problèmes de frontières libres, la modélisation des supraconducteurs et le traitement d'images. Pour la segmentation d'image, c'est à dire pour l'identification de contours, Mumford et Shah ont proposé une approche par minimisation d'une fonctionnelle et ont conjecturé que les minima obtenus avaient une forme bien particulière. Alexis Bonnet a démontré en une grande partie de cette conjecture à partir de méthodes développées pour les problèmes de frontières libres et notamment des travaux de Caffarelli.

Loïc Merel

Né en 1965 à Carhaix-Plouguer, il entre à l'ENS Ulm en 1986, soutient sa thèse dirigée, par J. Oesterlé en 1993. Chargé de recherches CNRS à l'institut de mathématiques de Jussieu depuis 1993, il a été invité en 1995 pour deux ans à Berkeley par le Miller Institute.



Titulaire du Cours Peccot en 1994, il a reçu le prix Saintour du Collège de France en 1994, la médaille de bronze du CNRS en 1995.

et la géométrie arithmétique

Certains problèmes d'arithmétique nécessitent l'emploi de puissants outils algébro-

géométriques forgés par nos prédécesseurs : schémas, cohomologie, variétés abéliennes, courbes modulaires, formes automorphes et ces fascinantes généralisations de la fonction zêta de Riemann que sont les fonctions L. Ces objets interviennent par exemple dans la récente preuve par Wiles du théorème de Fermat.

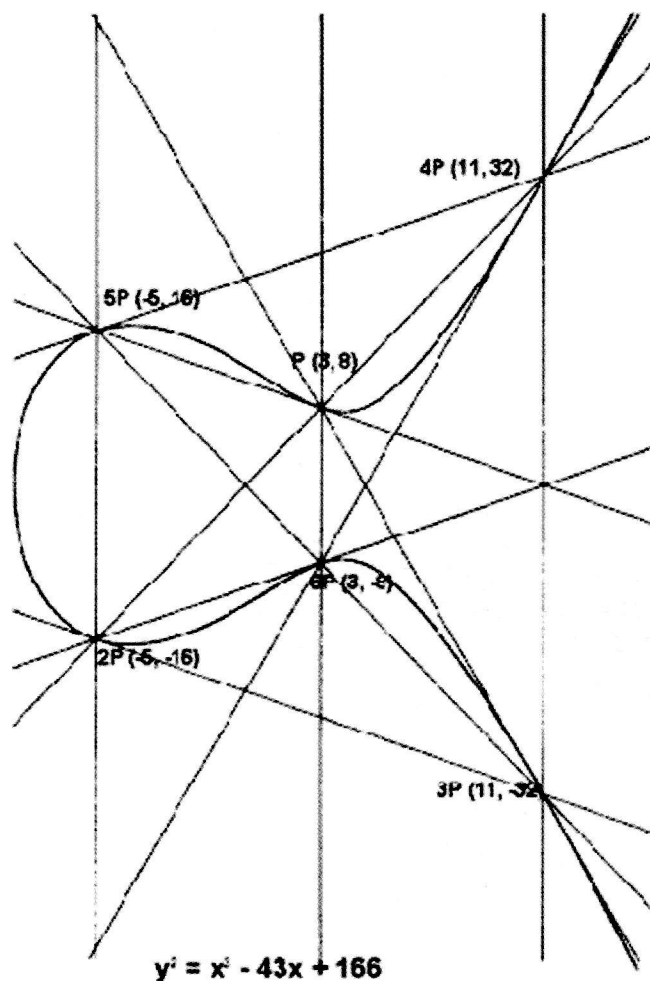
Malgré d'immenses progrès réalisés au 20^e siècle, leurs mystérieuses propriétés sont loin d'être élucidées.

Considérons par exemple sur une courbe elliptique d'équation

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

un point $P = (u, v)$ d'ordre fini n . Le dessin ci-dessus en donne un exemple avec $n = 7$. Lorsque a, b, u, v sont comme dans cet exemple rationnels, on a $n \leq 12$ (Mazur, 1977). Lorsqu'on les suppose seulement algébriques de degré $\leq d$, l'entier n est majoré par une constante qui ne dépend que de d .

Ce théorème démontré par Merel en 1994 résout un problème étudié depuis plus de 30 ans.



$$y^2 = x^3 - 43x + 166$$



**Ricardo
Perez-Marco**

Né en 1967, il fait ses études secondaires au lycée français de Barcelone. Il entre à l'ENS comme élève étranger en 1987. Il soutient sa thèse, dirigée par Jean Christophe Yoccoz en 1990. Il est chargé de recherches au CNRS dans l'équipe de Topologie et Dynamique de Paris-Sud depuis 1991. Titulaire du cours Peccot en 1994, il a reçu le prix IBM jeunes chercheurs en 1993.

et les systèmes dynamiques holomorphes

Quand on itère une fonction holomorphe nulle en 0, la dynamique au voisi-

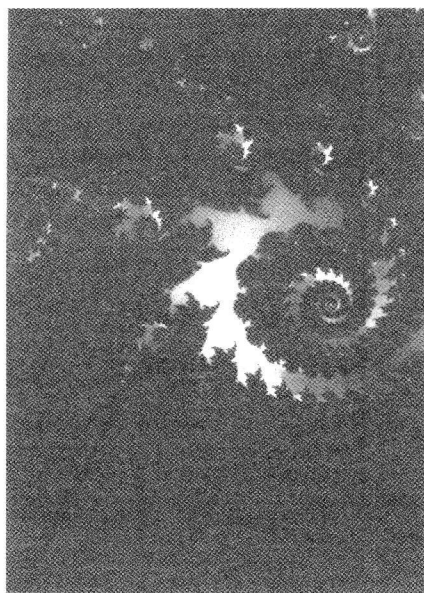
nage de 0 est dominée par l'effet du terme linéaire $z \mapsto a.z$.

Si $|a| < 1$, l'origine attire les points, si $|a| > 1$ elle les repousse.

Lorsque $a = e^{2\pi i p/q}$ avec a rationnel, il se produit une résonance, et l'origine attire la plupart des points voisins (Fatou 1919). Le cas délicat est celui où a est irrationnel. Il a suscité les travaux de Cremer (1928), Siegel (1942), Bruno (1972), Yoccoz (1988) et enfin Perez-Marco (1990 à 1996). Si a est "loin des rationnels" (cas Diophante-Siegel), il n'y a pas de résonance, et les orbites tournent autour de 0 comme s'il n'y avait que le terme linéaire.

S'il y a des rationnels (à dénominateur modéré) très proches de a (cas Liouville-Cremer), il peut s'établir une résonance, qui s'estompe mais une autre prend le relais, et ainsi de suite. Bruno et Yoccoz ont précisé la limite entre le cas Siegel et le cas Cremer.

Ricardo Perez-Marco a élucidé les phénomènes, parfois surprenants, qui se produisent dans le cas Cremer. Il a aussi établi une correspondance entre les fonctions holomorphes et les difféomorphismes du cercle. Cet outil lui a permis de résoudre de nombreuses questions, complétant des travaux de Herman et Yoccoz. $\square$



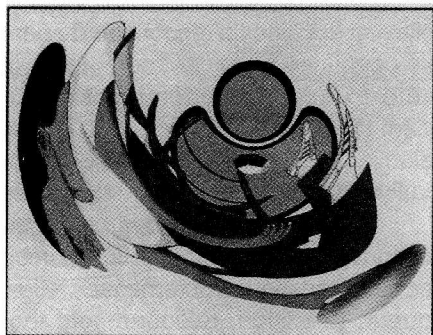
Apprendre à penser à travers les mathématiques (au primaire, cycle 3)

Soriano Ayala, Almería

Pour l'auteur il faut considérer les mathématiques comme un domaine privilégié pour apprendre aux enfants de l'école primaire à penser. L'analyse porte sur la nécessité de changer les pratiques traditionnelles, donner plus de place aux activités basées sur le raisonnement et non sur les résultats. Sur cette base est établi un parallélisme entre la formation des concepts mathématiques et celle de la pensée et du raisonnement. L'auteur décrit comment les mathématiques favorisent l'acquisition des diverses capacités, pour finir avec une révision détaillée et des illustrations pratiques, sur les éléments intellectuels qu'un projet mathématique adéquat permet de développer.

Apprendre à apprendre

Nous nous dirigeons vers une nouvelle façon de voir et de comprendre les mathématiques du premier cycle de l'éducation primaire. *Apprendre à apprendre* et à appliquer les mathématiques doit être un but pour tous les élèves. Pour cela, on doit créer, réinventer ou profiter, dans les écoles, de situations qui leur fassent acquérir une large gamme d'apprentissages qui soient significatifs pour eux. Les élèves doivent



Noël Blotti ©Horizons Maths - 1982

savoir appliquer les connaissances acquises, les mathématiques que l'on enseigne à l'école doivent servir autant pour étudier d'autres matières que pour résoudre des exigences et des problèmes mathématiques que les élèves rencontreront dans le milieu extrascolaire.

Nous avons observé à travers les observations de différentes classes du primaire que, dans de nombreuses classes du premier cycle, les mathématiques couvrent les vides laissés par les activités de "*lecture-écriture*". Ils laissent peu de temps à la réflexion et ils travaillent en utilisant livre-cahier-crayon, donnant surtout de l'importance à la pratique des algorithmes.

Lors du symposium de Valencia en 1987, on considérait nécessaire d'incorporer à la classe les remarquables résultats des investigations éducatives, d'améliorer les techniques enseignantes et de faciliter l'apprentissage de l'élève. Il doit exister une certaine cohérence entre la pratique mathématique et la pratique scolaire, on ne peut pas continuer avec cette dichotomie.

Par exemple, un des traits caractéristiques de la construction des mathématiques se retrouve dans les processus de découverte et d'invention; cependant, dans la majorité des écoles on insiste plus sur la mémorisation de faits, événements et résultats mathématiques. Un autre exemple assez significatif est que le travail de découverte mathématique, bien qu'il possède une importante composante individuelle, est un travail partagé; dans la pratique scolaire, au contraire, le travail en mathématiques se réduit à l'utilisation du livre-crayon-papier, oubliant la discussion d'idées, la communication d'expériences et de pensées encore imprécises entre les élèves et le professeur.

Nous pensons qu'une erreur, jusqu'alors non acceptée comme telle, a consisté à considérer que l'enseignement des mathématiques à n'importe quel niveau,

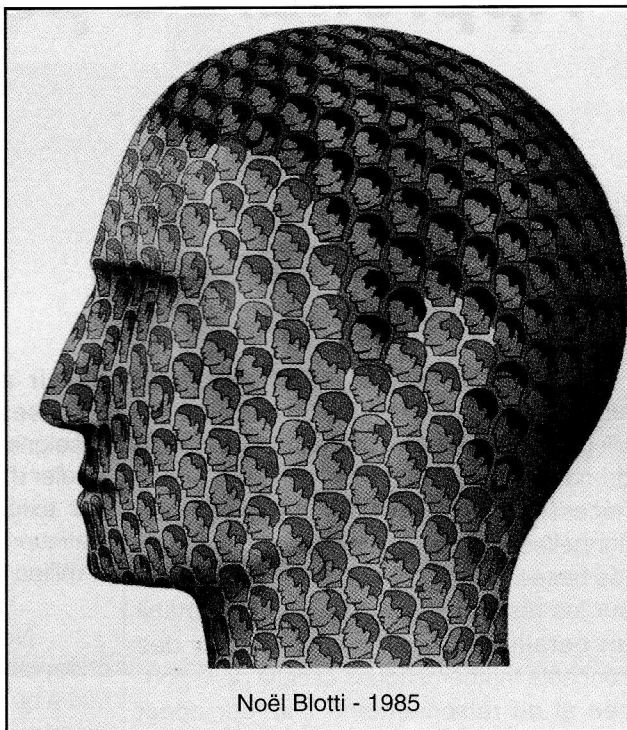
dépendait de ce qu'exigeait le niveau immédiatement supérieur (caractère propédeutique de l'enseignement mathématique), entraînant les professeurs à perdre de vue la signification et l'utilité des concepts qu'ils transmettaient à leurs élèves et des procédés qu'il était nécessaire de développer pour construire la connaissance mathématique.

Comme conséquence de notre investigation dans ce domaine (Soriano, 1986, 1993), nous croyons que les changements dans le curriculum mathématique conduiront, premièrement, vers de possibles restructurations qui reflètent des objectifs plus précis et mieux définis. En second lieu, en accord avec Coll (1990), nous estimons qu'il est indispensable de favoriser parmi les élèves l'acquisition de stratégies cognitives d'exploration, de découverte, de planification et de régulation de la propre activité. Troisièmement, nous considérons que l'enfant peut apprendre à penser à travers cette matière. Enfin, il est nécessaire de valoriser également les différentes limites ou blocages de la connaissance mathématique. Par exemple, la géométrie a été jusqu'à aujourd'hui très oubliée à l'école primaire.

Processus et concepts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Notre observation et notre intervention active dans des situations réelles de classe avec des élèves de premier cycle de primaire nous fait changer la question "Quels concepts doit-on inclure dans les projets curriculaires?" par "Que voulons-nous que les élèves apprennent dans et des mathématiques?".

En tenant compte des théories cognitives sur l'apprentissage des mathématiques (Bruner, 1961, 1996; Wittrock, 1979; Holmes, 1985), les professeurs doivent rendre possible l'apprentissage significatif de



Noël Blotti - 1985

leurs élèves. Quand les enfants ne perçoivent pas significativement l'information, les professeurs doivent obtenir la connexion entre le matériel préalablement appris et le nouveau, en utilisant des méthodes verbales, d'images ou de matériels tridimensionnels qui détachent l'organisation et les détails spécifiques du matériel à étudier. Quand les élèves perçoivent significativement les contenus, les enseignants mettent en œuvre des activités orales et écrites pour s'assurer que les enfants génèrent des relations remarquables en un mode verbal ou d'image. Finalement, quand les élèves, spontanément, génèrent des relations appropriées, le professeur doit diriger son attention sur des concepts du niveau supérieur.

Bruner (1961, 1966) et Wittrock (1979) croient que l'apprentissage est un processus de découverte, les enfants devant découvrir des relations significatives entre les connaissances anciennes et les nouvelles, et assumer la responsabilité par l'activité cognitive. En tenant compte de ce qui a été exposé précédemment et suivant l'ICMI (1986), nous arrivons à la conclusion selon laquelle le meilleur curriculum mathématique est celui basé sur les processus.

En travaillant sur des processus de raisonnement, les mathématiques imposent des caractéristiques déterminées telles que: rigueur, précision, raisonnement logique, équilibre, concision, etc. Dans ce sens, l'éducation mathématique doit consister primordialement à développer chez les garçons

et les filles une pensée et une attitude active et créative. Pour cela, une mathématique ancrée dans des contenus immuables se contredit elle-même.

