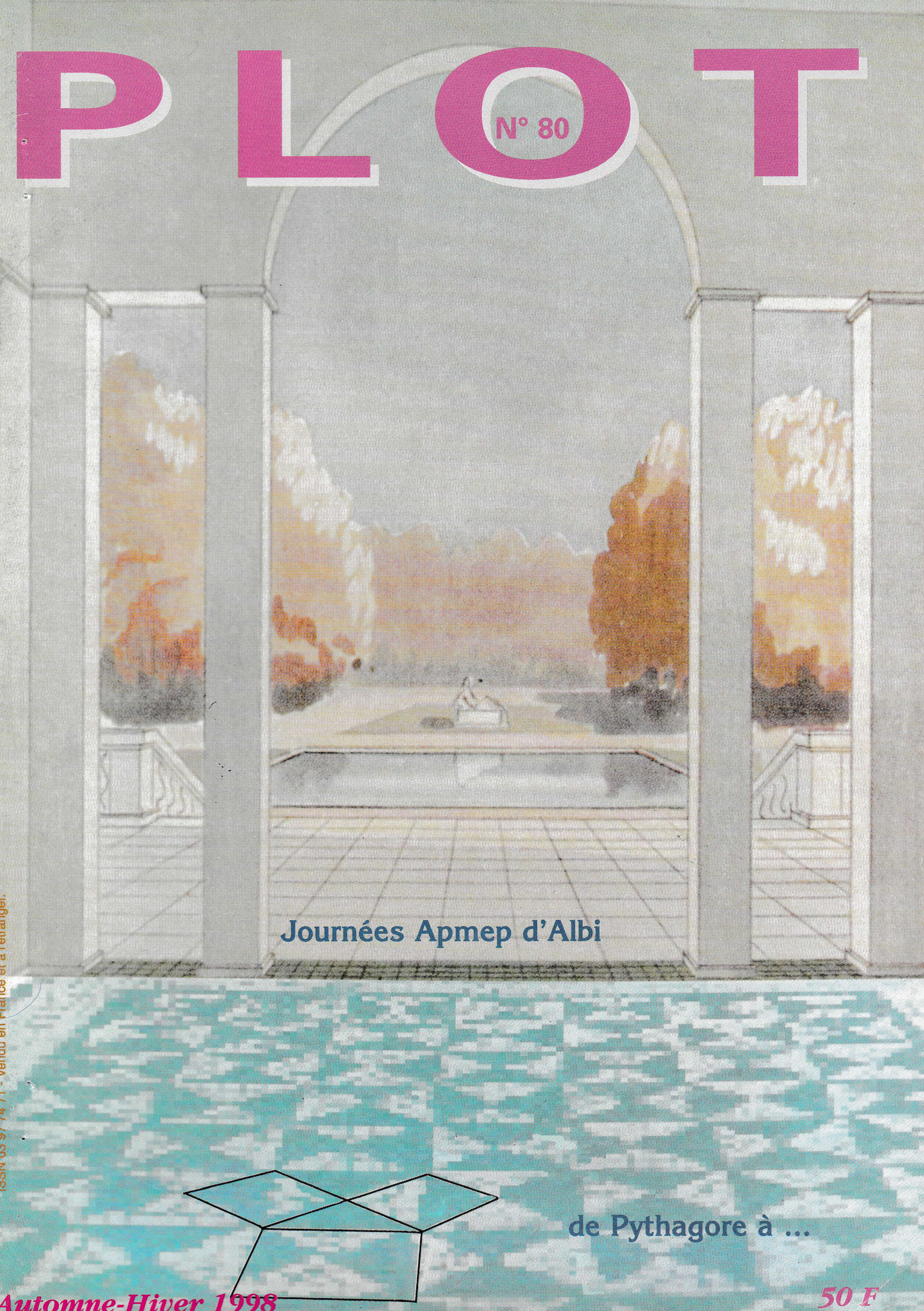
# PLOT

N° 80



Journées Apmep d'Albi

de Pythagore à ...

Automne-Hiver 1998

50 F

ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger.

# Plot n° 80

## Les journées nationales d'Albi

**Directrice de publication**
Marie-Laure Darche-Giorgi

**Responsable de rédaction**
Michel Darche

**Secrétariat**
Madeleine Schlienger

**Comité de Rédaction**
Jacques Borowczyk
Daniel Boutté
Michel Clinard
Gérard Chauvat
Roger Crépin
Luce Dossat
Georges Le Nezet
Serge Parpay
Michel Soufflet
Raymond Torrent

**Abonnements**
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

**Prix d'abonnement**
150 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 130 F
Abonnement étranger : 150 F
+ tarif avion

**Photocomposition et maquette**
i.c.e.- Limoges

**Impression**
Fabrègue - St-Yrieix

**Editeur**
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans - Tours, Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse, Brest, Caen, Clermont-Ferrand et La Réunion

**Diffusion**
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du Ministère de la Coopération et de la Francophonie

# SOMMAIRE



# EDITORIAL

En 1971, à Toulouse, à l'initiative de Christiane Zehren, les journées nationales de l'APMEP ont, pour la première fois, comporté des "ATELIERS". Ceux-ci n'ont cessé, depuis d'être une caractéristique appréciée des journées.

Leurs comptes-rendus étaient traditionnellement accueillis par PLOT, les Conférences allant au "Bulletin Vert" de l'Apmep.

Le gros Bulletin Vert n°410 est devenu "Actes des journées 1996 d'ALBI". Ainsi le Bulletin national Apmep peut-il accueillir beaucoup de comptes-rendus d'Ateliers.

Autant de moins pour PLOT ! Mais vous verrez, ici, que le PLOT a su tirer, avec le concours des auteurs, le meilleur parti de ceux qui lui ont été dévolus.

Qu'ils en soient tous ici remerciés de prolonger ainsi les "Actes d'Albi" au nom des organisateurs des Journées et des publications nationales de l'Apmep.

*Henri Bareil*

**Les prochains numéros du Plot :**

- **Des outils pour l'astronomie au Collège (numéro spécial)**
- **Didactique et mathématique au Collège**

# Ecrit contre oral, analogique ou numérique

Richard Blavy, Mervilla (31)

## Contribuer à la formation

L'introduction du propos, s'agissant de parler de l'enseignement des mathématiques, oblige à le situer dans son parti pris à la formation de l'enfant ou de l'adolescent, à sa transformation en un adulte intégré dans le monde moderne.

Ceci nous conduit à définir une philosophie de notre action, peut-être implicitement reconnue ou inconsciemment vécue, nous professons la sagesse, nous recherchons à éveiller chaque être à son sens de la vie ; tel est le tableau vivant auquel nous contribuons par notre présence face aux élèves et notre comportement responsable.

Notre inscription dans la formation de l'adolescent passe par la reconnaissance d'un esprit et d'une âme déjà éveillés, d'un être que rend vulnérable une sensibilité aigüe. Former chacun de nos élèves, lui permettre d'épanouir ses potentialités, d'asseoir sa personnalité et d'engager sa responsabilité.

L'évidence de ce rôle du professeur de mathématiques se dissimule derrière des contenus nécessairement délimités par un programme, s'oublie dans la routine de l'acte quotidien et s'englue dans la matière elle-même.

On admire peu l'exploit du professeur de mathématiques qui conduit une classe de seconde sur une année, à raison de six heures hebdomadaires pour le professeur... cela est banal puisqu'il s'agit de la réalité de milliers de classes de seconde. Vainqueur de la routine, il a pu hisser le niveau de ses élèves ; les convaincre du bien fondé de son enseignement!

## A propos d'un thème

Afin de concrétiser l'intention déclarée, nous devrions expliciter une praxis qui permettrait de la traduire et la mettre en oeuvre au quotidien. Contribuer par ce travail à approcher cet objectif, ouvrir une voie praticable, tel est le projet plus modeste auquel nous pouvons nous consacrer.

Le thème proposé ici concerne la partie du programme de seconde énumérant les contenus (pages IX et XX), leur introduction et leur étude s'agissant de <u>"développer une vision géométrique des problèmes, notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation "</u> (page VII). Nous devrons aussi penser que l'enseignement en seconde s'adresse à tous les élèves, à la veille d'un choix d'orientation parmi les plus importants.

Essayons de voir comment nous pourrons mettre en pratique l'intention affichée.

1 - Le contenu du sujet choisi aborde l'articulation géométrique et analyse en seconde. Dans la pratique en classe de seconde : mettre en concurrence les démarches géométrique et algébrique en vu de dérouler l'essentiel du programme.