Si nous considérons les mathématiques comme un ensemble de processus, le rôle de l'école consiste, entre autres, à aider les enfants à mathématiser, c'est-à-dire à favoriser chez l'élève les processus de comparer, classer, ordonner, abstraire, symboliser, généraliser, etc. La tâche consiste à décider quels processus peuvent être plus utiles pour la vie en société de ces enfants et quelles expériences de l'école peuvent les aider à apprendre ces processus. Mais ceux-ci seulement peuvent être enseignés à travers des concepts, ainsi les élèves devront apprendre les plus adéquats afin que les possibilités pour que les processus soient acquis et compris soient les plus appropriées.

Aussi valide que soit le modèle employé, les concepts mathématiques ne s'apprennent pas spontanément: un concept s'acquiert en relation avec d'autres et c'est cette maille de concepts qui a une structure solide. Le fait d'avoir travaillé un thème avec intérêt pendant un temps déterminé ne signifie pas que sa connaissance soit acquise. Une grande partie sera oubliée ou restera dans un coin de la mémoire, et réapparaîtra seulement si elle est traitée en d'autres occasions. Ceci est l'application aux mathématiques des théories des schémas (Anderson, 1977; Norman, 1985) qui postule que la connaissance préalable, organisée en blocs en relation les uns avec les autres, est un facteur décisif dans la réalisation de nouveaux apprentissages.

Selon C.Coll (1990), la structure cognitive des élèves peut se concevoir en des termes de schémas de connaissance. Les différents schémas de connaissance qui accommodent la structure cognitive peuvent se maintenir entre eux par des relations d'extension et de complexité diverse. La nouvelle information mathématique apprise est stockée dans la mémoire moyennant son incorporation et son assimilation à un ou plusieurs schémas; les apprentissages préalables resteraient modifiés par la construction de nouveaux schémas. L'objectif de l'éducation étant la modification de schémas de connaissance en les révisant, en les enrichissant, en les différenciant ... moyennant une construction progressive.

Le caractère hiérarchique des conte-

nus mathématiques oblige à un choix minutieux qui respecte les processus de construction des mathématiques. Cela ne veut pas dire qu'il faille suivre un enseignement linéaire des concepts, mais plutôt un développement cyclique en spirale, avec des aggrandissements successifs qui serait en concordance avec la psychologie des garçons et des filles (Chamorro, 1991).

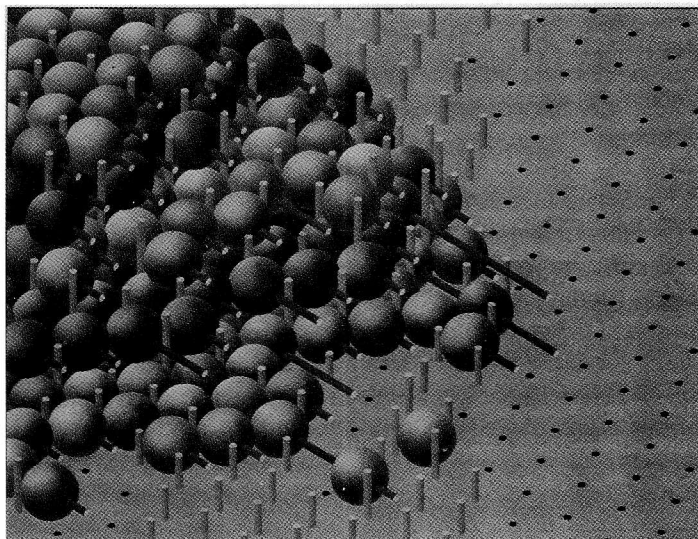
L'acquisition de techniques mathématiques requiert de la pratique et un traitement continu et planifié. La compréhension s'acquiert normalement en tant que résultat d'activités mathématiques significatives, variées et répétées (ICMI, 1986). Dans les classes, les contenus et les thèmes mathématiques ne peuvent pas être enfermés ni isolés, ils doivent être en adéquation avec les possibilités, les compétences et les capacités réelles des élèves, et avec le contexte dans lequel ils vivent.

Les mathématiques, une méthode pour "apprendre à penser"

Nous considérons les mathématiques comme une matière-clé dans les premières années de la scolarité obligatoire. Elles aident l'enfant à développer son intelligence, lui apprennent à penser, favorisent le développement des capacités et processus cognitifs, facilitent la communication avec le professeur et ses camarades, en même temps qu'elles lui fournissent les capacités pour trouver et utiliser des stratégies, en répercutant ses réussites dans les autres domaines. Les mathématiques rendent possible le développement intégral de l'enfant en tant que personne immergée dans une société (Soriano, 1993).

Entre enseigner et apprendre, dit Dewey (1933), il existe la même relation que entre vendre et acheter. La seule façon d'augmenter le niveau d'apprentissage de l'élève est d'augmenter la quantité et la qualité de l'enseignement réel.

Le processus "enseignement-apprentissage" des mathématiques doit viser à accroître la connaissance et développer l'habileté de la pensée. Nous croyons qu'il est difficile d'atteindre l'un d'eux sans faire aucun progrès dans l'autre.



Noël Blotti - 1985

**Comment se forment
les concepts
mathématiques ?
Parallélisme avec la
formation de la
pensée réfléchie.**

Les concepts commencent avec les expériences qui procèdent de l'interaction constante de l'enfant avec son milieu. Tous les organismes sont en alertes, désirent une opportunité pour entrer en activité, et recherchent quelque objet sur lequel agir. Les concepts se précisent avec l'utilisation, la pensée n'est pas autre chose que la capacité à comprendre et à mettre en relation les indices spécifiques que les choses établissent et, pour finir, se généralisent aussi avec l'utilisation (Dewey, 1933). Penser c'est rechercher, inspecter, essayer ... dans le but de trouver quelque chose de nouveau ou voir ce qui est déjà connu sous une perspective différente; pour tout ce qui a été dit antérieurement, nous considérons que les mathématiques sont une matière idéale pour l'obtenir chez les enfants. Les activités scolaires, et spécialement celles qui sont du domaine des mathématiques, offrent de grandes possibilités intellectuelles.

Selon Dewey (1933), le résultat de la pensée est dans tous les cas la transformation d'une situation douteuse et déconcertante en une situation claire et déterminée. Cela coïncide avec la stratégie d'enseignement que nous proposons. Pour travailler les mathématiques, il faut commencer par établir une situation problématique qui, à travers une investigation soignée, peut être résolue.

Nous allons établir un parallélisme entre les cinq phases de la pensée réfléchie selon Dewey (1933), et les phases que nous croyons nécessaires pour penser de manière réfléchie à partir des mathématiques. Sur le plan des mathématiques, on peut considérer cinq phases qui favorisent la pensée réfléchie.

Dans la première, on présente la situation problématique et on cherche une solution possible; dans la seconde, il y a une intellectualisation de la difficulté qu'on a expérimenté dans un problème à résoudre ou une question à laquelle on doit trouver une réponse.

La troisième consiste à utiliser des suggestions les unes après les autres, comme hypothèses, afin d'initier et de guider l'observation; la quatrième phase est celle du raisonnement, c'est l'élaboration mentale de l'idée ou de la supposition (raisonner aide à amplifier la connaissance, alors qu'en même temps cela dépend de ce qui est déjà connu et des facilités existantes) et, enfin, la vérification des hypothèses.

Nous croyons qu'apprendre les mathématiques c'est apprendre à penser.

**Du concret à
l'abstrait,
de l'abstrait au
concret.**

Tout le processus de la pensée consiste à former une série de critères en relations les uns avec les autres de telle manière qu'ils se soutiennent mutuellement et conduisent à une conclusion, en faisant coïncider ce procédé avec celui qu'on doit amener au bout en mathématiques pour

acquérir la connaissance d'une façon significative. Ainsi, comprendre en mathématiques, c'est appréhender une signification. Cela consiste à l'observer dans ses relations avec d'autres situations ou d'autres matières, à déterminer quelle utilité on peut lui donner, à observer comment elle opère...

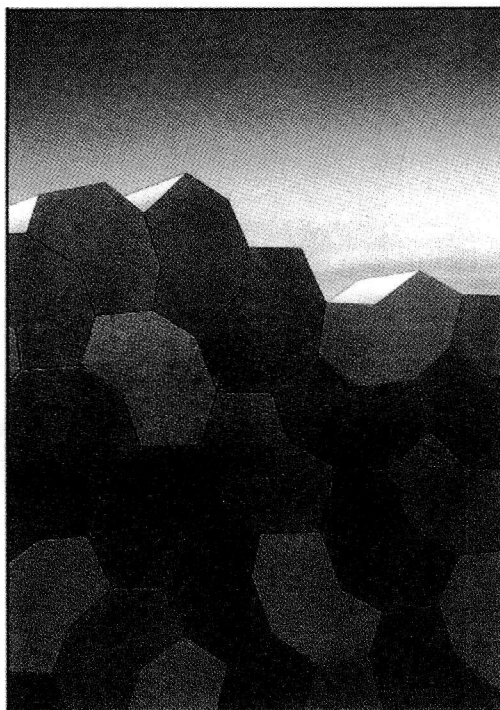
Les concepts de concret et d'abstrait sont très liés au fait de penser de façon réfléchie (Dewey, 1933). Pour acquérir une bonne connaissance mathématique, il faut aller du concret à l'abstrait et agir dans l'abstrait. Mais, il est convenable de clarifier sémantiquement ces termes et d'observer leur parallélisme dans la formation de la pensée et dans l'acquisition de la connaissance mathématique.

Dewey (1933) affirme que le concret dénote une signification clairement appréhendable. La différence entre le concret et l'abstrait est en relation avec le progrès intellectuel d'un enfant; ce qui est abstrait dans une phase du développement devient concret dans une autre. Ce qui détermine les limites entre le concret et l'abstrait ce sont les exigences de la vie pratique. Lorsque la pensée est utilisée comme moyen pour aboutir à une fin, bien ou valeur qui la transcende, c'est du concret (ce qui arrive quand on travaille dans le domaine des mathématiques dans les premiers niveaux de primaire); quand on l'emploie simplement comme moyen pour continuer à penser, c'est abstrait.

Il faut que les concepts mathématiques passent du concret à l'abstrait, pour cela il est nécessaire de considérer que le fait de commencer avec le concret signifie que, au point initial de toute expérience d'apprentissage mathématique, on devrait faire une grande part à ce qui est déjà familier. Par exemple, l'enseignement d'un nombre n'est pas concret simplement parce qu'on utilise des petites pierres, des petits pois ou des points ... Dès qu'on a clairement perçu l'utilisation et la portée des relations numériques, la notion de nombre n'est concrète que lorsque on utilise seulement des chiffres.

Il faut commencer à travailler les mathématiques avec des manipulations pratiques, mais l'activité purement physique et la simple manipulation n'assurent pas de résultats intellectuels. Elles doivent toujours viser à résoudre un problème, il faut réfléchir sur ce qui a été réalisé, discuter en groupe-classe, séquencer et ordonner les hypo-

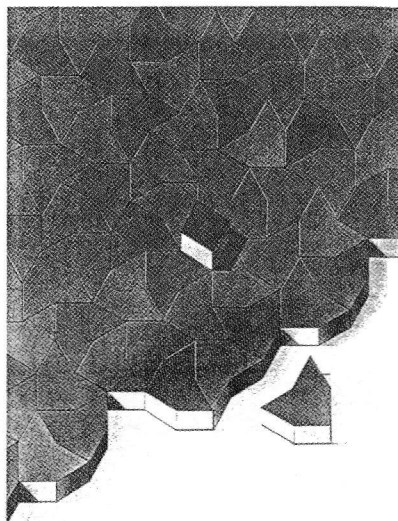
Noël Blotti - 1985



thèses pour trouver une solution à la question posée (Soriano, 1993). L'interaction dans le groupe favorise la communication. On doit utiliser le langage à des fins pratiques et sociales, de telle sorte que petit à petit il se convertisse en un outil conscient pour véhiculer la connaissance mathématique en particulier et appuyer la pensée (Vygotski, 1978).

Les mathématiques favorisent le développement de l'intelligence et apprennent aux enfants à penser dès les premiers cours

Nickerson, Perkins et Smith (1987) considèrent que les objectifs traditionnels de l'éducation se sont centrés sur l'acquisition d'une connaissance pratique. On a prêté peu d'attention à l'enseignement des habiletés de la pensée telles que le raisonnement, la pensée créative et la solution de problèmes. En renforçant les habiletés de la pensée, il n'y a aucune raison de réfuter l'importance de l'acquisition de la connaissance. La pensée est essentielle pour l'acquisition de la connaissance et la connaissance est essentielle pour la pensée. Nous partageons cette



Noël Blotti - 1985

réflexion et nous croyons que les enfants peuvent apprendre à penser à travers le curriculum mathématique. De plus, nous considérons qu'en mathématiques l'information pure ne se convertit pas toute seule en "formation", l'apprentissage intellectuel inclut la réunion, le processus, la rétention ou le stockage et la récupération de l'information; pour cela, il faut faire des efforts dans les processus et en favorisant des attitudes positives vers cette matière.

L'information va se convertir en connaissance seulement si on comprend le matériel qui la constitue (Dewey, 1933). La compréhension des différentes parties de l'information mathématique et ses relations réciproques s'obtient lorsque l'acquisition est accompagnée d'une réflexion constante sur la signification de ce qu'on étudie. Il est nécessaire d'appréhender les connexions de ce qui est retenu et enregistré (récupéré), pour pouvoir utiliser le matériel dans de nouvelles situations.

Tout le processus d'enseignement-apprentissage a pour objectif de développer chez les élèves une série de capacités qui leur permettent de vivre intelligemment en société. Les mathématiques contribuent, d'un façon spéciale, à développer chez les élèves du premier cycle de l'éducation pri-

maire les capacités cognitives, affectives, psychomotrices, d'insertion sociale et communicatives (Soriano, 1933).

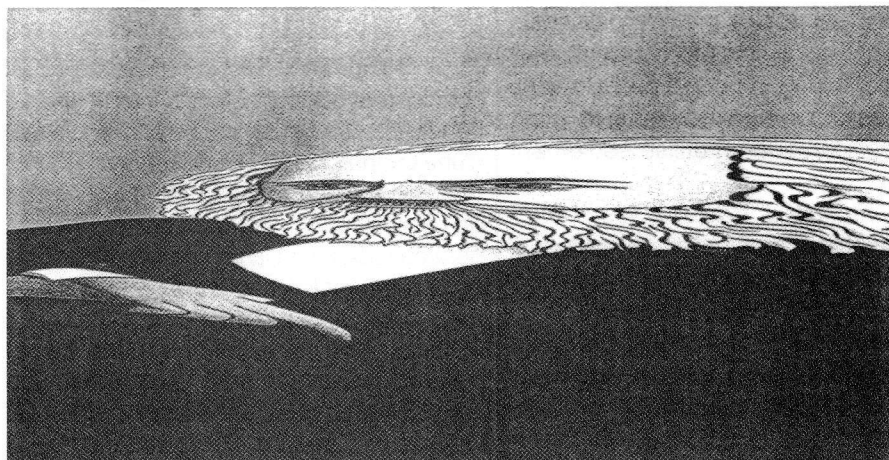
Les attitudes développées par les mathématiques

Les mathématiques favorisent chez les élèves le développement des capacités cognitives en commençant par les plus simples comme faire attention, connaître, comprendre ... et en continuant par d'autres plus complexes comme raisonner, synthétiser, appliquer, pensée créative, pensée et sens critique.

Bien qu'accusées d'être une matière aride, les mathématiques contribuent au développement de capacités de type affectif. Celles-ci peuvent être, selon les circonstances, positives ou négatives; il incombe au professeur que l'élève les assimile dans le sens positif : autoestimation, valorisation, profiter (à travers les défis que suppose le processus suivi pour trouver une solution à un problème), critiquer (les processus mathématiques, les solutions doivent être débattus dans le groupe, tous doivent participer pour pouvoir construire la connaissance mathématique à travers l'interaction avec les semblables), etc.

Les capacités de type psychomoteur sont également développées par l'apprentissage des mathématiques. De plus, le bloc mathématique "Espace et Géométrie" contribue expressément à son développement : capacité à s'orienter, organisation spatio-temporelle, coordonner, manipuler, construire ...

Si dans la classe il est possible, après la réalisation d'activités mathématiques, de les mettre en commun, de les étudier, de débattre des procédés suivis pour solu-



tionner un problème, de produire des échanges ... , on aboutira à ce que les mathématiques contribuent à développer les capacités d'insertion sociale. Partager un problème auquel il faut trouver la solution en petit groupe, discuter avec le groupe des processus et des résultats, etc, favorise les capacités telles que savoir participer, collaborer, partager, contribuer, respecter ... qui sont si nécessaires pour s'intégrer dans la société.

En dernier lieu, il est utile de commenter le pouvoir que possède ce domaine pour obtenir, par un travail quotidien, les capacités communicatives des élèves; l'expression orale, l'expression graphique, l'écrit, la symbolique, dialoguer, écouter ... On ne doit pas oublier que les mathématiques sont un langage universel, c'est-à-dire un langage mathématique.

Aspects intellectuels favorisés par les mathématiques

A partir de la perspective cognitive et du processus d'information il y a une série de capacités humaines dont la manifestation chez une personne nous informe d'une conduite plus ou moins intelligente, et nous pensons qu'elles sont favorisées par des mathématiques travaillées de manière adéquate. Concrètement, il existe une série d'éléments importants dont le développement et l'entretien contribue à apprendre à penser à une personne, et nous croyons qu'ils peuvent être abordés dans toute leur amplitude à partir des mathématiques.

La mémoire

C'est l'une des capacités cognitives de base avec l'attention et le raisonnement. Elle a généralement été considérée comme un indice important de l'intelligence.

Toutes les informations qui arrivent à l'élève sont sélectionnées par lui et peuvent rester dans la mémoire plus ou moins longtemps. La durée dépend de la relation qui va s'établir entre l'information nouvelle et celle acquise au préalable. D'après Beltran (1987), Gagné (1987), Novak et Gowin (1988), Heimlich et Pittelman (1990), Coll (1990) et Hernandez Pina (1993), entre

autres, l'information qui arrive à l'élève suit un schéma commun. L'élève la sélectionne et évite un travail à sa mémoire, dans laquelle elle peut rester pendant une courte période et, à partir de là, suivre deux chemins possibles :

- Le premier est de la mésestimer, à cause de motifs divers : ne pas trouver de schémas de connaissance préalables avec lesquels les mettre en relation, l'existence d'une distance suffisamment grande entre la nouvelle connaissance et les idées préalables, qu'elle ne soit pas intéressante, qu'elle ne soit pas utile, etc. Si cette information n'a aucune sens pour l'enfant, il l'utilise telle qu'elle arrive, sans l'élaborer, dans le but de se sortir d'une situation future ou compromise pour laquelle il en a besoin, comme par exemple, réussir un examen ou satisfaire les attentes de ses professeurs à son sujet. Passée cette courte période, l'information qui s'est accumulée de façon répétée se perd généralement. Les concepts s'acquièrent de façon mécanique et en ne trouvant pas, dans la nouvelle information, de relations avec d'autres informations antérieures, elle n'est pas élaborée par l'élève, n'est pas stockée et, par conséquent, ne peut pas être récupérée pour acquérir de nouvelles significations, ni pour être appliquée à une nouvelle situation.

- L'autre chemin est de trouver un sens à la nouvelle information. Pour cela on cherche des relations avec les expériences préalables. La nouvelle information produit toujours un déséquilibre conceptuel qu'il faut pallier pour revenir à l'état normal d'équilibre. L'élève, intentionnellement, cherche et trouve des relations avec ses connaissances antérieures, les réélabore et de nouveaux schémas de connaissance plus complexes apparaissent pour lesquels il utilise des stratégies d'apprentissage, déjà acquises ou qu'il peut apprendre, en les récupérant dans une situation adéquate.

Les garçons et les filles, une fois les informations élaborées, les stockent dans leur mémoire à longue durée et les récupèrent et utilisent au cours de nouvelles situations d'apprentissage ou lorsqu'elles sont requises pour résoudre une situation quelconque. De cette façon, la seule chose que les élèves ont toujours ce sont des schémas préalables de connaissance de plus en plus complexes, mais ils sont préalables car les élèves ont toujours l'opportunité d'apprendre davantage sur un thème. On n'obtient jamais un apprentissage total ou toute l'information.

Les apprentissages se basent sur des réélaborations de schémas préalables de connaissance, de plus en plus compliqués et dont les mailles du réseau sont de plus en plus nombreuses, qui sont récupérés et utilisés pour solutionner de nouvelles situations ou pour réaliser un nouvel apprentissage. La mémoire s'exerce et augmente parce qu'on comprend, si les informations ne sont pas comprises rapidement, alors elles sont mésestimées.

Nous pensons que l'enseignement-apprentissage des contenus mathématiques exerce la capacité de mémoire pour de nombreuses raisons. Les mathématiques sont un domaine qui possède une structure interne riche, logique et significative, on ne peut pas travailler les mathématiques sans restructurer les schémas préalables. Les nouvelles connaissances se basent sur les connaissances antérieures, travaillent avec elles, trouvent des relations logiques en utilisant pour cela des stratégies d'apprentissage. C'est une matière dans laquelle les éléments internes sont régis par un ordre. Ainsi, un bon apprentissage des mathématiques ne s'obtient jamais par répétition, ni mécaniquement, puisque les nouvelles connaissances se basent sur les antérieures. Les nouvelles connaissances vont former une partie du réseau de connaissances que l'enfant possédait dans sa mémoire, construit à partir de son expérience. En même temps, en mathématiques on avance en spirale, c'est-à-dire que les contenus peuvent être appréhendés à nouveau sous différentes perspectives et avec un niveau de difficulté croissant.

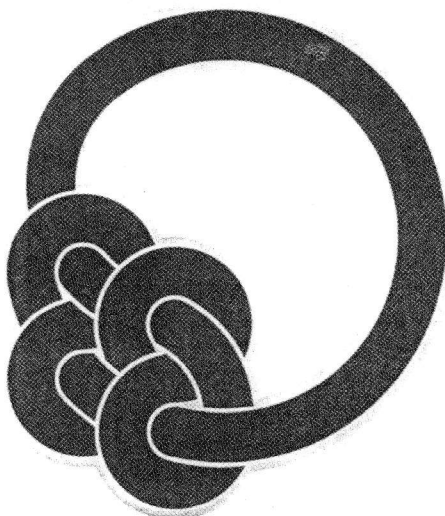
En réalité, comprendre les mathématiques revient à appréhender une signification et à la mettre en interrelation avec d'autres. Les mathématiques favorisent la formation d'un réseau de connexion pour leur compréhension, tout ce qui se comprend est réélaboré et appris, en faisant partie de la personne et en se stockant dans la mémoire. Pour cela, nous disons que les mathématiques développent la mémoire parce qu'elles cherchent des stratégies permettant d'interconnecter les nouveaux contenus avec ceux déjà obtenus, parce qu'elles sont riches en relations et parce que, pour mémoriser, il faut appréhender les significations des choses d'une forme compréhensive. En même temps, nous sommes convaincus que les relations exercées en mathématiques peuvent être extrapolées à d'autres domaines pour favoriser les apprentissages.

Depuis les premières années de scolarité, l'enfant développe sa capacité de mémoire et les activités mathématiques, que ce soit de type manipulation, verbal ou symbolique, l'y aident.

Capacité de formation d'images mentales

La formation d'images procure une forme spéciale de stockage de l'information qui est différente de la signification verbale. Les images représentent l'information, et les objets imaginés peuvent être manipulés mentalement de la même façon que leurs objets mentaux correspondants (Kosslyn, 1986).

Selon Gordon Bower (1972), les images mentales semblent améliorer la mémoire de deux manières. Premièrement, on peut stocker non seulement la parole mais aussi la chose à laquelle elle se réfère. Les souvenirs de la mémoire verbale et des images mentales sont distincts, et cette différence peut être utilisée pour assurer le souvenir de l'un d'eux. En second lieu, les images peuvent se combiner en scènes et être enregistrées ainsi, en donnant lieu à une autre voie pour améliorer la mémoire. Quand nous mémorisons des scènes, nous ne stockons pas seulement des idées ou des objets mais également les relations qui s'établissent entre eux.



Noël Blotti © Horizons Maths - 1982

La deuxième utilité des images mentales recherchée par les scientifiques, parmi lesquels Richardson (1969), implique l'utilisation des images mentales comme substitut de la pratique réelle dans la réalisation d'une activité. Les images peuvent agir comme substituts d'objets réels.

Nous n'avons pas la connaissance de recherche menées au sujet de la formation d'images mentales chez les très jeunes enfants. Notre intervention et nos observations des classes nous informe que les très jeunes enfants forment des images mentales et travaillent avec elles. L'imagination créatrice est le mode naturel de fonctionnement de l'esprit enfantin dont les contenus sont fondamentalement perçus moyennant des images ou des pensées visuelles.

Le processus mathématique permet la formation d'images mentales. La connaissance mathématiques commence à travers la manipulation d'un matériel concret et des situations de la vie quotidienne, sur lesquels on agit et on réfléchit, mais, lentement, ce matériel se retire et l'enfant doit travailler en manipulant des images mentales qui, dès qu'elles sont devenues familières et assimilées par les élèves, sont aussi concrètes que le matériel sur lequel ils ont agit.

La pensée divergente

De nombreux auteurs (Barlett, 1958; De Bono, 1968) ont séparé deux types de pensée, l'un qu'ils caractérisent d'analytique, déductif, rigoureux, formel, critique et convergent, et l'autre de synthétique, inductif, expansif, libre, informel, créatif et divergent. Nous devons tenir compte de ces deux types de pensée.

Pour Guiford (1983), la pensée divergente revient à regarder d'après plusieurs perspectives, à chercher toujours plus d'une réponse, à désarticuler des schémas rigides, à ne pas s'appuyer sur des suppositions uniques et préalables, à essayer, à établir de nouvelles associations, à tâtonner pour produire quelque chose de nouveau afin de mieux comprendre et de se sentir auteur d'une oeuvre commune.

Pour beaucoup, d'après Orton (1990), les mathématiques sont une matière

dans laquelle l'adresse de la pensée convergente est la plus valorisée. En fait, il est possible qu'il n'y ait pas de preuve de la nécessité de l'adresse de la pensée divergente. Ces personnes pensent que dans d'autres domaines il est très facile de produire des questions divergentes, c'est-à-dire qui offrent de nombreuses variétés de réponses acceptables. Il faudrait se demander, cependant, si c'est l'instruction scolaire typique en mathématiques qui génère les penseurs convergents que nous trouvons, par exemple, à la fin de l'éducation primaire? ou, au contraire, si les enfants sont prédisposés à la convergence et notre curriculum en mathématiques influe peu pour contrarier une telle tendance?

Nous pensons que jusqu'alors les mathématiques scolaires ont favorisé le développement de la pensée convergente. Les mathématiques scolaires ont été conçues comme un matériel parfaitement achevé, dans laquelle tout a une solution, et lorsqu'on a trouvé des situations qui avaient plus d'une solution, des problèmes de type didactiques apparaissaient. Les processus à suivre pour trouver la solution à un problème peuvent être variés et très différents. Dans l'instruction mathématique que les professeurs d'aujourd'hui ont généralement reçue, ceux-ci se voyaient obligés de réaliser le même raisonnement que leur professeur pour résoudre une situation, puisque sinon ils étaient sanctionnés. Aujourd'hui nous devons éviter ce modèle d'instruction pour nos élèves.

Nous estimons que les mathématiques favorisent l'apparition de produits créatifs, parce qu'elles peuvent fomenter autant la pensée convergente que la pensée divergente et, de ce fait, l'un des objectifs des mathématiques est de développer les deux à la fois. Exemples d'activités réalisées avec des élèves du premier cycle de primaire, qui reflètent l'utilisation des deux:

Pensée convergente

a) 2 - 4 - 6 - 8 ...

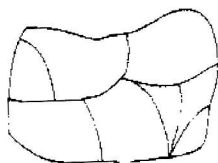
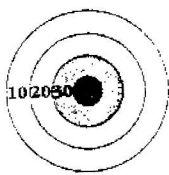
Quel est le chiffre qui suit ?

b) 3 - 20 - 35 - 8

Ordonne ces nombres du plus petit au plus grand.

c) fais de même avec :

1,002 - 0,102 - 0,012 - 0,002



Pensée divergente

a) Lance la fléchette trois fois pour que le total soit de 70.

b) Colore les régions en utilisant quatre couleurs sans que deux régions qui se touchent soient de la même couleur.

Ces exemples d'enseignement mathématique, alliés à un nouveau style d'organisation de la classe et d'interaction avec les élèves, s'opposent à un apprentissage consistant avec presque l'exclusivité dans l'assimilation d'informations. Un nouveau développement éducatif exige une activité d'exploration et de découverte des élèves, pour laquelle il constitue un élément essentiel: la créativité, cette façon de procéder sans règles ni formules rigides préétablies.

Un enseignement créatif

Nous avons dit antérieurement que les activités mathématiques proposées améliorent la pensée divergente. Si elles améliorent cette pensée et que celle-ci est associée à des attitudes critiques et transformatrices, alors elles contribuent également à développer ces attitudes. Les enfants qui suivent des activités créatives de façon intégrée dans leurs affaires scolaires améliorent leur rendement scolaire, leurs expériences intellectuelles et même leurs relations affectives. Voyons donc l'importance des mathématiques en tant que matière du curriculum.

En analysant les principes dans lesquels, selon J. A. Smith (1966, 1974), l'enseignement créatif doit se fondamentaliser et s'orienter, nous trouvons un parallélisme total avec les principes dans lesquels doit se fondamentaliser l'enseignement des mathématiques.

- La créativité se développe en se centrant sur ces processus de l'esprit regroupés dans le domaine général de pensée divergente.

- Dans l'enseignement créatif on utilise des situations avec une fin ouverte.