2 - Pour prendre du recul par rapport à cette pratique, et peut-être rendre compte comment l'intervention va au-delà d'un simple enseignement des mathématiques et contribue à la formation de la personne, nous pourrons initier l'étude du langage employé et mis en place en classe de seconde.

## La géométrie : fil rouge

**1 - Les contenus du programme**

Décrivons comment la géométrie peut

intervenir au niveau des différentes rubriques du programme.

La première rubrique des contenus à enseigner en classe de seconde porte sur des problèmes numériques et algébriques.

Les nombres réels peuvent être représentés par les points d'une droite, on interprétera en géométrie toutes les opérations sur les réels. Les intervalles y sont dessinés, et la valeur absolue est définie à partir de la distance. Classiquement les systèmes d'équations et d'inéquations sont interprétés en géométrie plane.

Les fonctions qui sont à l'étude dans la deuxième rubrique, donnent lieu à une étude graphique donc géométrique. Les courbes représentatives des fonctions affine, carré, cube et inverse peuvent être définies en géométrie affine par de simples constructions à la règle. Les fonctions circulaires sont définies géométriquement à partir du cercle trigonométrique.

La rubrique statistiques est à considérer à part, nous ne la prendrons pas en compte.

La dernière rubrique a pour sujet la géométrie.

Ayant vu que la géométrie est utilisée à chaque rubrique, hormis en statistiques, il reste à montrer comment la mettre en oeuvre de façon cohérente, voir que son langage est universel, si c'est possible!

Plusieurs éléments y contribuent :
- premièrement, la géométrie de la droite est étudiée en plongeant la droite dans le plan et en utilisant les mêmes transformations : les homothéties et les translations.
- deuxièmement, les réels pour la droite, et les vecteurs pour le plan ont des rôles analogues.
- troisièmement, les constructions géométriques des courbes représentatives des fonctions carré, cube et inverse confortent la cohérence des points de vu géométrique et algébrique.

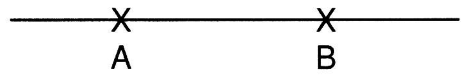
Décrivons de quelle façon nous pourrions procéder pour introduire la géométrie dans cet esprit, pour ce qui concerne les points inhabituels.

**2 - Les outils de la géométrie affine**

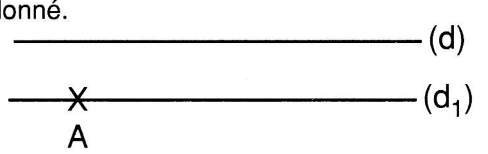
Quel traitement allons nous faire de la géométrie ?

On se plongera dans le plan, avec à notre disposition des points et des droites données ou à construire.

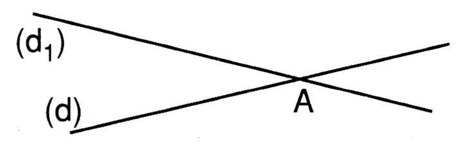
Nous saurons nous servir de la règle pour construire : la droite passant par deux points,



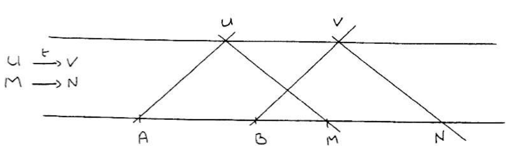

la parallèle à une droite donnée par un point donné.



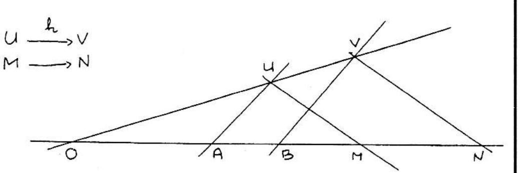

le point de concours de deux droites.




Considérant deux points distincts A, B, nous disposerons de la translation qui envoie le point A sur le point B.




Considérant trois points distincts alignés O, A, B, nous disposerons de l'homothétie de centre O qui envoie le point A sur le point B.

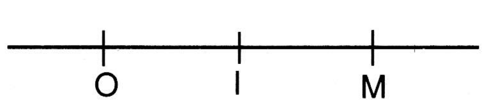



Ceci permet d'explorer toute la géométrie affine du plan. Nous poursuivrons au §4 après avoir considéré la géométrie de la droite au §3.

**3 - Nombres réels et géométrie de la droite**

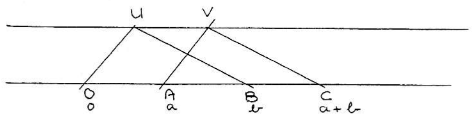
Pour l'étude de la géométrie de la droite et des nombres réels, on se placera sur une droite plongée dans un plan.

On désignera un repère {O ; I} sur cette droite. Chaque point M de la droite représente un réel x, son abscisse.

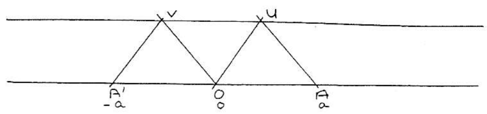


Soient A(a) et B(b).

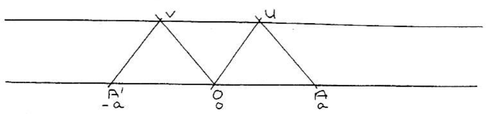
Nous obtenons le point C(a+b) comme image de B par la translation qui envoie O sur A.



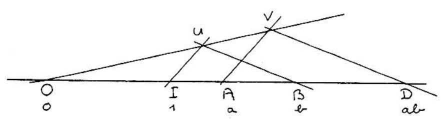

Nous obtenons le point A'(-a) par la translation qui envoie A sur O.




Nous obtenons le point D(ab) comme image de B par l'homothétie de centre O qui envoie I sur A.




Nous obtenons le point $A^{-1}(a^{-1})$ par l'homothétie de centre O qui envoie A surI.




L'identification d'un nombre réel comme un point de la droite se trouve d'emblée réalisée. Les opérations sont interprétées géométriquement.

*Cette initiation peut s'envisager explicitement du point de vue concret : le plan est celui de la feuille ou du tableau. Les droites sont tracées à la règle.*

Remarque : A la prendre à la lettre, cette initiation pourrait se considérer de façon abstraite et serait susceptible d'autres représentations concrètes.

Le parcours d'une droite de gauche à droite, sinon de bas en haut, définit l'ordre des points. On choisira un repère {O;I} dans cet ordre. Ainsi l'ordre concret des points sur la droite coïncide avec celui des nombres réels. On découvre les intervalles simultanément des points de vu numérique et géométrique.

Le sens d'un couple de points (M;N) est positif ou direct si M et N se rencontrent dans l'ordre, sinon le sens est négatif ou indirect. Sur une même droite ou deux droites parallèles nous saurons reconnaître si deux couples (M;N) et (U;V) sont de même sens ou de sens contraires.

Le seul choix d'une unité définit la distance sur la droite, le calcul de la distance des points A(a) et B(b) se fait numériquement par la valeur absolue : $|\,b - a\,|$. Changer la distance revient à changer l'échelle. Quelle que soit l'échelle les translations et les symétries conservent la distance ; les rapports de longueurs sont invariants.

**4 - Les vecteurs et la géométrie plane**

Dans le §2 nous avons introduit la géométrie affine du plan. On soulignera l'analogie de l'utilisation des nombres réels pour l'étude de la droite et celle des vecteurs pour l'étude du plan.

Sur une droite du plan ou deux droites parallèles, nous avons vu au §3 que nous savons reconnaître si deux couples (M;N) et (U;V) sont de même sens ou de sens contraires et que les rapports de longueurs sont invariants dans un changement de métrique sur la droite. Donc nous disposons en géométrie affine du théorème de Thalès et sa réciproque.

Ceci nous permet de développer dans un premier temps la géométrie sans faire appel à l'outil vectoriel. On montrera ensuite comment effectuer une même démonstration soit en géométrie, soit avec le calcul vectoriel. Voir exemple en annexe, comment découvrir le centre de gravité d'un triangle.

On introduit dans le §2 les outils de la géométrie affine.

On a vu que les opérations algébriques sur les nombres réels, s'effectuent avec ces outils en géométrie. Il est donc clair que les courbes représentatives des fonctions affine, carré, cube, inverse ou plus généralement des fonctions rationnelles sont constructibles géométriquement point par point avec ces mêmes outils. La mise en place de ces constructions définit ces courbes en géométrie affine plane. Voir en annexe ces constructions.