- L'enseignement créatif signifie que les élèves sont amenés à générer et à développer leurs propres idées, à penser par eux-mêmes, ce qui s'obtient en favorisant les procédés mathématiques et en développant des attitudes d'auto-estime.

- Dans l'enseignement créatif le raisonnement est autant, sinon plus, important

que le résultat obtenu.

- Dans l'enseignement créatif, on apprend beaucoup de connaissances et d'habiletés mais on fait également des prévisions pour appliquer ces connaissances-habiletés dans de nouvelles situations de solutions de problèmes.

- Dans l'enseignement créatif on manipule et on explore les idées et les objets.

Nous avons alimenté notre opinion sur le domaine des mathématiques dans le premier cycle de primaire avec ces principes; par conséquent, les mathématiques se manifestent comme un terrain privilégié pour développer la créativité chez l'enfant. Dans le travail mathématique nous considérons que le raisonnement suivi est plus important que la solution finale. Les enfants sont invités à présenter leurs réponses, à les discuter avec le groupe, à respecter les contestations des autres, même si elles sont erronées; pour cela, dans les débats, l'enfant crée et développe ses propres idées en les confrontant à celles de ses camarades. De plus, les enfants acquièrent plus d'assurance et de confiance pour résoudre les problèmes et les difficultés qui se présentent.

Le raisonnement

Le terme de raisonnement a été utilisé dans des contextes plus hétérogènes. En parlant de raisonnement nous exprimons deux types de raisonnement: déductif et inductif. Le raisonnement déductif inclue une inférence logique. Le raisonnement déductif consiste à extraire une conclusion des prémisses existants (Nickerson, Perkins et Smith, 1987). Une déduction est un processus systématique de pensée qui conduit d'un groupe de propositions à un autre, et que l'on suppose basé sur les principes de la logique (Johnson-Laird, 1986).

La domination totale du raisonnement déductif dépend, dans l'œuvre de Piaget, de la domination des opérations formelles. Des enfants d'âges inférieurs à ceux exigés pour la théorie peuvent raisonner correctement si ils prennent la précaution de s'assurer qu'ils se souviennent de l'information qu'ils se procurent (Bryant et Trabasso, 1971), qu'ils ne sont pas induits en erreur par des questions confuses (Donaldson, 1978) et que des problèmes sur des objets familiers se présentent.

Voyons maintenant un problème, parmi les nombreux posés et résolus par les élèves du premier cycle de l'éducation primaire. Nous croyons que c'est un exemple clair de raisonnement déductif.

Problème:

Alice, Roro, Antoine et Pierrot ont fait une course.

On sait qu'Alice est arrivée la dernière, qu'Antoine est arrivé avant Roro et après Pierrot.

Complète le tableau en indiquant l'ordre d'arrivée de chaque enfant.

1°	2°	3°	4°

Nous estimons que le domaine des mathématiques aide à utiliser et à développer le raisonnement déductif à partir d'un âge précoce. Quoique la réponse pour les adultes soit évidente, les raisonnements par lesquels on y arrive sont étonnamment complexes. En premier lieu, il est nécessaire de comprendre le problème et de capter les conditions initiales et l'objectif. Deuxièmement, il est nécessaire d'échafauder un plan. Troisièmement, il faut effectuer le plan sans commettre d'erreur. Quatrièmement, il faut vérifier la réponse et considérer peut-être si il existe un autre façon de procéder. Les inférences déductives dans la vie quotidienne nécessitent rarement une stratégie compliquée.

Les mathématiques n'influent pas seulement sur le développement du raisonnement déductif, mais influe aussi positivement et dimensionnellement dans le raisonnement inductif.

L'induction

L'induction est une capacité cognitive générale. On la définit comme le développement de règles, idées ou concepts généraux à partir de groupes spécifiques d'exemples (Pellegrino, 1986; Nickerson, Perkins et Smith, 1987). Chaque fois qu'à partir des différentes observations du monde dans lequel nous vivons on fait une généralisation, on a fait une induction. Par consé-

quent, une grande part de l'apprentissage est induction.

Toutes les tâches de raisonnements inductif (Pellegrino, 1986) ont la même propriété basique. On présente un groupe de stimuli à l'enfant, et sa tâche consiste à inférer le modèle ou la règle, de façon à ce qu'on puisse générer ou sélectionner une continuité appropriée du modèle. Ce procédé général de preuves s'observe dans une large gamme de tâches différentes : classifications, sériers, etc.

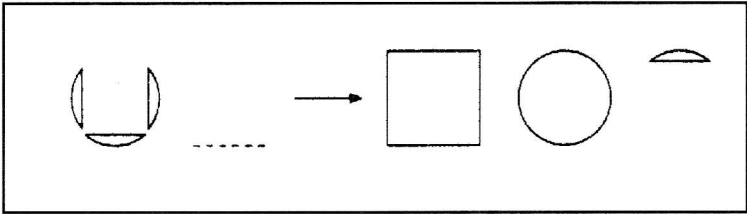
Les problèmes, selon Pellegrino (1986) qui, en plus de mesurer, développent la capacité de raisonnement inductif et qui dès les premiers moments de la scolarité obligatoire, pensons-nous, doivent apparaître dans les programmes de mathématiques sont les suivants :

a) Classifications

Elles consistent à découvrir la relation entre les termes initiaux et ensuite à sélectionner l'alternative cohérente avec la règle inférée.

Considérons l'exemple suivant travaillé avec l'élève de premier cycle de l'éducation primaire.

Parmi les figures qui se trouvent à ta droite, choisis celle que l'on doit mettre sur les pointillés.



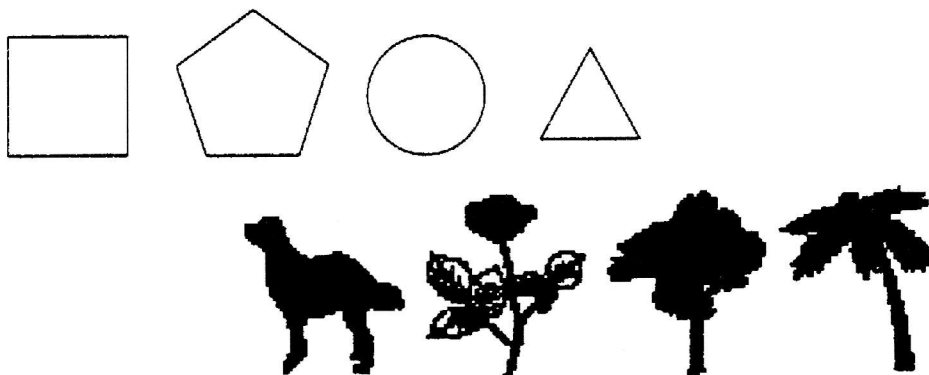
Dans les problèmes de classification, le processus d'inférence cherche une relation commune entre trois ou quatre termes, comme par exemple: chien, vache, cheval, chat. La relation réside normalement dans une catégorie du niveau supérieur qui embrasse tous les termes ou une propriété commune.

Par exemple:

Observe le tableau ci-après

a) Dans l'exemple des figures colorie celle qui est différente.

b) Dans le second exemple, indique celle que tu crois être différente.



Normalement l'enfant qui arrive en premier cycle de l'éducation primaire est habitué, informellement, à réaliser des classifications simples. Séparer des graines mélangées, en formant différents tas avec les graines identiques; faire des colliers avec seulement des billes rondes et d'autres avec seulement des cubes; avec les jeux de couleur, conserver chaque objet dans son étui en faisant attention à sa couleur. En plus de ces classifications on peut en réaliser d'autres plus structurées, en utilisant par exemple les blocs logiques de Dienes, en classant selon les critères: forme, couleur, grandeur et grosseur. Pouvant classifier (déjà en premier cycle de primaire) selon un critère, deux à la fois, trois à la fois, voire même quatre à la fois. De cette façon, ils peuvent inférer la propriété caractéristique après avoir observé une classificatopn.

b) Séries

Elles consistent à découvrir la structure périodique et relationnelle existant entre des suites de nombres, lettres et figures, séquences de notes de musique et modèles colorés, processus et séquençage dans les séries incomplètes.

On travaille avec des séries incomplètes de nombres, rythmes, figures, etc., dès l'arrivée de l'enfant à l'école. Lorsqu'il commence à se familiariser avec le nombre, il commence à diversifier les séries numériques. Séries croissantes et décroissantes, avec des opérations de somme, reste et multiplication.

Par exemple:

Complète les séries suivantes en donnant les cinq nombres suivants dans chacune d'elles:

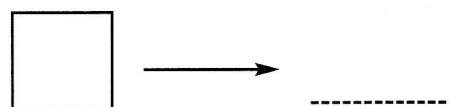
a) 4 - 6 - 8 - ...

b) 20 - 19 - 18 - ...

c) 3 - 7 - 12 - 18 - ...

On peut réaliser des séries avec des figures dans lesquelles on trouve une structure périodique claire. On peut aussi permettre à l'élève de créer sa propre série. Par exemple, complète la série suivante :

d)



Lors de la mise en commun des résultats, on observera et on étudiera quelle est la solution de chaque enfant à la série, on débattrà et on verra que toutes sont des séries bien qu'elles suivent des rythmes distincts.

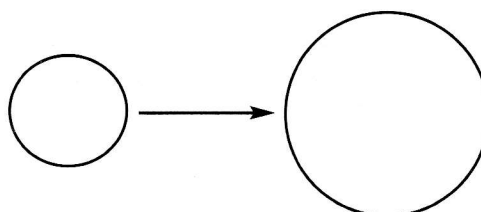
c) Les analogies

Elles nécessitent que les enfants choisissent l'alternative en relation avec le troisième terme du thème, de la même façon que le second est en relation avec le premier. D'après Pellegrino (1986) les analogies se présentent sous un format de choix forcé comme une introduction de trois termes.

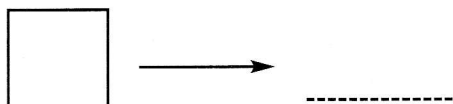
Dans la classe de premier cycle de primaire on n'utilise pas tellement les séries et les classifications mais, si on les utilise par exemple pour discriminer des formes, des grosseurs, le nombre d'objets, etc.

Par exemple:

Observe ce dessin



complète le second, en utilisant la même relation que dans le premier.



La capacité mathématique

Une des capacités humaines qui, sans aucun doute, dès le premier moment où l'enfant entre en contact avec les mathématiques, de manière formelle ou informelle, favorise cette matière, est la capacité mathématique.

Maintenant, qu'appelle-t-on capacité mathématique ? Nous partageons la définition de Mayer (1986) qui définit la capacité mathématique comme l'ensemble des opérations cognitives, habiletés et connaissances qui composent les tâches mathématiques.

Certains élèves révèlent clairement plus d'aptitudes que d'autres vis-à-vis des mathématiques, ainsi la notion de capacité mathématique est essentielle pour considérer les différences individuelles. L'important est de déterminer si on peut développer cette capacité et nous estimons qu'elle peut être développée grâce à une méthodologie mathématique adéquate.

Krutetskii (1976) a réalisé une étude poussée sur la capacité mathématique des élèves, basée essentiellement sur l'observation et les conversations avec eux. Il définit la capacité mathématique en tant que caractéristiques psychologiques individuelles, qui répondent aux exigences de l'activité mathématique scolaire et qui influent sur le succès du domaine créatif des mathématiques comme matière scolaire, surtout dans un domaine relativement rapide et profond de la connaissance, les adresses et les habitudes en mathématiques.

Krutetskii (cité par Orton, 1990) conçoit ainsi quelques composantes de la capacité mathématique :

- 1- capacité pour extraire la structure formelle du contenu d'un problème mathématique et pour opérer avec elle,
- 2- capacité pour généraliser à partir de résultats mathématiques,
- 3- capacité pour opérer avec des symboles,

4- capacité pour des concepts spatiaux, exigés dans certaines branches des mathématiques,

5- capacité de raisonnement logique,

6- bonne mémoire pour la connaissance et les idées mathématiques.

Krutetskii (cité par Orton) signale également qu'il existe différents types de capacité mathématique. Certains élèves possèdent un esprit "analytique" et préfèrent penser en termes verbaux et logiques. D'autres ont un esprit "géométrique" et aiment les raisonnements visuels ou graphiques. Et il existe d'autres élèves qui possèdent un esprit "harmonique" et qui sont capables de combiner les caractéristiques de l'esprit analytique et de l'esprit géométrique, quoiqu'ils révéleront très probablement un certain penchant pour le raisonnement analytique ou géométrique.

La capacité mathématique peut adopter de nombreuses formes, dérivées de celles-là, d'un mélange différent d'autres aptitudes. Parmi elles figurent l'habileté numérique, l'habileté spatiale, le raisonnement verbal et non verbal, l'adresse de la pensée convergente et divergente, etc.

Nous croyons qu'il n'y a pas besoin de grandes preuves pour démontrer qu'une organisation habile et adéquate des mathématiques forme cette capacité chez l'enfant, dès qu'il entre en contact avec l'institution scolaire. Bien que l'école ne possède pas l'exclusivité puisque les mathématiques de type informel favorisent également le développement de cette capacité.

La capacité spatiale

C'est une autre des capacités humaines qui peut être développée par les mathématiques. Bien que, naturellement, la capacité spatiale ne soit pas uniquement liée aux mathématiques.

Les études réalisées par Smith (1964) nous informent sur la capacité spatiale en la considérant comme une composante de l'adresse mathématique. Bruner (1973) notait que l'enseignement pouvait développer la capacité spatiale, et il exprimait ceci en disant "je ne crois pas que nous ayons commencé à frôler la superficie de l'apprentissage en visualisation". Bishop (1973) étudia l'importance des matériels de manipulation dans l'enseignement,

en trouvant une différence de rendement dans les tests de capacité spatiale entre les élèves qui utilisaient le matériel en classe et ceux qui ne l'utilisaient pas. Polya (1957) proposait, comme une des étapes du processus de résolution de problèmes, de réaliser un dessin qui aide l'élève, à travers une représentation dans l'espace, à trouver la solution.

Nous sommes convaincus que l'apprentissage des mathématiques favorise la capacité spatiale, puisqu'il met l'élève en relation avec des images, des dessins, des graphiques et des représentations visuelles très diverses. Un problème spécifique aux mathématiques, utilisé en classe, est la représentation bidimensionnelle d'objets tridimensionnels, un autre est la construction d'un objet spatial à partir d'un développement dans le plan. Ce sont des activités de type spatial qui essaient à la fois de former le développement de cette capacité, les notions topologiques fondamentales: devant-derrrière, en haut-en bas ..., et d'autres plus complexes pour l'enfant telles que gauche-droite, toujours en relation avec son corps et considérant que ce sont des concepts relatifs, dépendant de la position. Les activités réalisées avec du maté-

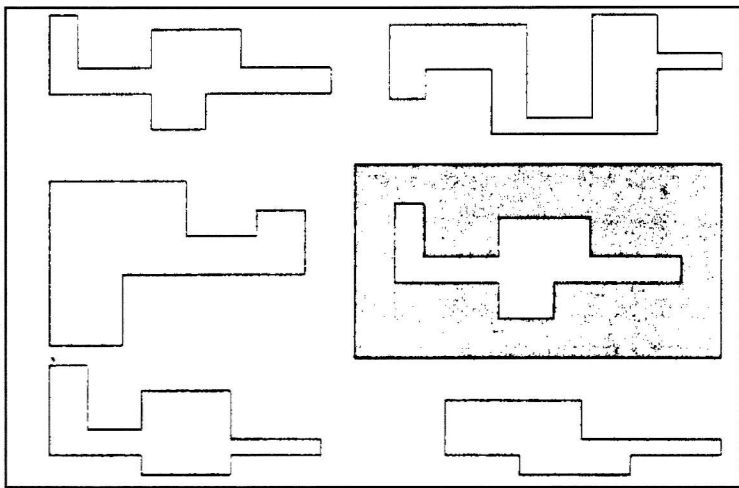
riel de construction sont également importantes.

Exemple 1

Observe les morceaux A, B et les 5 objets dessinés.

Quels sont les objets dessinés (1, 2, 3, 4, 5) qui pourraient passer à travers A ?

Quels sont ceux qui pourraient passer à travers B ?



Exemple 2

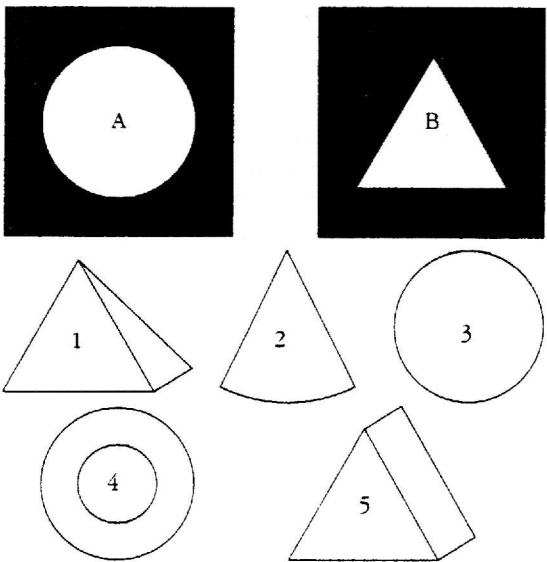
Observe le trou laissé dans le panneau après avoir extrait une figure. Entre les figures qui entourent le panneau, identifie celle qui s'emboîte et colorie la.

Les exemples précédents sont des exercices spatiaux réalisés sur le papier, après avoir travaillé auparavant avec du matériel concret manipulable. Le dernier a été réalisé dans l'atelier de mathématiques du deuxième niveau.

Nous essayons également de développer la capacité spatiale dans le premier cycle de primaire, au moyen d'une autre activité réalisée en classe de mathématiques. Cela consiste à localiser les maisons des amis, les magasins, etc., sur des plans simples et familiers pour les élèves. Naturellement, ils n'y arrivent qu'après avoir travaillé à l'élaboration de petits itinéraires sur le terrain, une fois qu'ils ont imaginé leur rue, les places, etc., de leur environnement familier.

Résolution de problèmes

La résolution de problèmes est une capacité intimement liée à la faculté intellectuelle. Il n'y a pas de théories cognitives



ou mathématiques qui traitent de la résolution de problèmes et qui ne la considèrent comme une capacité complète de l'individu qui procure un indice de son intelligence, selon qu'il ait plus de facilité ou de stratégies pour les résoudre.

Nous parlerons des problèmes en général et pas seulement des problèmes arithmétiques. En fait, les problèmes mathématiques posés aux élèves depuis le début ne doivent pas obligatoirement être arithmétiques. Il existe une infinité d'exemples, pour le premier cycle de primaire, qui ne le sont pas.

Un problème mathématique est un devoir intéressant pour l'élève, qui le fait s'impliquer complètement pour obtenir la solution. N'importe quel devoir n'est pas un problème en lui-même. Les livres de texte offrent de nombreux exercices qui ne sont en réalité pas des problèmes puisque la majorité se résoud en appliquant des connaissances ou des procédés appris de façon routinière (Soriano, 1993). On peut observer ici quelques exemples de problèmes posés en premier cycle de l'enseignement primaire.

Pour Chi et Glaser (1986), un problème est une situation dans laquelle on essaye d'atteindre un objectif et il est nécessaire de trouver un moyen pour l'atteindre. Tous les problèmes ont des aspects communs, tous ont un état initial y tendent à obtenir un objectif. Pour le résoudre, il faut réaliser quelques opérations sur l'état initial pour pouvoir atteindre l'objectif.

Selon Ausubel (1983), la résolution de problèmes se réfère à toute activité dans laquelle la représentation cognitive de l'expérience antérieure et les composants d'une situation problématique en vigueur se réorganisent afin d'atteindre un objectif déterminé.

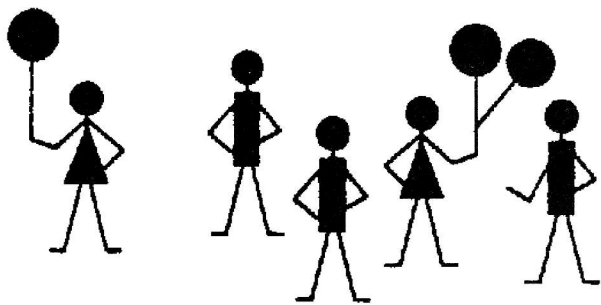
La résolution de problèmes est une aptitude cognitive complexe qui caractérise une des activités humaines les plus intelligentes (Chi et Glaser, 1986). Les personnes diffèrent dans leur capacité à résoudre des problèmes, et ces différences sont basées sur les processus cognitifs et les organisations mentales que les personnes ont en commun.

D'après Orton (1990), la résolution de problèmes se conçoit maintenant normale-

ment comme génératrice d'un processus à travers lequel celui qui apprend combine des éléments de la connaissance, des règles, des techniques, des dextérités et des concepts préalablement acquis pour apporter une solution à nouvelle situation.

Exemple 3

Voici cinq amis: Antoine, Alice, Assen, Pierre et Paolo. On sait que Assen a plus de ballons qu'Alice. Paolo est le dernier. Alice est devant Pierre.

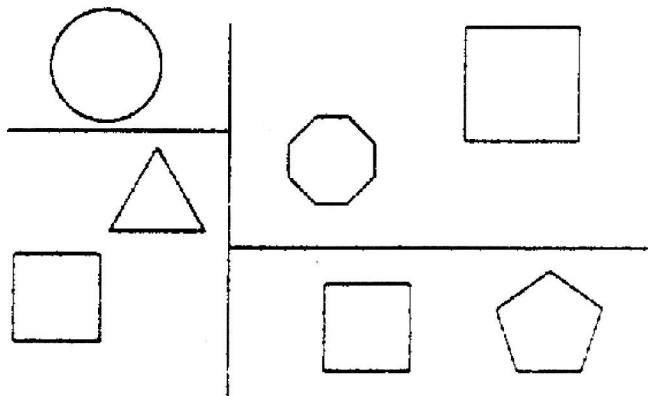


Observe le dessin où ils apparaissent et complète le tableau en indiquant dans chaque case le nom de l'enfant correspondant.

1°	2°	3°	4°	5°

Exemple 4

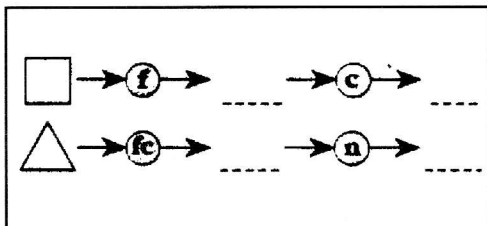
Observe les figures géométriques suivantes. Colorie celles qui sont situées en dessous et à gauche.



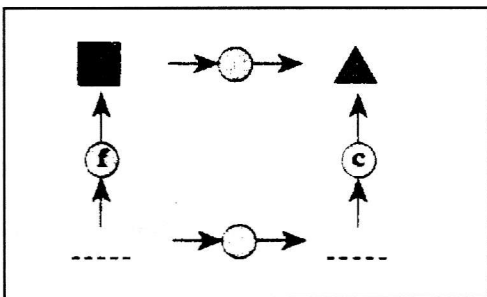
Exemple 5

Transforme les figures avec les machines qui changent la forme, la couleur, la forme et la couleur ou rien du tout. Sachant que (f) transforme la forme, (c) la couleur, (fc) la forme et la couleur et (r) rien.

a) Colorie de la couleur que tu veux les premières figures et suis les instructions des machines.



b) Colorie le carré de la couleur que tu veux. Identifie les machines qui opèrent à chaque occasion et complète les figures manquantes.



Les tendances actuelles dans l'enseignement de la résolution de problèmes et ses applications aux mathématiques sont : l'enseignement de stratégies de type général qui peuvent être appliquées à une multitude de problèmes; l'enseignement de techniques heuristiques et l'enseignement stratégique.

En ce qui concerne l'enseignement de stratégies de type général, nous avons les quatre phases de Polya (1957). Celui-ci propose un modèle prescriptif de solution de problèmes divisé en quatre phases. Celui qui est exposé ci-après est une adaptation.

1- Comprendre le problème

1-1 S'assurer qu'on connaît l'inconnue, les données et les conditions qui relient ces données.

1-2 S'assurer qu'on connaît la nature de l'état final, de l'état initial et des opérations.

1-3 Faire un graphique (une représentation visuelle d'un problème peut mettre en évidence des relations déterminées entre les différentes parties).

2- Imaginer un plan

Cela consiste à apporter à l'esprit d'autres problèmes analogues que l'on sait déjà résoudre.

2-1 Se rappeler d'un problème connu analogue à celui que l'on traite.

2-2 Penser à un problème connu qui ait le même type d'inconnue et qui soit plus simple.

2-3 Si on ne peut pas le résoudre, essayer de le transformer en un autre dont on connaît la solution.

2-4 Simplifier le problème en remarquant les cas spéciaux.

2-5 Substituer la variable entière par des valeurs spécifiques.

2-6 Décomposer le problème en différentes parties.

3- Exécuter un plan

C'est un état déductif. Il faut vérifier chaque étape.

4- Vérifier les résultats

4-1 Essayer de résoudre le problème d'une façon différente.

4-2 Vérifier la solution.

Il existe des méthodes et des règles pratiques qui fonctionnent bien dans de nombreux cas. Ces objectifs, qui n'offrent pas de garantie de résultat, mais qui le donnent en terme de fréquence, sont dits heuristiques. Une heuristique représente seulement un processus qui offre une possibilité raisonnable de solution (Nickerson, 1987). L'enseignement de type heuristique est destiné à développer des stratégies spécifiques pour des problèmes concrets. Schonfeld (1979) considère cinq stratégies:

- dessiner un diagramme ou une représentation du problème;
- considérer le paramètre intégrateur du problème et chercher un argument de type inductif;
- considérer un contre-argument;
- penser à un problème similaire mais avec moins de variables;
- Essayer d'établir des sous-objectifs.

Une heuristique important est l'analyse des moyens et les buts. Cela consiste à rechercher les différences existant entre l'état réel et l'état final, et ensuite à trouver

les opérations qui les réduiraient. Nous avons appliqué ces stratégies sur les enfants de 6 à 8 ans.

L'enseignement stratégique, ou développement de processus de pensée en mathématiques, considère que la solution à des problèmes n'est pas seulement une habileté algorithmique mais est bien un processus consistant à appliquer les concepts et adresses acquises lors de situations nouvelles (Tsuruda et Lash, 1985).

Nous avons observé que les enfants de 6 à 8 ans ont la stratégie de représenter le problème qu'ils veulent résoudre. Chaque élève essaye le chemin qui lui paraît le plus judicieux et le seul possible, et à travers la mise en commun ils comprennent la possibilité de suivre d'autres chemins, en acceptant le processus suivi par ses camarades. Ils n'ont pas encore la capacité de revenir en arrière d'un ou de plusieurs niveaux, quoiqu'ils aient une capacité assez développée et complexe qui leur permette de se confronter à des situations plus compliquées que celles que nous espérons qu'ils résolvent. Il peut s'avérer utile de générer un groupe de solutions possibles, à partir d'un problème déterminé, et ensuite de vérifier chacune d'elles pour voir si la solution est correcte.

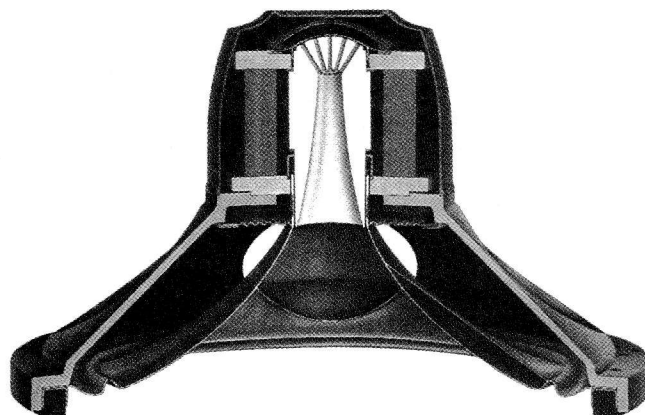
Les recherches sur l'instruction stratégique coïncident avec le fait que les problèmes, avant d'être proposés aux enfants, doivent être formulés clairement pour pouvoir être compris: ils ne doivent pas comporter de concepts mathématiques nouveaux; être intrinsèquement motivants et intellectuellement stimulants; ils doivent