Le choix d'une métrique dans le plan équivaut à celui d'un repère {O, I, J} proclamé orthonormé. Un choix différent de repère est beaucoup plus qu'un changement d'échelle, il implique des isométries différentes. Le propos en seconde est de mettre en place aussi les propriétés métriques du plan quand on se place concrètement dans un repère orthonormé.

## Le langage des élèves

En début d'année, le choix et la mise en oeuvre en classe d'une activité de découverte des représentations des élèves ; par exemple autour des mots : "nombre" et "droite", par l'explicitation du sens, assurent leur prise en charge pour fonder ce qui va être le travail de l'année.

On utilise les mots du langage de tous les jours, du langage familier où ordinairement la priorité est donnée à l'expression de ses sentiments vers les proches et à la communication. Même si celle-ci est toujours approximative dans le cadre familier, des règles sont implicitement fixées. Elles peuvent être imposées par le respect des convenances liées à la place qu'on occupe dans la hiérarchie des groupes dont on fait partie. Par exemple : on ne s'adresse pas au père comme à la mère ; au directeur de banque comme au guichetier. Les règles de ce langage quotidien doivent permettre la communication de contenus cognitifs : indication d'un itinéraire, d'un mode d'emploi...

A l'école, les mots et le langage se ressourcent dans une culture, l'enseignement vise une socialisation. Si "merde" fait partie du langage ordinaire dans le cadre familial pour exprimer sur le mode scatologique le désappointement ou la désapprobation, il devient à l'école grossier et péjorativement perçu.

De sorte que finalement les mots sont surchargés de sens, à un point tel que la seule compréhension possible est liée à une phrase, un paragraphe, tout un texte, et parfois même le lecteur donne son sens au texte lu.

## Les mots en mathématiques

En cours de mathématiques, ces mêmes sont utilisés, on vient de le voir déjà chargés de sens imprimés dans nos mémoires. Utilisés en mathématiques, ils font l'objet de définition, voire de plusieurs définitions successives dans le cursus scolaire.

Examinons, par exemple, le mot *angle.*

Le sens commun est celui de *arête, coin, encoignure, renforcement*.

On a appris à l'enseignement primaire qu'il s'agit d'un quartier qu'on peut découper dans un disque de carton.

Plus tard on considère l'angle comme "la portion du plan délimitée par deux demi droites" de même origine.

On finit par nous rendre compte qu'il s'agit de la figure formée par un point S, sommet de l'angle et de deux demi-droites d'origine S.

Un angle orienté est défini au lycée par un couple de vecteurs unitaires. Tous les différents couples de vecteurs unitaires définissant le même angle doivent être reconnus par les élèves, cela va de soit.

Au même niveau, on identifiera un angle avec l'une de ses mesures.

On pourra encore définir un angle comme une rotation!

L'étude approfondie de cet exemple devrait nous révéler l'origine des difficultés liées à notre maîtrise impossible du langage.

Nous avons le souci de la rigueur, et aussi l'illusion d'être rigoureux.

La rigueur : combien de confusions entretenues en son nom : elle est nécessaire pour convaincre, et aussi pour de justes prévisions, pour que l'instrument mis en place soit opérationnel. Elle est superfétatoire s'il s'agit d'être rigoureux dans l'absolu. Le souci de la rigueur gène et bloque la pensée au moment de la recherche, puisqu'elle est dans l'instant hors de question quand il faut privilégier l'imagination.

A la manière d'"angle", on recherchera si les mots utilisés en mathématiques ont un sens multiple ou multivoque, on rendra compte s'ils donnent lieu à des représentations diverses qui peuvent familiariser avec l'"objet", le sens usuel est apposé au sens mathématique. Le sens donné par la définition mathématique d'un concept dont le mot Français sert de nom, est en général de nature opérationnelle. Apparemment on perçoit cette apposition comme une source de difficulté. Confortée et bien gérée, en appuyant la prise en charge du concept, elle aide à comprendre le sens nouveau du mot et facilite l'utilisation du concept qu'il définit.

On avance paradoxalement : avoir alors clairement à l'esprit : d'un côté, structure, forme et raisonnement logique, en géométrie : analogique ; en algèbre : digital, de l'autre ,paradigme, modèle physique, représentation ou projection dans le monde, raisonnement empirique et démonstration expérimentale.

## Communiquer

Le langage est semble-t-il de nature fluctuante. Certes les mots renvoient à un signe, noyau dur, idée ou concept originel, présent à l'instant de la communication, ce qui la rend possible. Mais précisément nous surchargerons le message, pour rendre compte de la situation actuelle, ce qui la rend difficile. Aussi bien, la communication pour être simple doit exclure du discours immédiat ce qui prendra son sens plus tard. Une information, prématurée peut perturber la genèse de la pensée : la construction est plus sûre quand la voie est dégagée des détails. Par retouches successives on complète le dessein.

Il va s'agir en classe de communiquer sur différents modes :
- transmettre des contenus : la géométrie du triangle, le centre de gravité,
- faire l'apprentissage du raisonnement, de la rigueur, en somme de la pensée cognitive,
- intégrer le discours dans la pensée de l'auditeur, permettre à celui-ci d'entendre dans sa structure cognitive actuelle ce qui lui est raconté,
- si la vie, la passion sont présents, parler au coeur ou l'ignorer, explique ce qui est passion et distinguer ce qui est savoir.

## Le centre de gravité d'un triangle

Par exemple, montrons en géométrie, puis avec le calcul vectoriel comment mettre en place le centre de gravité d'un triangle ABC.

**1 - En géométrie**

Nous utiliserons les outils mis en place au §1.
On trace les parallèles à chaque côté du triangle par le sommet opposé. On obtient un triangle A'B'C' doublant le triangle initial comme le montre la figure ci-dessous.

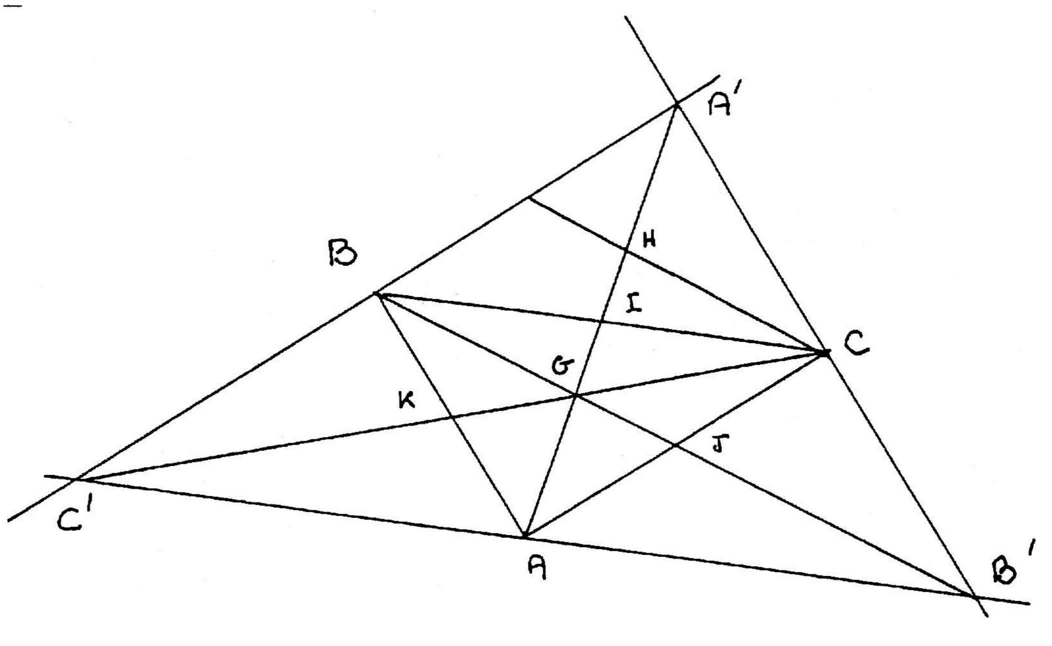
On remarque que :

- les segments [AA'] et [BC] se coupent en leur milieu I
- les segments [BB''] et [CA] se coupent en leur milieu J
- les segments [CC'] et [AC] se coupent en leur milieu K

On notera G le point de concours des droites AA' et BB'.

On considère l'homothétie de centre G qui renvoie le point A' sur A.

On vérifie successivement que :
- le point B' a pour image B.



- le point C' a pour image C.
- le point A a pour image I.
- le point B a pour image J.
- le point C a pour image K

Le point G se trouve donc aussi sur la droite (CC').

<u>Conclusion</u> : les médianes du triangle ABC sont concourantes en G. G est le centre de gravité du triangle.