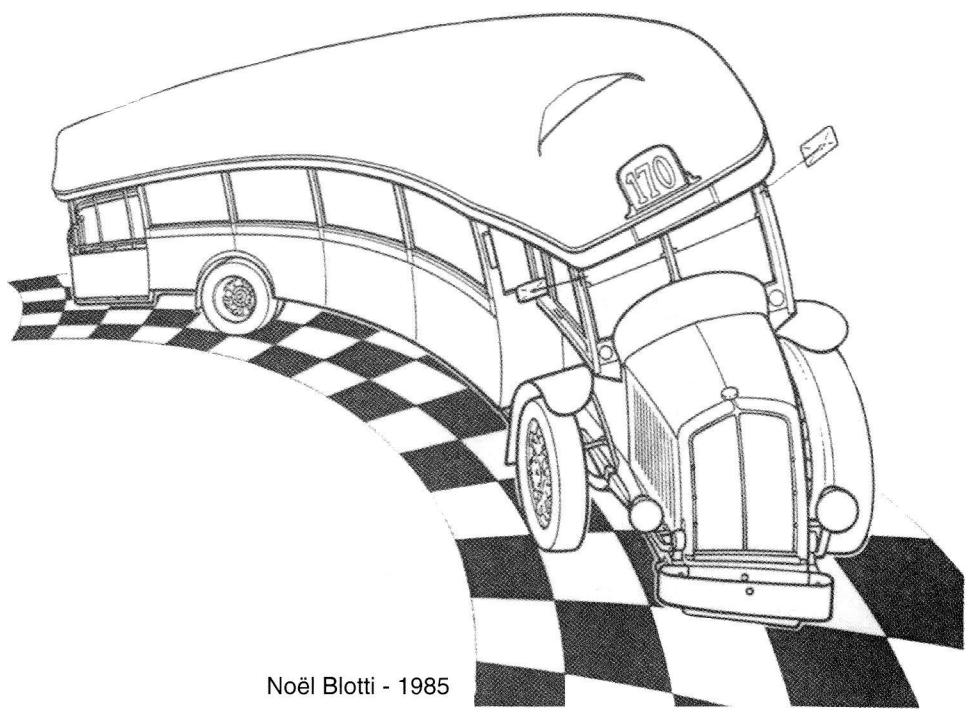
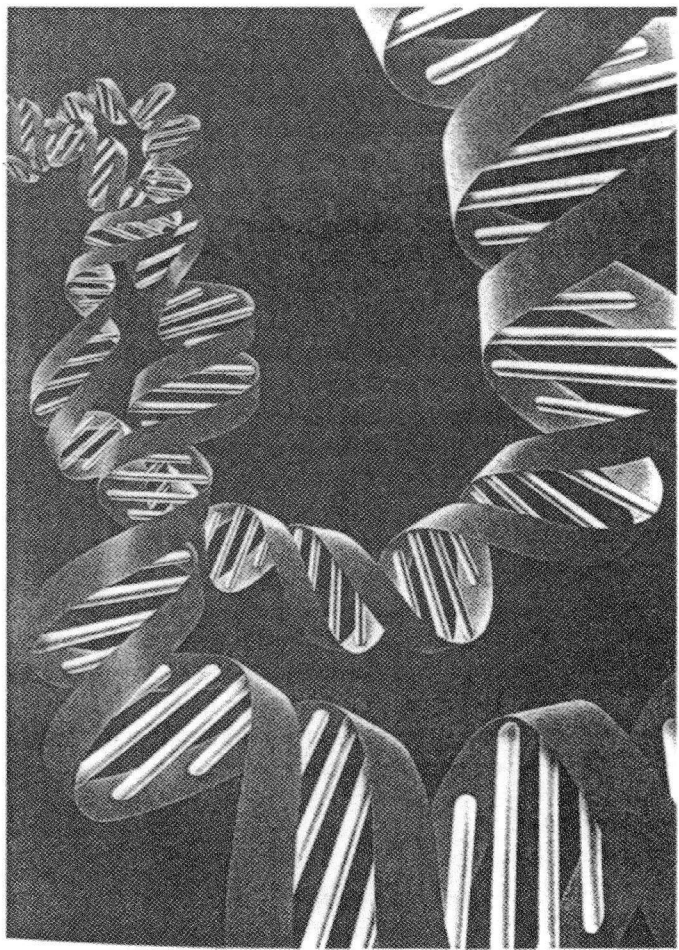
pouvoir être résolus par plus d'un raisonnement et permettre la généralisation à une variété de situations.

L'usage de la résolution de problèmes comme un composant fondamental du curriculum des mathématiques implique un changement radical de l'enseignant traditionnel, de l'exposition à la pratique des capacités.

Avec le domaine des mathématiques nous prétendons apprendre à générer et à utiliser les concepts avec les contenus et les habiletés. Les concepts se travaillent à travers les habiletés et les stratégies de raisonnement. Apprendre les mathématiques ce n'est pas seulement acquérir des concepts mais c'est aussi apprendre à penser (Kaplan, 1989). Pour cela il faut partir des connaissances antérieures de l'élève et favoriser la construction de la connaissance, en restructurant les connaissances selon les exigences curriculaires et en considérant tout l'apprentissage mathématique informel extérieur au contexte scolaire. □

*Article extrait de SUMA n°23. Revue sur
l'enseignement et l'apprentissage des
mathématiques.
Fédération espagnole des professeurs de
mathématiques. Saragosse.
Traduit par Miguel Ruda.*





Noël Blotti - 1985

Pour un service civil des mathématiques

Hélène Desmaret, Bordeaux

Guy Brousseau vient d'être distingué du diplôme de docteur honoris causa de l'Université de Montréal. Spécialiste de la didactique des mathématiques, il propose depuis de nombreuses années de nouvelles approches pour les enseigner.

"La science des conditions spécifiques de diffusion des connaissances mathématiques aux institutions et aux hommes" : telle est la définition que donne de la didactique des mathématiques un des spécialistes du sujet, Guy Brousseau, directeur du Laboratoire de Didactique des Sciences et Techniques de Bordeaux (LADIST).

On peut ainsi comparer la didactique, science qui étudie les conditions de la diffusion des connaissances, à l'économie qui, elle, étudie les conditions de la diffusion des biens matériels.

"L'une est à l'enseignement ce que l'autre est au commerce", explique Guy Brousseau.

Et il poursuit son raisonnement : *"la didactique traite aussi bien des théories que des pratiques de l'enseignement des connaissances mathématiques. Mais si elle décrit et compare au besoin ses méthodes, elle ne fournit pas plus de prescriptions que les sciences économiques ne fournissent de martingale pour la Bourse."*

Pour les mathématiciens qui se consacrent à la didactique, il s'agit donc de réfléchir à la réorganisation des connaissances et à l'invention de nouveaux problèmes mathématiques. Actuellement, un des enjeux majeurs de la didactique est d'être intégrée à la formation des enseignants dans les IUFM. Patrick Gibel, professeur de l'Université de Pau et des pays de l'Adour, qui travaille lui aussi au sein de LADIST, estime que *"cette idée, acceptée par d'autres pays européens, pose encore*

problème en France. On a tendance, ici, à enseigner d'abord des mathématiques et en plus une petite dose de pédagogie; on pense que ce sera suffisant pour former un bon professeur".

Mais ce point, s'il est essentiel, n'est pas pour autant le seul. En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques aux enfants de l'école primaire, Guy Brousseau explique pourquoi les spécialistes de la didactique ont leur mot à dire.

"On ne peut pas enseigner à tout le monde la totalité des savoirs sous leur forme savante. La question principale est donc : comment peut-on faire pour que le savoir enseigné aux enfants soit suffisant pour les amener ensuite au lycée, ou plus tard en faire des ingénieurs, sans qu'il soit trop lourd ?"

Depuis 1972, un Centre d'Observation et de Recherche en Enseignement Mathématique (COREM) est

opérationnel : les chercheurs de LADIST vont dans une école deux ou trois fois par semaine pour suivre le travail des enseignants et des élèves et en tirer un certain nombre de conclusions ou d'axes de recherche.

Plusieurs sont envisagés au sein du Laboratoire. Les thèmes vont de l'enseignement élémentaire de la technologie à l'enseignement de la géométrie aux non voyants en passant par la conception et la réalisation de didacticiels.

Le travail didactique aboutit à un certain nombre d'avancées et ouvre des accès nouveaux au savoir, même sur des sujets très anciens ou très élémentaires. Selon Guy Brousseau, *"la didactique permet à beaucoup d'élèves d'atteindre en quelques années les connaissances laborieusement manipulées par seulement quelques savants des générations précédentes"*.

"Vouloir imposer à tous les élèves les normes des forts en maths est une violence."

Il qualifie de "service civil" le fait d'apprendre les mathématiques, pour un enfant, même s'il n'en aura pas forcément besoin pour sa vie professionnelle.

Le rôle de la didactique est donc de tenter de rendre moins pénible et plus efficace ce service.

"Vouloir imposer à tous les élèves les normes des forts en maths est une violence, acceptée par ignorance de la didactique. Et la violence est le dernier refuge de l'incompétence."

Une division plus facile ...

... ou lorsqu'un simple changement de disposition permet d'y voir plus clair. Désormais, le dividende (nombre à diviser) sera placé à droite et le diviseur à gauche. Le quotient obtenu sera écrit au-dessus du dividende.

Le but est d'éviter le plus de calcul mental possible. L'enfant pose donc par écrit toutes les opérations qu'il fait. Cela lui permet de garder une trace de tous ses calculs et de reprendre son opération en d'interruption.

Exemple d'opération : 1 554 596 à diviser par 453.

On pose les nombres comme suit :

	3 4 3 2	le résultat n'apparaît qu'au fur et à mesure

453		
453 x 3 = 1359	1554596 -1359	on cherche combien de fois 453 est contenu dans 1554

	01955	on ôte le résultat du dividende, on descend le prochain
453 x 4 = 1812	-1812	chiffre et on inscrit 3 au résultat idem

453 x 3 = 1359	01439	
	-1359	on a déjà le résultat de 453 x 3

453 x 2 = 806	00806	
	-806	

	000	

Pour ceux que l'exercice intéresse, voici deux multiplications qui peuvent être arrêtées et reprises à tout moment : soit à calculer le résultat de 89 x 98

à gauche on	8 9 x 9 8	à droite on
inscrit	4 4 1 9 6	note le
les	2 2 3 9 2	double du
quotients	1 1 7 8 4	nombre
entiers	5 1 5 6 8	du dessus
successifs	2 3 1 3 6	et on le barre
dans la divi-	1 6 2 7 2	s'il correspond
sion par 2	=	à un quotient
	8 7 2 2	pair.
	pour obtenir le résultat,	
	on additionne les nombres	
	de droite non barrés	

Clins d'œil

Marcel Berger, Paris, 1985

Ce texte était joint au rapport scientifique de l'année 1985 fait oralement par Marcel Berger au Conseil d'Administration de l'IHES, Institut des hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette, dirigé aujourd'hui par Jean-Pierre Bourguignon. Marcel Berger nous a quitté cette année. Il s'était beaucoup investi dans le partage par tous des mathématiques et de la théorie du chaos.

Qu'est-ce qu'un cristal ?

Jusque dans les années 70, c'était (aux agitations thermiques près) un système triplement périodique. Dogme !

Preuve : clivages plans parfaits et bons angles, surtout diffractions aux rayons X (figure ci-dessous).

Ces pavages sont engendrés par é (ou 3) translations et itérées.

Du premier dogme (facile mathématiquement), on arrive au second : jamais de symétries pentagonales ou dodécaédriques.

Or, dans les années 70, une analyse plus fine, aux rayons X, montrait au moins deux réseaux distincts superposés : carrés de côté 1 et t , variant continuellement avec la température. Donc presque toujours incommensurables, donc aucune période. Le premier dogme devient faux.

En 1984, plusieurs équipes trouvaient des cristaux à symétrie dodécaédrale (refroidir très vite un alliage Al, 10-20% Mu).

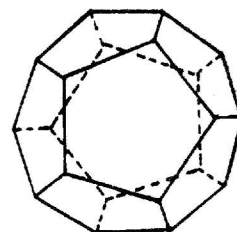
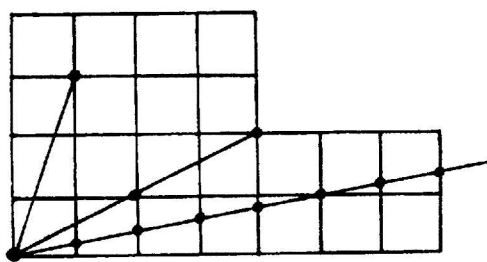
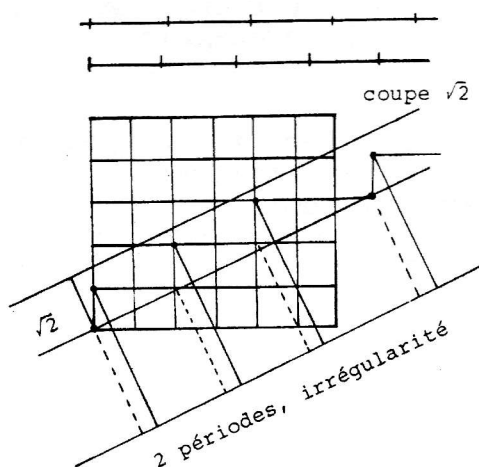
Les rayons X font apparaître une symétrie pentagonale.

Le deuxième dogme devient aussi faux !

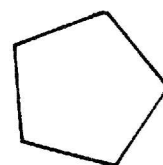
Ainsi, l'idée visuelle-géométrique était fautive. Il faut, pour rendre compte de la réalité, faire appel à des êtres mathématiques plus complexes (un cristal est une fonction "presque-périodique").

Mais pour avoir une symétrie dodécaédrale, il faut une abstraction : on considère un "vrai cristal" mais en dimension 4, 5, 6 et un cristal ordinaire sera une section, une coupe : sur terre, on voit seulement la projection de cette coupe.

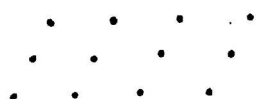
Dessins en dimensions 1-2 :



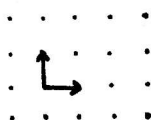
Dodécaèdre



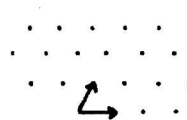
Le pentagone



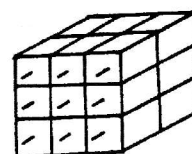
quelconque



carré



hexagonal



cubique

Typiquement en physique actuelle : ainsi le modèle Kalusa-Klein à 5 dimensions, actuellement un modèle à 10-11 dimensions, trois sont visibles, les autres correspondent à des constantes tellement petites qu'on ne sait pas encore "les voir". Mieux : dans la théorie des "cordes-supercordes", ajouter un nombre infini de dimensions ; une particule, c'est une courbe, à ne pas confondre avec sa trajectoire.

Pratiquement : en redescendant sur Terre (en 3 dimensions), on peut effectivement utiliser ces dimensions infinies, leurs symétries et obtenir des modèles correspondant à la réalité.

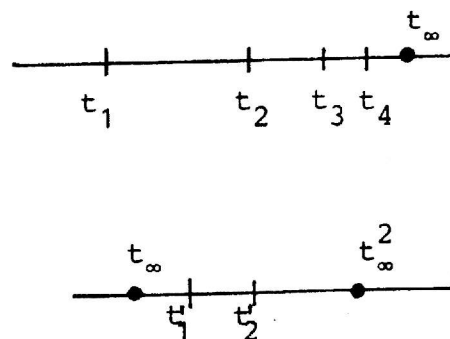
Les exposants de Feigenbaum

Un problème d'actualité (1985) est celui des transitions de phase : coup de bélier hydraulique, mur du son, eau qui bout, prédictions météorologiques.

Dans tous les cas, il s'agit plus ou moins de mécanique des fluides, donc de fonctions, donc de dimension infinie. L'idée est d'étudier des modèles simples, en particulier à un nombre fini de dimension s .

Expérience de Rauleigh-Bénard en 1900 :

Courants de convections, d'une certaine période. Température critique t_1 . Puis de nouveau changement en t_2 (période double), etc.: $t_3, t_4, \dots$ limite finie t_∞ .



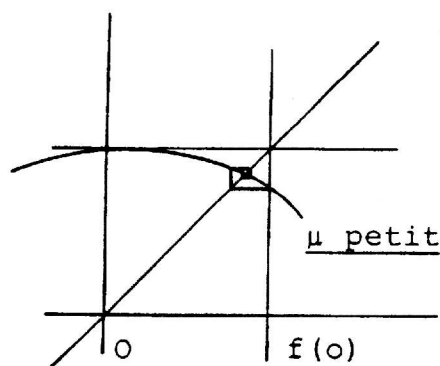
Pour étudier ces t , il y a quelques années, Feigenbaum imagina d'étudier un modèle à une dimension (fonction ordinaire) et conjectura ceci : après normalisation évidente, on ne peut rien dire sur les t_i eux-mêmes mais sur la façon dont ils tendent vers t_∞ : elle est universelle.

$$\frac{t_n - t_\infty}{t_{n+1} - t_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4,66$$

La vérification expérimentale a eu lieu la première fois par Libchaber en 1984 d'abord avec de l'hélium liquide puis avec du mercure à des températures raisonnables.

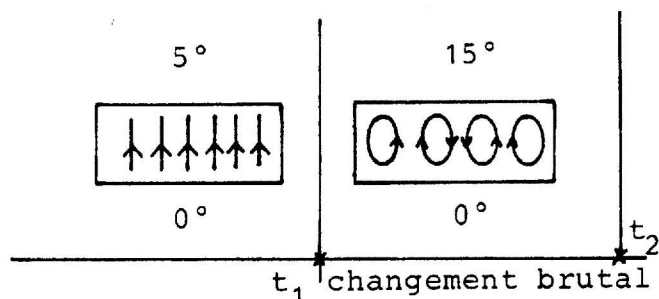
Feigenbaum prenait comme modèle la fonction $1 - \mu x^2 = f(x)$, les μ variant. On cherche ce qui se passe en itérant : $x, f(x), f(f(x)), \dots$ car c'est la façon pratique de résoudre une équation différentielle ou de trouver des points stables.

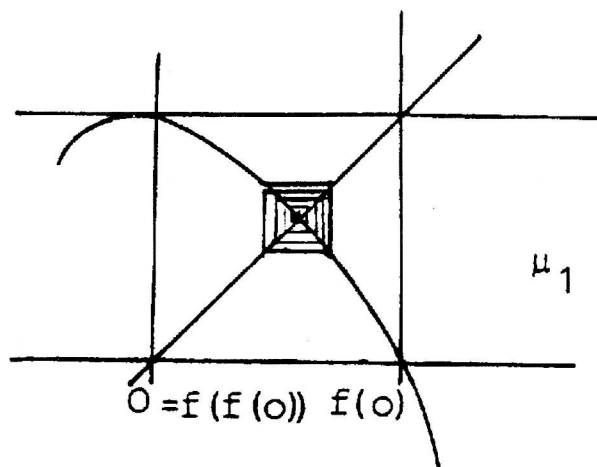
μ petit classique, un point fixe et converge jusqu'à ce que :



En t_∞ , le plus souvent on a un chaos (Ruelle-Takens).

Ensuite, on repart avec une période triple, puis ...





Il y a alors "bifurcation" et O apparaît avec la période 2.

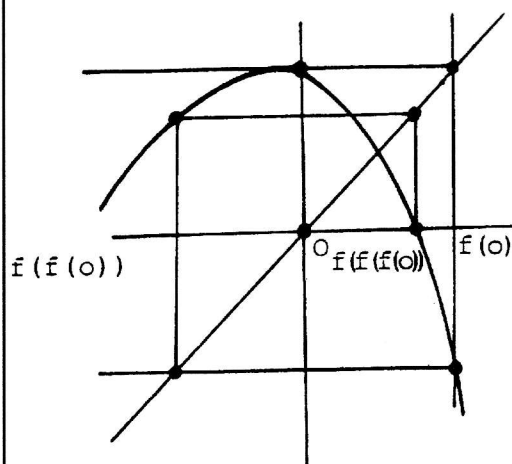
La valeur d'après, μ_2 ,

est quand $f(f(f(f(O)))) = 0$:

avec une calculatrice de poche,

Feigenbaum trouva la loi des μ_i : 4,66.

Il essaya plein de fonctions dos d'âne :



et trouva toujours 4,66.



Puis Lanford, Ruelle et Epstein étudièrent le cas à deux ou plus de dimensions.

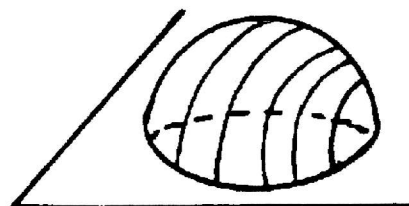
A l'automne 1984, en collaboration, Feigenbaum et Sullivan, ont obtenu des résultats dans cette direction.

Ici, pour comprendre un modèle de dimension infinie, on a utilisé des schémas très simples de dimensions très basses.

Inégalités isosysto- liques de Gromvov

Inégalités isopérimétriques classiques utiles : problème de Didon, relation entre:

longueur et surface,

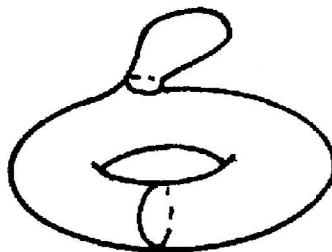


surface et volume.

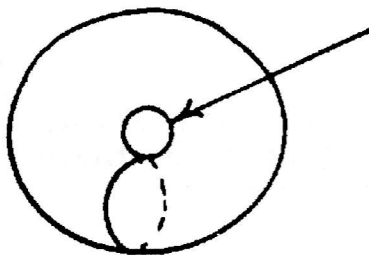
Isosystolique : surfaces de l'espace de type sphère



de type tore



systole l



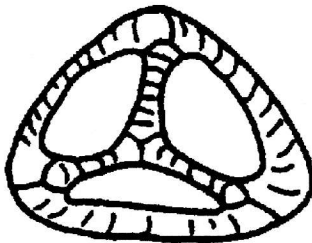
Question : une systole l donnée n'implique-t-elle pas une aire trop petite ?
 $a \geq l^2 \times \text{constante universelle}$? (aire = couche de peinture en cm^2)

Loewner 1966. oui $a \geq \frac{\sqrt{3}}{2} l^2$

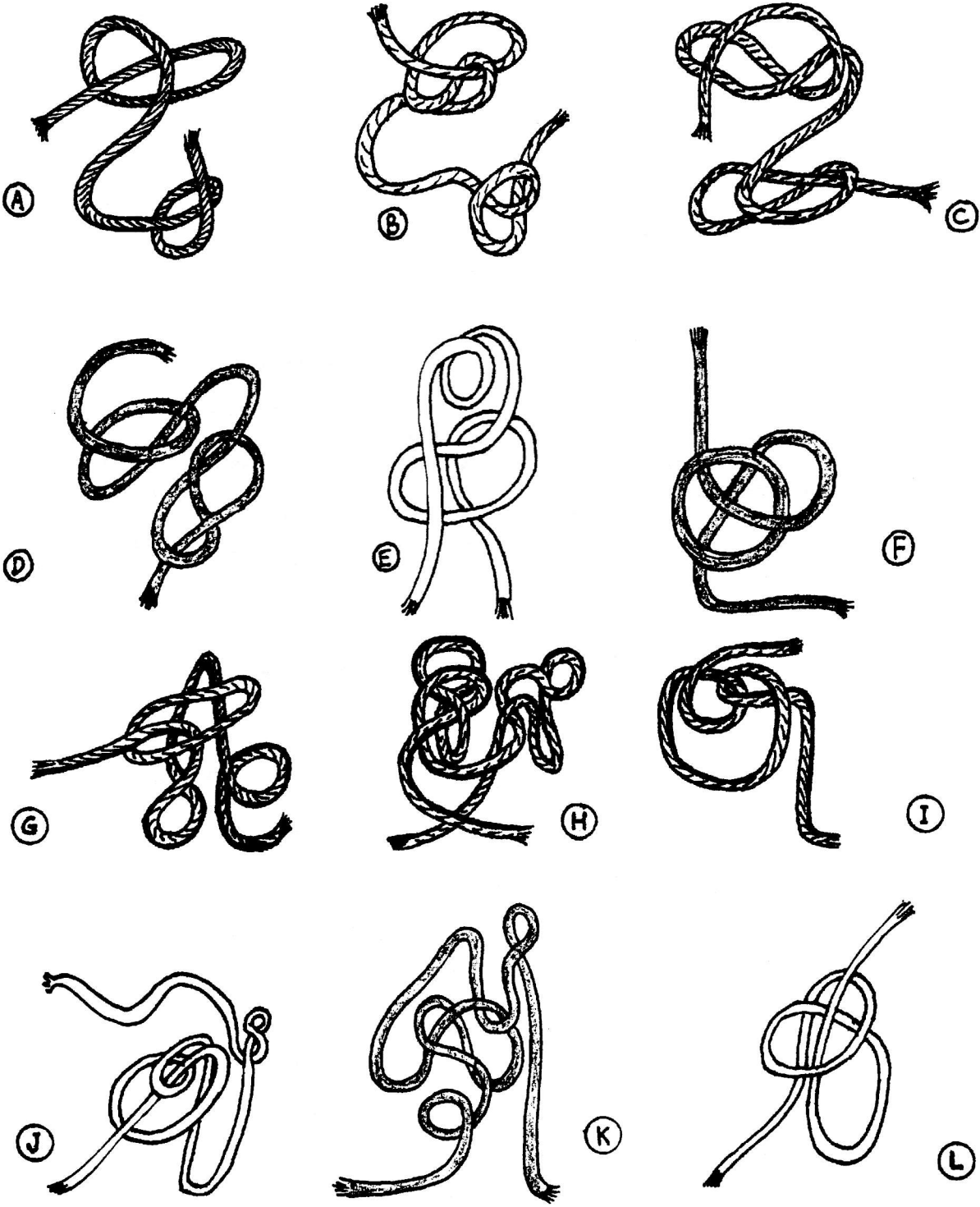
Surfaces plus compliquées à plus d'un trou : l trous

conjecture : à systole donnée, plus il y a de trous, plus l'aire doit être grande.
 $a \geq l^2 \cdot c(g)$, $c(g)$ tendant vers l'infini quand g tend vers l'infini.

Une réponse par l'affirmative a été donnée tout récemment par Gromov. $\square$



*Tirez par les deux bouts
Avec quelles cordes fera-t-on un noeud si on tire sur
les deux extrémités ?*



T'as pas 100 ... Francs

Claude Alain Blatti, Lausanne

Réunir 50 élèves dans un couloir, c'est surprenant. Si, de plus ces élèves sont issus de classes difficiles, c'est courir un risque non négligeable. Enfin, si on ajoute que le déroulement de l'atelier n'a pas pu être planifié strictement, on parlera de négligence, voire d'irresponsabilité. Et pourtant...

L'atelier

A l'origine de cette activité, un double constat:

- les élèves qui travaillent avec de la monnaie, lors des soirées scolaires, par exemple, craignent les erreurs liées au stress : il faut rendre vite et juste à de nombreux clients impatients;
- travailler un concept mathématique au moyen de la monnaie plaît aux élèves car ils se sentent en terrain connu et concret.

Préparation

Un atelier centré sur le billet de 100 francs est donc planifié. 4 classes de la sixième à la troisième sont concernées. L'introduction est prévue sous la forme la plus simple : un billet de 100 F. est présenté sans aucun commentaire.

De toutes les interventions des élèves, seuls les concepts mathématiques abordés seront notés sur un tableau noir mobile par un des enseignants présents.

Nous avons aussi défini deux activités communes à tous les groupes soit :

- compléments à 100 F.
- je paie la tournée et je contrôle le serveur.

Chaque enseignant traitera ces deux notions comme des "ballons" permettant de respirer de temps à autre.

Partie collective, dans les couloirs

D'emblée, la représentation nouvelle intrigue les élèves. Ils ne perçoivent pas le but poursuivi. C'est nouveau et ce flottement engendre un temps de réflexion.

Suite à une ou deux interventions, la machine est lancée; le sujet est porteur et les élèves se piquent au jeu : il n'y a pas d'autre problème que celui de canaliser les réponses qui fusent de partout. Cette partie initiale ne prendra qu'une quinzaine de minutes, déplacements compris.

Ci-dessous, en gras, les concepts énoncés par les élèves. Pour information, vous trouverez aussi - en maigre - ceux que les enseignants avaient envisagés au préalable et pour lesquels un minimum de documentation avait été réunie :

- coûts divers
- **contre-valeur**
- cours de l'or
- **échanges**
- troc
- **fabrication monnaie**
- revenus par profession
- **salaires**
- **épargne**
- **achats à crédit**
- carte de paiements
- **achats au comptant**
- intérêts composés
- **voyager**
- **achats au magasin**
- **intérêts**
- **comparaison de prix**
- **remises**
- **pourcentages**

Certaines propositions n'avaient pas été prévues comme :

- **gains aux jeux (loterie)**
- **successions**

Après cette entrée en matière, le

maître animateur demande alors aux élèves de choisir l'atelier dans lequel ils souhaitent travailler. L'instinct grégaire favorise des groupes relativement importants qui sont pris en charge par un enseignant et répartis dans les classes disponibles. Il est à noter que certains groupes étaient formés par des élèves de 2, 3 voire 4 classes différentes.

Le maître de la plus jeune classe a jugé prudent de dissuader certains enfants de s'inscrire dans le groupe "changes", largement au-dessus de leurs possibilités.

Les travaux de groupe

- Le vendeur itinérant

Chaque élève doit vendre des produits choisis collectivement. Pour cela, il faut argumenter et/ou faire baisser le prix initial par des remises en pourcentages. Les acheteurs cherchent à obtenir le prix le plus favorable possible, en contrôlant les prix avancés. Remarquons que cet atelier fut dirigé par le professeur de français. Il a donc axé le travail sur des situations de communication. La recherche des arguments et le calcul de prix avant les jeux de rôle a été bien reçue. par contre, il y a eu beaucoup de réserves sur la seconde partie car *"c'est pas possible d'évaluer de tête si le prix est juste"*.

Le stade suivant aurait été de faire prendre conscience aux élèves de cette limite, donc de se munir d'un accessoire de calcul si un achat onéreux était envisagé.

La loi du marché

- Changes

Après avoir consulté les pages relatives aux cours de bourse d'un quotidien puis décrypté leur signification, les élèves ont transcrit les variations de quelques valeurs sous la forme de diagrammes.

Après les deux périodes initiales, ils ont dû suivre les cours de certaines valeurs boursières durant une semaine et transcrire celles-ci par des diagrammes en

colonnes.

Certains indices boursiers font l'objet du même suivi, mais les élèves n'ont pas maîtrisé le sens des indices moyens.

Lors du second atelier, élèves et maîtres ont tenté d'expliquer ces variations.

T'as pas 100 ... francs ?

- Manipulations

Travail proche de la réalité avec recours à des photocopies et des pièces factices. C'est le jeu du magasin qui a permis à des élèves de 5ème de travailler sur l'estimation de la valeur des produits, sur la possibilité de les acheter avec 100 F. et sur le contrôle de la monnaie rendue par un élève-magasinier.

J'ai gagné à la loterie ...