Par C on trace la parallèle à BB' qui coupe AA' en H;

C est le milieu de [A'B'] donc H est le milieu de [A'G].

J est le milieu de [AC] donc G est le milieu de [AH].

On conclut donc que AG = 1/3 AA' et donc aussi AG = 2/3 AI.

Les points A, G, I sont alignés et dans cet ordre, on a donc aussi

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

et de la même façon :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} \qquad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\,CK$$

On calcule

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK}) =$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \frac{1}{3}\left[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\right] = 0$$

<u>Conclusion</u> : le centre de gravité G du triangle ABC est tel que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$

**2 - Avec le calcul vectoriel**

Du point de vue vectoriel, on considère le triangle ABC et G tel que :

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$$

Le point G est le point du plan défini par :

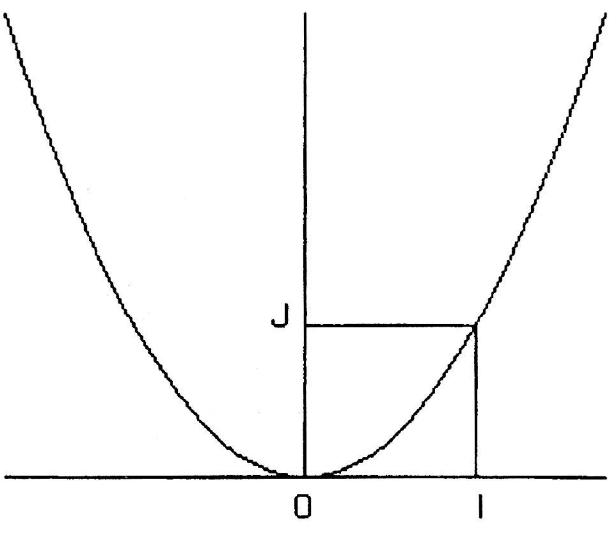
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$$

où A' est le quatrième sommet du parallélogramme ABA'C. Ce point G existe donc, il est unique, et la droite (AG) confondue avec la droite (AA') pase par le milieu I de [BC] centre du parallélogramme ABA'C.

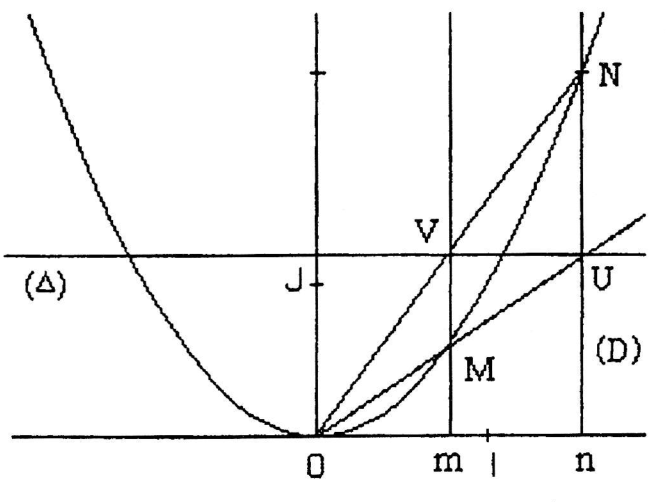
De même la droite BG passe par le milieu J de [AC] et la droite CG par le mileu K de [BC].

<u>Conclusion</u> : les trois médians d'un triangle sont concourantes, le point de concours est l'unique point G défini par

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$$




<u>Courbe représentative de la fonction : x ↦ y = $x^2$.</u>




Construction d'un point de la parabole sur une droite D ∥ à $D_O$.

## La parabole

Le programme de seconde prévoit l'étude et la représentation graphique de la fonction carré : x -> y = $x^2$.

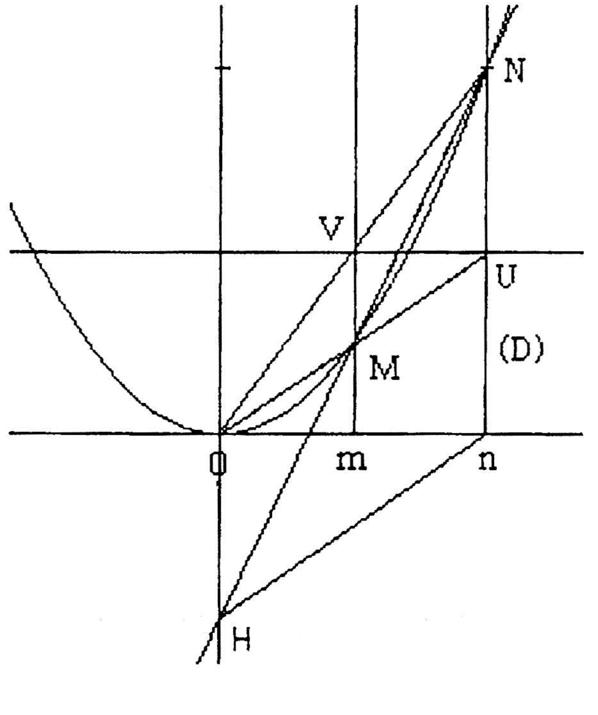
Le tracé réalisé en classe se fait point par point à partir d'un tableau de valeurs.

On peut proposer la construction géométrique suivante (figure ci-dessus)

Dans le repère {O,I,J} appelons $\Delta_0$ la droite OI et $D_0$ la droite OJ. Supposons donner un point M(a,$a^2$) de la parabole, ce peut-être, par exemple le point A(1,1). Soit m(a,0) la projection de M sur la droite $\Delta_0$ prallèlement à la doite $D_O$.

Soit D une droite parallèle à la droite $D_0$ d'équation x = b. Un seul point N de la parabole est sur D.

Il s'agit de déterminer géométriquement N :



1 - la droite D coupe la droite OM en U(b, ab)
2 - la droite $\Delta$, parallèle à la droite $\Delta_0$ menée par U coupe la droite Mm en V(a, ab)
3 - La droite OV coupe la droite D en N(b, $b^2$).

En seconde on ne considère pas les droites tangentes, il est cependant aisé de déterminer ces droites tangentes à la parabole.

Pour déterminer la tangente en M, considérons la sécante (MN), et sa position particulière quand N se confond avec M.

Nous étalissons d'abord une propriété de la sécante (MN) : par application du théorème de Thalès

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{UN}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{MU}} = \frac{\overline{VO}}{\overline{VN}} = \frac{\overline{Un}}{\overline{UN}}$$

et donc $\overline{OH} = \overline{Un}$

Le quadrilatère OUnH est donc un parallélogramme. On remarque que la sécante (MN) passe par le point H, c'est la droite (MH).

Quand N se confond avec M, les points U et V coincident avec OMmH. La sécante (MN) i.e. la droite (MH) est une diagonale de parallélogramme OMmH. C'est la tangente en M.

## Construction en géométrie affine

Nous avons vu comment construire la pabole d'équation $y = x^2$. De la même façon montrons comment obtenir par des constructions à la règle, les points des courbes d'équations

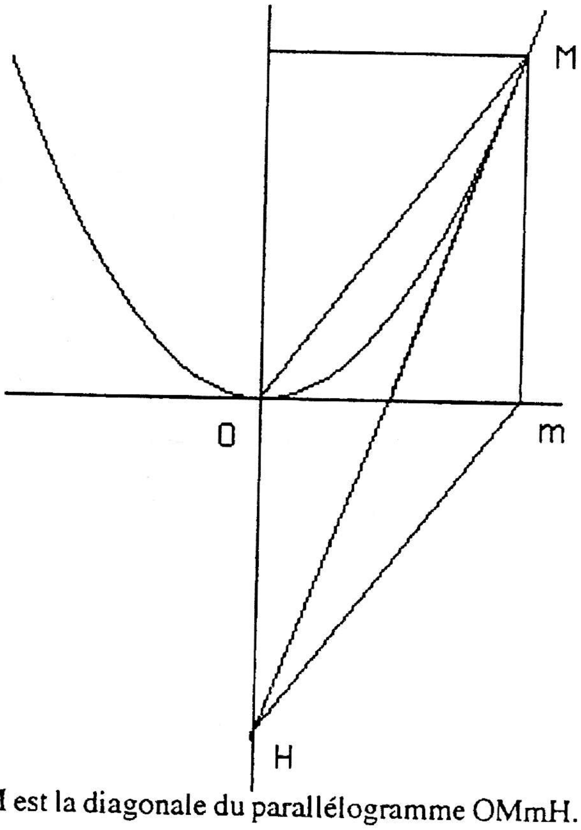
$$y = x^2,\ y = x^3, y = x^4 \ldots\ y = \frac{1}{x}$$

Dans le repère {O,I,J} appelons $\Delta_0$ la droite OI et $D_0$ la droite OJ. Soit A(1,1). Soit D une droite parallèle à la droite Do d'équation x = a.