- Jeux de hasard

Approche empirique des probabilités. Il est à relever que ce groupe, certes restreint, a travaillé sans maître attiré. Les élèves se sont accrochés longuement sur la loterie à numéros. Une approche a été faite par des tirages de 2 ou 3 chiffres sur 4, 5 ou 10.

S'ils ont trouvé les réponses aux situations simples, ils ont lourdement insisté, avec succès, pour connaître l'outil qui permet de déterminer le nombre de possibilités dans le cas de la loterie à numéros.

Tout travail mérite salaire, mais quel salaire ?

Une situation *"mon aide ménagère à domicile reçoit 1.500 F. par mois"* a permis d'aborder les charges sociales, la relation salaire-travail et le matériel utilisé dans cette profession.

Le professeur a recentré sur 100 F. par des questions telles que :

"Quelle partie du logement serait nettoyée si je la payais 100 F. ?".

Assuré par le professeur de français, cet atelier n'a pas permis un envoi vers la capacité d'achat que représente 100F., but initialement défini.

Je te déshérite ... T'as pas le droit !!!

- Droits successoraux

Fort heureusement, le livre de droit des 3èmes explique clairement les situations *"avec testament"* et *"sans testament"*. Les situations possibles ont été visualisées par des arbres généalogiques, portant chaque fois sur un héritage de 100 F.

Si la répartition en tantièmes n'a pas suscité de remarques, les élèves se sont unanimement offusqués des restrictions légales sur les droits des héritiers. Accessoirement, du point de vue des maths, ils ont enfin vu une utilisation pratique des codes fractionnaires.

Pour conclure

- Le travail a été réalisé sur 2x2 périodes.
- Le travail de notions mathématiques dans un contexte précis et avec un fil rouge com-

mun semble une forme de travail qui plaît aux élèves.

- Notions travaillées :

Somme constante - changes - pratique de l'addition - pratique de la soustraction - pourcentages - notions comptables et économiques - probabilités - codes fractionnaires.

- Il y a deux types de décalages :

- le premier entre ce que les maîtres avaient prévu et ce que les élèves ont avancé;
- le second entre le travail de la notion telle que les enseignants de maths l'avaient envisagé et le travail effectué par l'enseignant de français, par exemple.

Ce clivage est source de remise en question pour les enseignants : travaille-t-on la matière ou alors, peu à peu, celle-ci n'est-elle pas subtilement transformée par le maître pour qu'elle "passe mieux" ? Et si c'est le cas, est-ce un bien ?

Ce décalage est aussi une chance pour les élèves. Le maître n'est plus une source fiable de renseignement ou de jugement. Nous avons constaté que les élèves remettaient en question certaines appréciations de maîtres "non spécialistes".

Faudrait-il développer, voire systématiser ce type d'échanges ?

A vous de répondre . ☐



Achetez un billet de 100 euros !



Laboratoire d'économétrie
Ecole polytechnique

L'analyse de ce jeu éclaire les risques et les bénéfices de la libre concurrence.

Les maths et les jeux

"Il est plus facile d'apprendre les mathématiques que de tenter de s'en passer" a dit Henri Cartan. Les mathématiques, très utilisées dans les sciences physiques, sont également fort utiles à l'économiste. Lorsque ce dernier analyse des situations impliquant "un petit nombre de paramètres", il a souvent recours à la théorie des jeux (ces situations concernent tout particulièrement l'étude des secteurs industriels concentrés comme les télécommunications, l'automobile, la production de pâte à papier..., où le nombre de concurrents est très réduit, mais aussi les questions de coordination de politiques macro-économiques au sein de la CEE, du G7, etc.).

La théorie correspondante doit son appellation à l'attrait exercé sur les mathématiciens par l'analyse des jeux de société, situations qui fournirent les premiers modèles pour les développements ultérieurs. Ces mathématiques permettront, dans un avenir proche, de résoudre complètement les jeux les plus répandus comme les dames, les échecs ou le bridge. Elles peuvent déjà élucider totalement les jeux tels que le jeu de Marienbad. On peut s'interroger sur l'avenir des jeux complètement résolus : restera-t-il encore des joueurs d'échecs lorsque les machines, en vente à prix modique dans les supermarchés, battront même le champion du monde ?

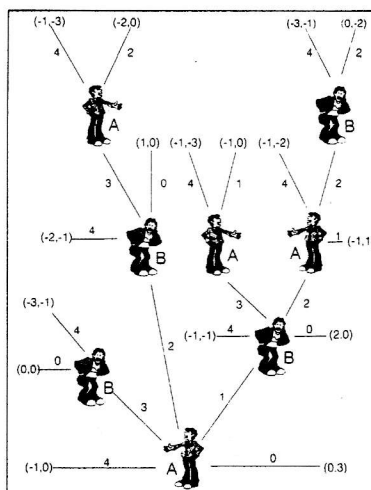
Les jeux économiques

L'analyse des jeux "économiques" est rendue délicate par le fait que ces jeux ne sont plus à "somme nulle", mais à

“somme non nulle”. Dans un jeu de société, ce que l’un perd, l’autre le gagne. Dans un jeu économique, il faut simultanément faire croître le gâteau et se le partager. Hélas, bien souvent ces deux objectifs sont difficiles à concilier, et une compétition ruineuse peut détruire plus de richesses qu’elle n’en crée. Qu’apportent dans ces cas les mathématiques ?

Elles soulignent l'importance de la "*connaissance commune*" pour éviter de tomber dans des pièges dus à la poursuite d'un intérêt purement individuel qui ne tiendrait pas compte des réactions "rationnelles" des autres. En effet, la théorie des jeux fournit un cadre original qui permet d'explorer simultanément les implications logiques associées à des présupposés individuels. Lorsque ces présupposés sont connus de tous, la solution est facilement calculable, et ses propriétés économiques sont faciles à évaluer (c'est la connaissance commune). Lorsque ces présupposés ne sont pas connus, le désastre est pratiquement certain. La théorie nous enseigne donc à cerner rapidement les éléments clés sur lesquels il faudra que les concurrents s'entendent. Evidemment il restera encore à les mettre en œuvre... Cependant, un problème bien posé est déjà à moitié résolu.

Le jeu de la vente aux enchères d'un billet de 100 euros illustre les difficultés, les limites et l'intérêt de telles études.



1 - Arbre du jeu de la vente du billet de trois francs. A coté des traits figure la mise totale du joueur et, entre parenthèses, les pertes ou les gains de chaque joueur.

Imaginons qu'une personne (le commissaire-priseur) mette aux enchères un billet de 100 euros, avec la règle que les deux derniers enchérisseurs paient au commissaire-priseur la somme qu'ils ont mise en dernier ; le dernier enchérisseur garde le billet de 100 euros ; l'avant-dernier enchérisseur perd la totalité de sa mise. Vous pouvez expérimenter la situation au cours d'une soirée, et vous avez, comme nous allons le voir, tout avantage à jouer le rôle du commissaire-priseur.

Le commissaire-priseur joue et gagne

Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait que deux enchérisseurs A et B (il s'agit d'un jeu à deux joueurs) et que les enchères augmentent par montant de 10 euros. A mise 10 euros et B renchérit en misant 20 euros. Si A ne fait rien, il perd 10 euros et B, qui empoche le billet, gagne 80 euros. La situation reste similaire au cours des enchères suivantes, jusqu'à ce que la somme des deux enchères atteigne la valeur du billet : par exemple, A a misé 40 euros et B 50 euros. Au cours du déroulement des enchères, c'est la première situation critique. Que fait A ? S'il abandonne, il perd 40 euros et B en gagne 50. Si A mise 60 euros, il risque ces 60 euros et peut gagner 40 euros ; B s'il arrête alors, perd 50 euros et le commissaire-priseur gagne 10 euros. Une première solution apparaît en pleine lumière, mais les enchérisseurs auraient pu l'entrevoir avant : A et B peuvent s'entendre pour faire perdre le commissaire-priseur en arrêtant les enchères très tôt et en se partageant ensuite la différence entre 100 euros et le total de leur mise. On

dit que cette technique est pratiquée par les professionnels dans les salles de ventes.

En termes juridiques, nous sommes dans une situation d'entente, et cette pratique serait passible de fortes amendes. La théorie des jeux sert maintenant de référence pour "*dire*" pourquoi il y a entente. Dans ce cas précis, des présupposés qui consisteraient à se mettre d'accord à l'avance sur le dos du commissaire-priseur ressembleraient, sur un marché, à une entente sur les prix, entente défavorable aux consommateurs (ici représentés par le commissaire-priseur). Les profits acquis correspondants seraient "*injustes*".

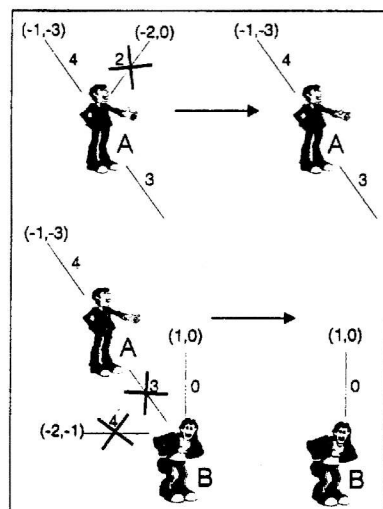
L'entente illicite

Donc A et B ne peuvent pas s'entendre, ce qui veut dire que les enchères doivent continuer tant que chacun d'eux estime que c'est dans son propre intérêt. Souvent ils continuent à miser pour ne pas perdre leur dernière mise. Une seconde situation critique apparaît quand l'enchère d'un des joueurs dépasse la valeur du billet. B vient de miser 100 euros et A s'interroge : dois-je perdre ma dernière mise avec certitude, par exemple 90 euros, ou enchérir à 110 euros et, si B abandonne alors, ne perdre que 10 euros ? Le malheur pour A et pour B est que B, après la dernière enchère de A, se tient un raisonnement analogue (avec une enchère possible de 120 euros). Dans la pratique, les deux joueurs A et B continueront à enchérir jusqu'à ce qu'ils atteignent la somme maximale qu'ils peuvent ou veulent perdre. Le paradoxe est que A et B risqueront plus de 100 euros, alors qu'ils sont maintenant certains de perdre quelque chose, et cela pour perdre moins !

Ce type de paradoxe apparaît dans de nombreuses situations sociales : courses aux armements, courses aux brevets, escalades commerciales diverses. Pratiquée au cours de soirées entre amis, la vente du billet de 100 euros aboutit le plus souvent à l'enrichissement du commissaire-priseur.

L'arbre des jeux

Pour illustrer un raisonnement de théoricien des jeux, reprenons cet exemple



2 - Les décisions rationnelles permettent d'éliminer les branches "dominées"

en détail en réduisant quelque peu le montant des enchères pour faciliter les calculs: le dernier enchérisseur empoche trois euros (au lieu de 100 euros); A et B disposent chacun, au départ, d'une somme de quatre euros; les enchères se font par un franc (au lieu de dix euros). La figure 1 représente "l'arbre de jeu".

Cet arbre va nous aider à explorer les décisions rationnelles. Nous allons déjà supprimer des branches "dominées"; nous supposons que les deux joueurs cherchent à maximiser leur gain ou à minimiser leur perte.

La branche supérieure, où le joueur A abandonne (mise 0) ou mise 2, pour une mise totale de 4, donne pour résultat (-1, -3) ou (-2, 0). Il est clair qu'il préfère ne perdre qu'un franc (résultat -1) et n'abandonnera pas. Nous pouvons donc supprimer la branche où il abandonne. Nous avons supprimé une branche. Au coup précédent, le joueur B a maintenant trois possibilités: il abandonne et perd 0, il enchérit de 3 et perd 3, il enchérit de 4 et perd 1. Il choisira de minimiser sa perte et abandonnera. Nous éliminons deux branches (voir la figure 2).

De proche en proche, nous supprimons ainsi diverses possibilités pour arriver à un arbre réduit (voir la figure 3).

A ce stade, deux scénarios rationnels apparaissent clairement: ou bien A choisit la branche 2 et obtient un franc (en général, ce scénario revient à enchérir de la valeur du billet moins la mise incrémentale de un franc) ou bien il choisit la branche 1 et obtient deux euros (en général, ce scénario correspond à enchérir du "reste" de la division euclidienne du budget disponible pour le montant du billet, soit ici $4 = 1 \text{ modulo } 3$).

Le premier scénario correspond à un raisonnement à la marge typique de la théorie de la concurrence parfaite. Le deuxième scénario correspond à la "concurrence imparfaite", c'est-à-dire à un raisonnement valable lorsqu'on fait face à un petit nombre d'agents. Il faut alors étudier les anticipations de chacun avec une grande finesse. Après une enchère de un franc, B doit "observer" qu'une surenchère de sa part ne pourra qu'entraîner "un coup de massue" de A (enchérir tout de suite de la totalité de la valeur du billet, ici trois euros), même si cette stratégie est "indifférente" par rapport à sortir du jeu. En effet, il serait contradictoire pour A de commencer par enchérir de un franc s'il anticipait ensuite d'abandonner (ce qui justifierait la suren-

chère de B et rendrait incohérent le choix initial de A).

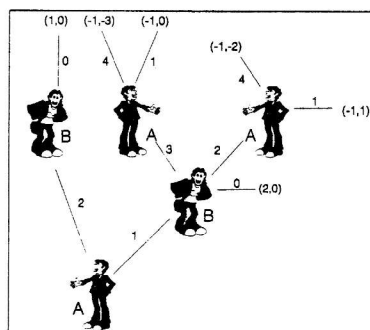
Entente ou concurrence

Tandis que le premier scénario conduit en gros à l'élimination des profits (ce qui est un résultat général pour les situations relevant de la concurrence parfaite), le second préserve un profit, profit qui ira à celui qui, par hasard ou parce qu'il a les coûts d'accès les plus bas, fera la première "bonne" enchère. Encore faut-il que les autres soient fair-play en attendant d'être, par hasard ou parce qu'ils auront alors les coûts d'accès les plus bas, les premiers à enchérir dans une nouvelle partie.

Préserver les profits qui sont "justes" est une bonne chose pour la société, car les profits sont la récompense d'une action entrepreneuriale qui bénéficie à tous (dans cet exemple, il n'y a pas d'action entrepreneuriale proprement dite; en général celles-ci sont associées à la création de nouvelles technologies, de nouveaux produits, à des implantations judicieuses..., et la peur des copies, des imitations ou des surenchères abusives peut limiter ces actions).

Résumons-nous: lorsqu'il y a un petit nombre d'agents, une compréhension fine des enjeux stratégiques est utile à tous. Cette compréhension permet de montrer que la frontière est fragile entre les situations de concurrence destructrice, l'entente abusive et la concurrence saine et loyale. Au moment où les interdépendances entre nations se multiplient, ce message n'est pas sans intérêt.

L'étude des situations de concurrence imparfaite et des modes de réglementation les plus favorables pour la société dans son ensemble constitue l'un des axes de recherche du Laboratoire d'économie de l'Ecole polytechnique. □



3 - La suppression des branches dominées fait apparaître deux stratégies possibles