1° - la droite D coupe la droite OA en U1(a,a).
2° - la droite $\Delta_1$, parallèle à la droite $\Delta_0$ menée par $U_1$ coupe la droite (IA) en $V_1(1,a)$.
3° - la droite $OV_1$ oupe la droite D en $U_2(a,a^2)$.

On répète partant de $U_2$ les constructions 2° et 3°.

2° - la droite $\Delta_2$, parallèle à la droite $\Delta_0$ menée par $U_2$ coupe la droite (IA) en $V_2(1,a^2)$.




La tangente en M est la diagonale du parallélogramme OMmH.

3° - la droite $OV_2$ oupe la droite D en $U_3(a,a^3)$.

On répète partant de $U_3$ les constructions 2° et 3°.

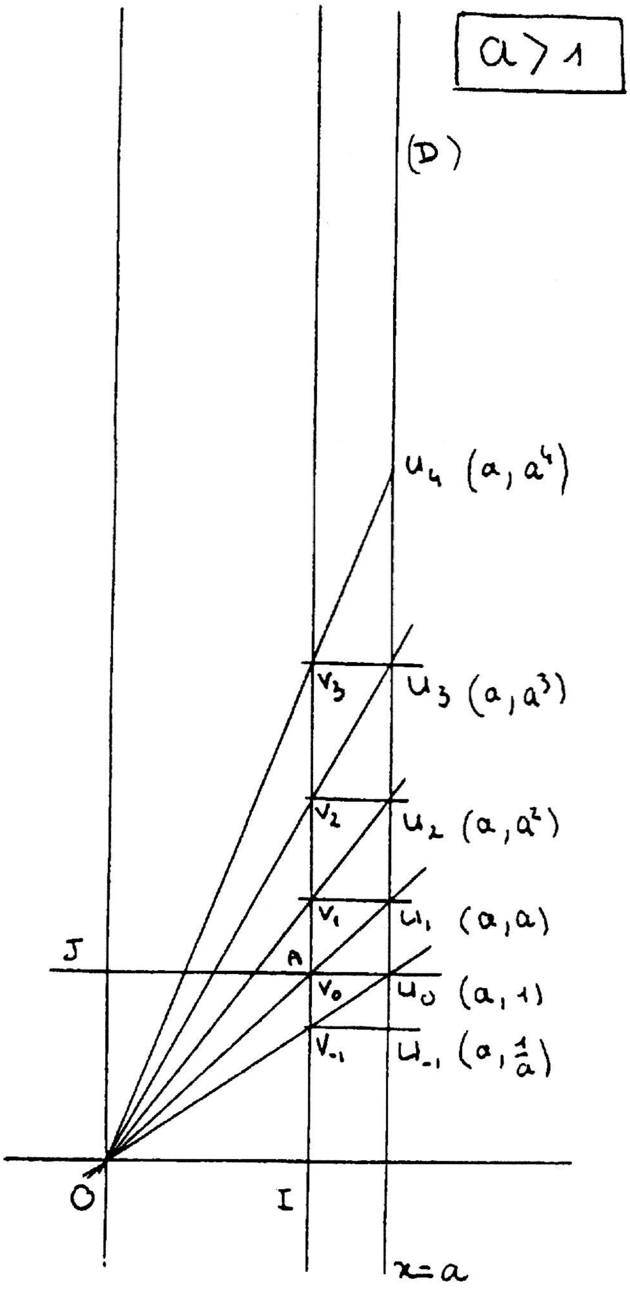
2° - la droite $\Delta_3$, parallèle à la droite $\Delta_o$ menée par $U_3$ coupe la droite (IA) en $V_3(1,a^3)$.
3° - la droite $OV_3$ oupe la droite D en $U_4(a,a^4)$.

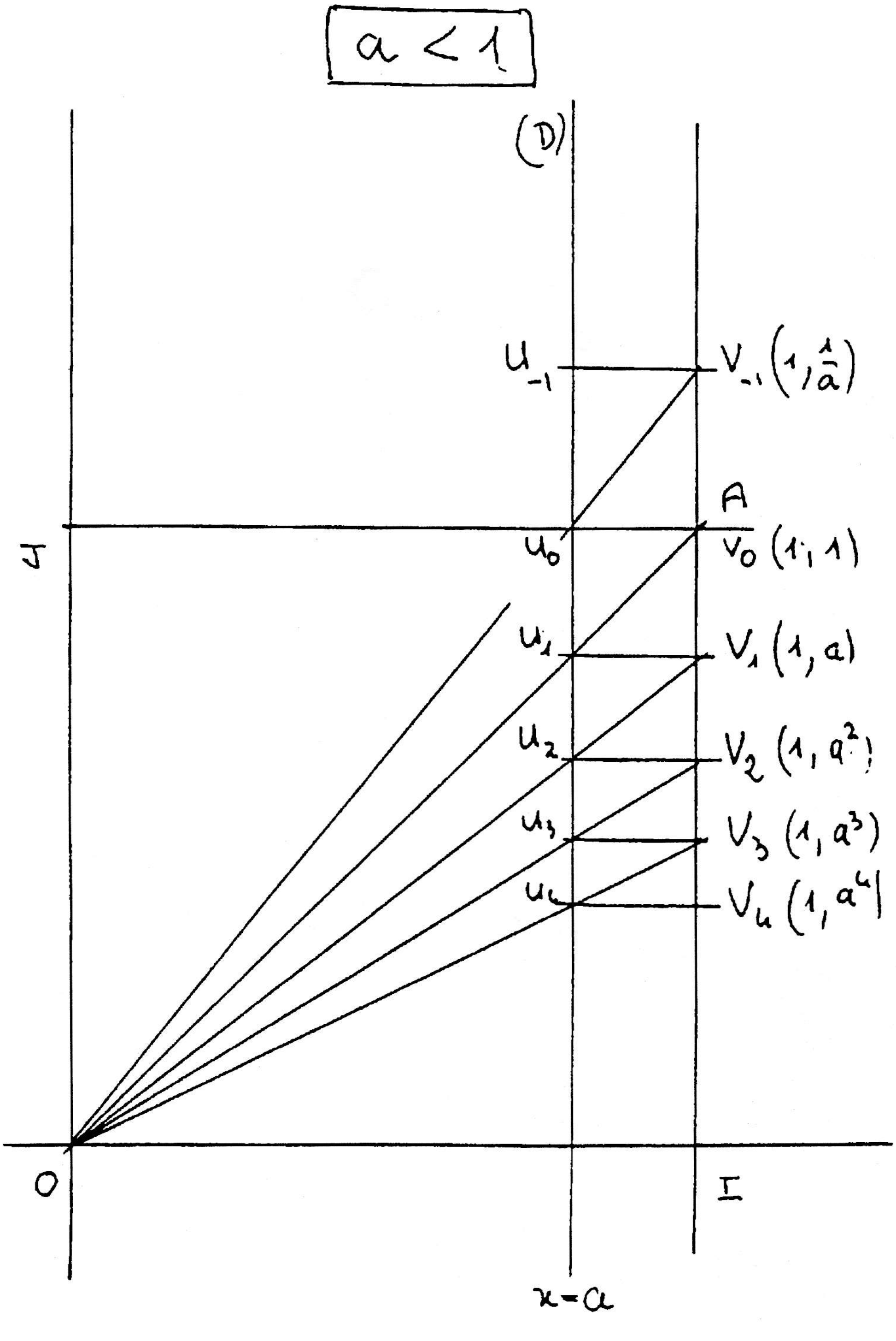
... inversement :

a - la droite $\Delta$, parallèle à la droite $\Delta_o$ menée par $A = V_o$ coupe la droite D en $U_o(a,1)$
b - la droite $OU_o$ coupe la droite IA en

$$V_{-1}(1,\frac{1}{a})$$

c - la droite $\Delta_{-1}$, parallèle à la droite $\Delta_o$ menée par $V_{-1}$ coupe la droite D en $U_{-1}(1,a^{-1})$ ❑





$a < 1$
(D)
$U_{-1}$
$V_{-1}\left(1, \frac{1}{a}\right)$
A
J
$U_0$
$V_0\ (1, 1)$
$U_1$
$V_1\ (1, a)$
$U_2$
$V_2\ (1, a^2)$
$U_3$
$V_3\ (1, a^3)$
$U_4$
$V_4\ (1, a^4)$
O
I
$x = a$

*n'oubliez pas de vous réabonner*
*pour un an, pour deux ans, ...*
*et pourquoi pas jusqu'à l'an 2000 !!!*


le PLOT

# le PLOT

Journal des régionales Apmep de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, le PLOT vous propose chaque année quatre numéros à thème sur l'enseignement et la culture mathématique pour le Collège et le Lycée : 48 pages illustrées d'activités et de réflexions sur l'évolution des mathématiques pour la classe.

Pensez à vous réabonner et faire abonner votre établissement, vous y trouverez à chaque fois de quoi alimenter la culture mathématique et les activités en classe :

| | | |
|---|---|---|
| **déjà parus en 1997** | **Plot 77 :** | Spécial fractals |
| | **Plot 78 :** | Spécial chaos |
| | **Plot 79 :** | Maths 2001! |
| **et à paraître en 1998** | **Plot 81 :** | Des outils pour l'astronomie au collège |
| | **Plot 82 :** | Pratiques didactiques au collèges |
| | **Plot 83 :** | Calculs approchés à l'ère du 0-1 |

**Tarifs** pour les adhérents individuels : 130 F pour un an, 240 pour 2 ans
pour les établissements scolaires : 150 F pour un an, 260 pour 2 ans
Supplément avion 50F par an

**Envoyez votre règlement et votre abonnement à :**
Apmep d'Orléans-Tours. IREM-Université - BP 6759 45067 Orléans-La Source

# Théorème, contraposée, réciproque ...

Nicole Bellard et Martine Lewillion, Montpellier

Notre objectif lors de cet atelier : montrer qu'il est nécessaire de prendre en compte la logique des prédicats, pour analyser les théorèmes et les raisonnements mis en jeu, dans l'enseignement de la géométrie au collège.

## Le point de départ

Quatre énoncés fabriqués à partir de la relation de Pythagore : le théorème, sa réciproque, la contraposée du théorème et celle de sa réciproque. Nous avons comparé les formulations dans la langue naturelle (en utilisant, comme le conseillent les programmes, des "si ...alors ...") et des formules du type : **∀x [ p(x) ==> q(x) ]** (avec des prédicats et une quantification universelle comme l'exige une analyse correcte de ce qui est dit). Avec les écritures formelles (qu'il n'est pas question de proposer aux élèves), la quantification universelle est explicite alors que dans les formulations discursives, cette quantification ne l'est pas pour de nombreux élèves.

Deux règles d'inférence nous paraissent indispensables pour effectuer la plupart des raisonnements présents au collège :

- la règle de contraposition : les propositions **p(a) ==> q(a)** et **(¬ q(a) ==> (¬ p(a)** ont même valeur de vérité et il en est de même pour un théorème et sa contraposée.
- la règle du **"modus ponens"**, dite aussi "règle du détachement" ou "règle de séparation" : "si A et si A ==> B, alors B".

La compréhension et l'utilisation de la seconde règle constitue un objectif explicite de l'apprentissage du raisonnement déductif. La première règle ne nous semble pas enseignée. Sa mise en oeuvre dans certains contextes va peut être de soi (le triangle n'est pas isocèle donc il n'est pas équilatéral), surtout si le contrat passé avec les élèves n'exige pas de justifier toutes les affirmations avec des théorèmes explicitement formulés. Mais il n'en est pas de même dans tous les contextes (et cela aussi bien pour des élèves que pour des professeurs

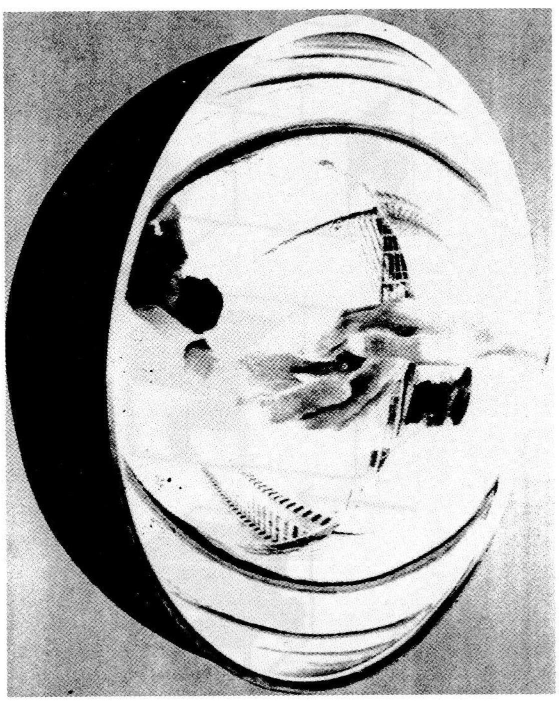


Image flottante

ou des auteurs de manuels et de corrigés d'examens.

C'est ce que nous avons montré en analysant rapidement :
- des réponses d'élèves de seconde à l'évaluation de septembre 1996 (exercice 1 à propos du "théorème de Thalès"),
- des réponses de professeurs à un exercice des épreuves E.V.A.P.M. de la classe de 4°,
- des extraits de livres d'élèves et d'annales corrigées.

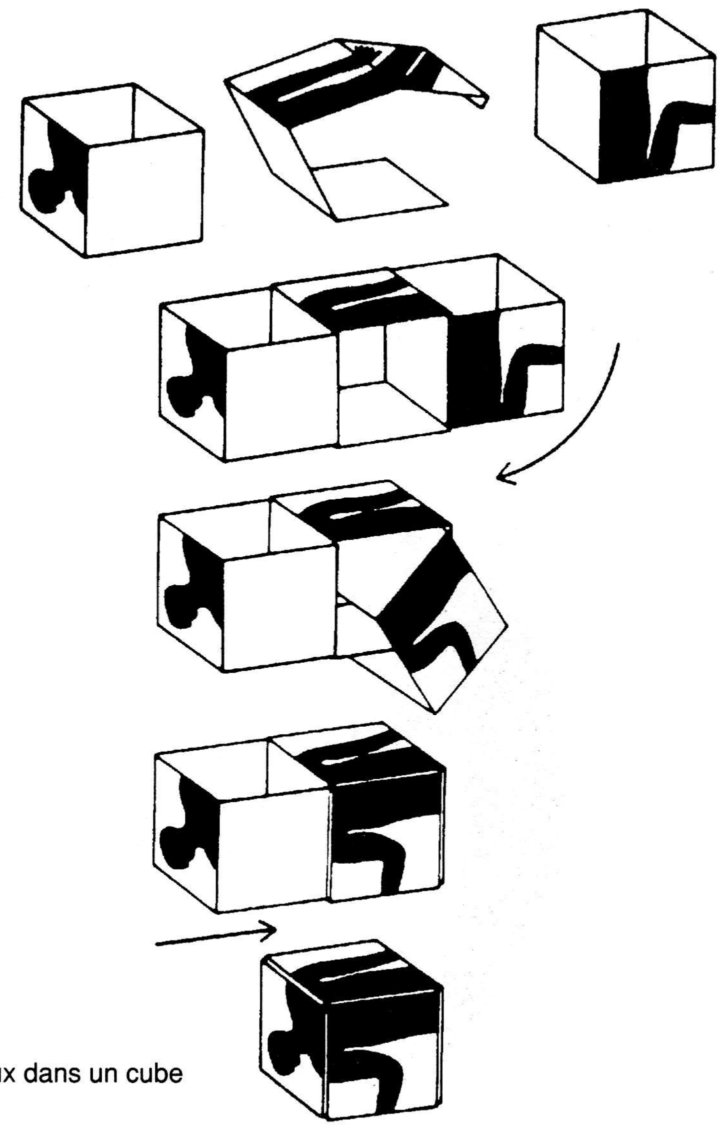
**Questions :**
- la distinction entre un théorème et sa réciproque n'est peut-être pas un objectif à atteindre par tous les élèves du collège,

- un travail sur les liens entre théorème, réciproque et contraposée n'a peut-être pas sa place au collège.

## Nos objectifs

Nous avons présenté des situations réelles de classe (cf. bibliographie et des publications ultérieures de l'IREM de Montpellier) construites autour des objectifs suivants :

- comprendre la quantification universelle implicite dans les théorèmes étudiés,
- chercher un contre exemple pour réfuter une conjecture,
- distinguer les parties "prémisses" et "conclusion" dans un théorème en utilisant, à côté de la formulation en langue naturelle des théorèmes, des représentations non discursives sous forme de "schéma fléché" [Bellard 1993] et [Bellard Lewillion 1996] (qui, malheureusement, ne prennent pas vraiment en compte la quantification universelle),



Deux dans un cube

- distinguer un théorème de sa réciproque (une représentation non discursive étant ici encore un outil largement utilisé),
- mettre en oeuvre la règle du "modus ponens",
- distinguer la réciproque d'un théorème d'avec sa contraposée.

Nous n'ignorons pas que les années d'enseignement au collège sont insuffisantes pour atteindre ces objectifs, avec tous les élèves, mais nous trouvons important d'entreprendre un travail qui se poursuivra au lycée.

Nous indiquerons seulement que, faute d'avoir trouvé mieux, pour les théorèmes pour lesquels des confusions sont possibles et fréquentes entre "réciproque" et "contraposée", nous différencions, par écrit et dans la résolution de problèmes, avec les élèves, trois formulations : le théorème, le théorème "que l'on en déduit" (la contraposée) et la réciproque. Cela signifie qu'au lycée certainement, une mise au point s'impose, pour unifier ces notions et présenter la contraposée d'un théorème comme équivalente au théorème. ❑

## Bibliographie

**Bellard Nicole et Guin Dominique** (1994)
Quels types de schémas pourraient être une aide à la compréhension des énoncés de théorèmes de géométrie ? Représentation graphique et symbolique de la maternelle à l'université, Tome 1, pp 60 à 68, Actes de la 46° CIEAEM, Editeur IREM de Toulouse.

**Bellard Nicole** (1996)
Représentations non discursives de théorèmes de géométrie, Actes du Colloque Inter-Irem de Géométrie de Bayonne, Editeur IREM de Bordeaux (à paraître).

**Brousseau Guy** (1987)
Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7.2, Editions La Pensée Sauvage.

**Chevallard Yves** (1985)
La transposition didactique, Grenoble, Editions La Pensée Sauvage.

**Duval Raymond** (1993)
Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 5, Editeur IREM de Strasbourg.

**Duval Raymond** (1994)
Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche mathématique, Repères IREM, vol 17, Topiques Éditions.

**Egret Marie Agnès et Duval Raymond** (1989)
Comment une classe de 4∞ a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 2, Editeur IREM de Strasbourg.

**Guin Dominique** (1989)
Réflexions sur l'aide à la démonstration, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 2, Editeur IREM de Strasbourg.

**Durand Guerrier Viviane** (1995)
Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, Différents types de savoirs et leur articulation, Editions La Pensée Sauvage.

**Legrand Marc** (1990)
Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à la communauté scientifique, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 9.3, Editions La Pensée Sauvage.

**Noirfalise Robert** (1991)
Figures prégnantes en géométrie, Repères - IREM, vol 2, Topiques Éditions.

**Noirfalise Robert** (1993)
Contribution à l'étude didactique de la démonstration, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 13.3, Editions La Pensée Sauvage.

# Des maths dynamiques avec la TI-92

Jean-Jacques Dahan, Toulouse

Ayant eu l'occasion d'assister à une leçon de géométrie de la classe de quatrième intitulée :

" Cosinus de l'angle aigu
de deux demi-droites",

j'ai immédiatement réagi à ce que j'ai observé en imaginant le scénario d'une telle leçon gérée avec la TI-92 rétroprojetable.

Je voulais, à travers l'utilisation de cet outil, montrer qu'on disposait de nouveaux moyens permettant un réel apprentissage des élèves. Ce scénario fait l'objet d'une expérimentation en cours à l'IUFM de Toulouse.

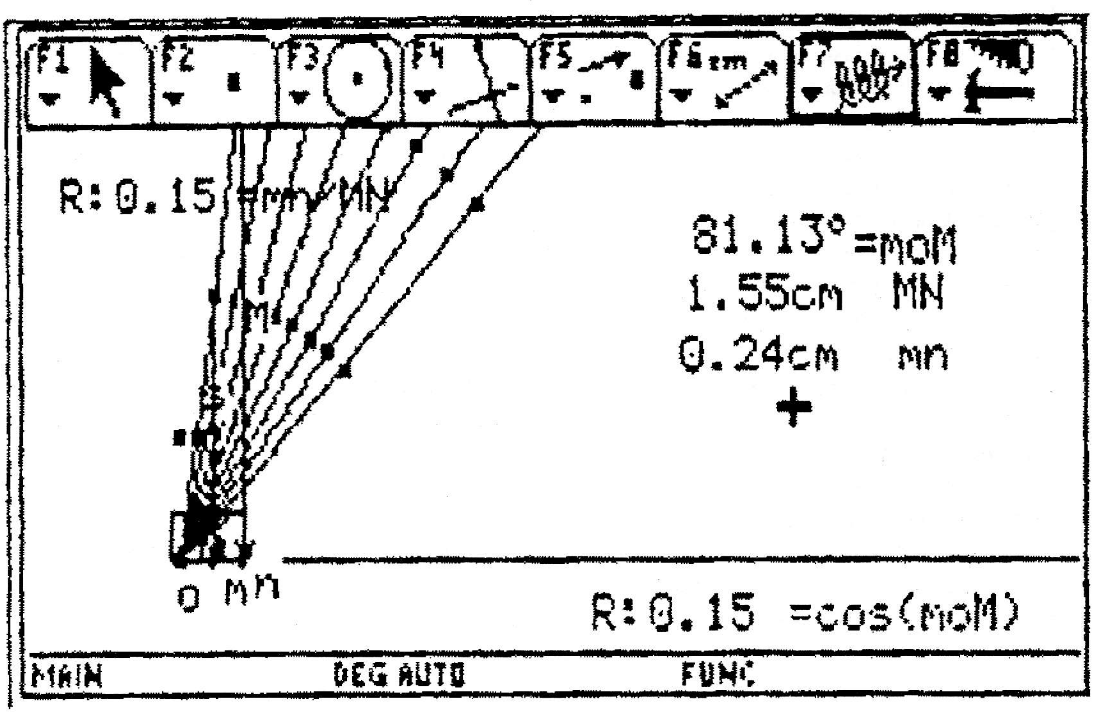
## La TI-92 rétroprojetable

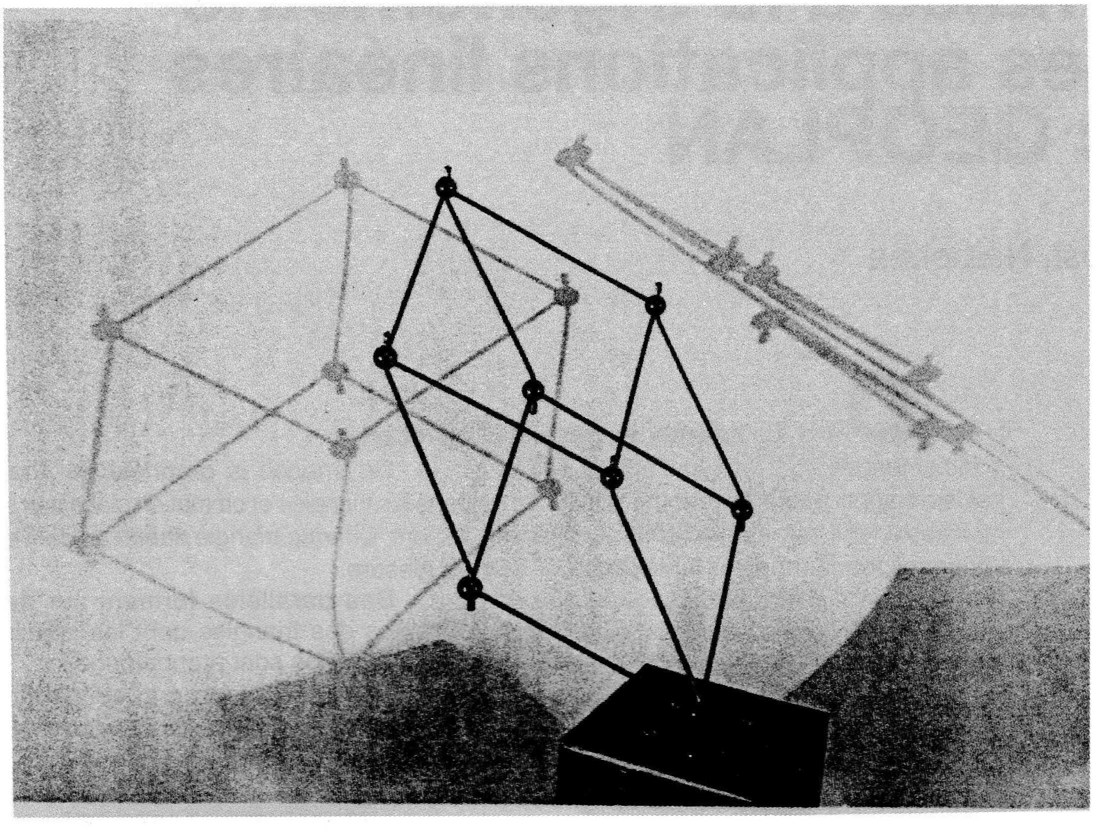
Notre hypothèse :
A l'aide de cet outil, il est possible d'améliorer les objectifs visés et le message pédagogique :
- par la très large utilisation des tableurs (pour réviser la proportionnalité),
- par l'utilisation du module de géométrie pour créer les figures qui vont être utilisées aussi bien par le professeur que par les élèves,
- par la saisie des mesures faites par la machine dans un tableau où elles vont être traitées (la machine sera l'outil de mesure de référence rendant possible la validation de l'invariance du rapport étudié, ce qui peut être le cas dans une gestion classique).

J'espère que les expériences en cours valideront cette hypothèse mais, ayant personnellement l'esprit très ouvert, je pense que les conclusions que nous pourrons tirer de tous ces travaux la modieront très sensiblement. J'espère que leurs résultats nous encourageront à expérimenter les nouvelles pistes pédagogiques issues de nouvelles technologies, certes avec enthousiasme, mais aussi avec l'esprit critique qui seul permettra au corps enseignant d'avancer dans la voie du progrès au moins au rythme de la jeunesse.

## Un nouvel apprentissage de la géométrie

Dans le scénario que je propose, la partie construction dévolue aux élèves sur feuille avec crayon et autres instruments





de dessin est extrèmement réduite ; en effet, l'objectif de la leçon n'est pas un objectif de travaux manuels, mais la conjecture d'un résultat et son institutionnalisation correcte dans l'esprit des élèves.

La machine, je pense, aidera grandement le professeur à communiquer avec TOUS ses élèves, et les élèves à comprendre le message qu'on veut leur transmettre.

Personnellement, je pense de manière plus générale, que ces constructions, qui ont été jusqu'à présent un moment important ou considéré comme tel dans l'apprentissage de la géométrie, ont constitué, à mon avis, et à double titre, un frein à cet apprentissage, car elles demandent un soin et une application qui ne sont pas toujours là, et de plus elles aboutissent à une figure figée dans le temps et dans l'espace (de la feuille de papier) qui met toujours l'élève devant la même alternative : ou il trouve, ou il ne trouve pas.

## La voie royale de la démocratisation

L'étape de la construction par utilisation de CABRI par les élèves devrait être la voie royale de la démocratisation de la géométrie : CABRI permettra de rendre cette étape ludique, de desserrer le carcan directif d'un enseignement réservé à ceux qui savent déjà (pourquoi ?) et de déboucher sur une analyse dynamique du problème posé et en tous cas d'une meilleure maîtrise des outils de résolution, en particulier les transformations.

Certains grincent des dents : cette manière de faire de la géométrie a fait ses preuves depuis trente ... siècles, pensent-ils, c'est le seul et bon moyen de faire de la géomérie.

Ma réponse : aucune discipline scientifique n'a rejeté les nouvelles technologies, au contraire, elle les a intégrées pour mieux progresser. Pour l'enseignement de la géométrie, la vulgarisation de CABRI ou de toute calculatrice permettant de faire de la géométrie de manière interactive sera une marque de progès des Mathématiques dans notre Culture. ❑

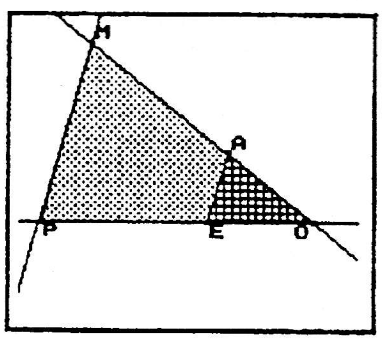
Où est le vrai?

# De Thalès à la trigonométrie par les applications linéaires avec GEOPLAN

Francis Tost, Narbonne

Dans les séquences très succinctement décrites les situations de Thalès et leurs applications trigonométriques sont traitées en utilisant les fonctions linéaires par líaspect fonctionnel et la réciproque ou l'homogénéité ou l'additivité sans égalités de quotients. En cours elles sont présentées avec le logiciel Géoplan du CREEM pour susciter les conjectures puis les confirmer. Ce compte-rendu ne peut guère traduire l'incomparable apport de líoutil informatique dans ces séquences

## La propriété de Thalès




Avec les mobilités du logiciel Géoplan on compare les triangles OMP et OAE et on amène les élèves jusqu'à évoquer “la même forme” pour les deux triangles puis on en vient à faire expliciter cette notion :

L'un des triangles est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

On fait exprimer ce principe par l'existence díun coefficient k, díagrandissement ou réduction.

On énonce la propriété de Thalès dans les triangles et on met en place son traitement. Chaque triangle donne un domaine de mesure.

Des parallèles forment sur deux sécantes des triangles dont les côtés de même direction sont proportionnels.

Des données en gras on déduit le coefficient puis les résultats (figure 1).

## Traitement par les trois directions

On peut vérifier par l'imagiciel que pour trois directions données il y a proportionnalité entre chaque longueur dans un triangle d'origine O. On peut donc traiter la situation en prenant, quel que soit le nombre de triangles, trois domaines de mesures : les longueurs des segments sur chacune des trois directions. Ce traitement permet d'obtenir par additivité de la fonction linéaire entre les deux sécantes, la proportionnalité de toute longueur d'un segment avec celle de son projeté (figure 2).

## Linéarité - non-linéarité

On étudie la hauteur OH' et l'aire de OMP en fonction du côté OM. Par affichage des courbes de la hauteur (L) et l'aire (S ) par rapport au côté, on peut vérifier la proportionnalité de la hauteur et la non-proportionnalité de l'aire (figure 3).

| | Triangle OAE | $\times 0{,}75$ → | Triangle OMP |
|---|---|---|---|
| *Sécante (OA)* | **OA = 6** | ⟶ | **OM = 4,5** |
| *Sécante (OE)* | OE = 5,2 | ⟶ | OP = 5,2 ¥ 0,75 = 3,9 |
| *Direction (AE* | AE = 4,2/0,75 = 5,6 | ⟶ | **MP = 4,2** |
| | | ← $: 0{,}75$ | |

Figure 1

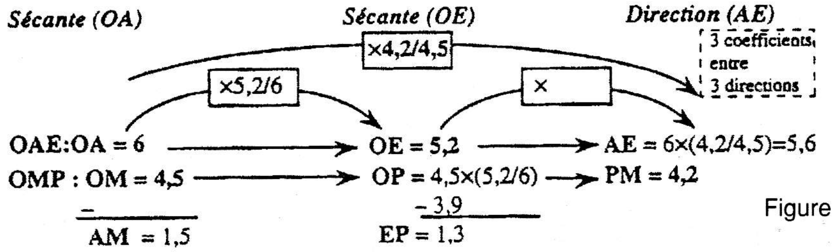
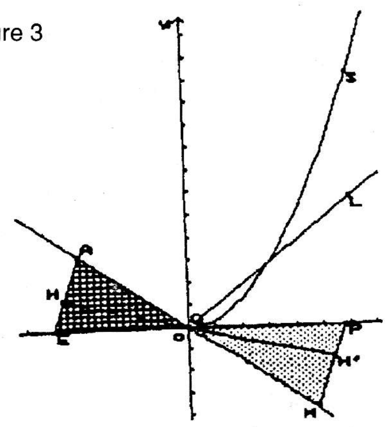
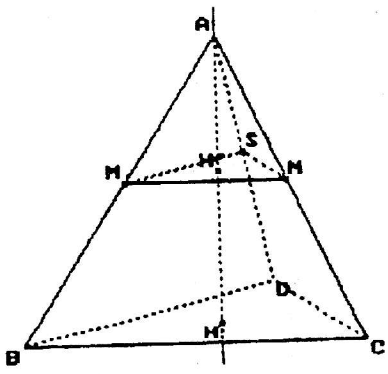



Figure 2

Figure 3



Volume du tétraède AMNS : 0,0087



## Pyramide réduite

Sur le logiciel Géospace la première séquence est consacrée à la construction de l'intersection d'un tétraèdre avec un plan parallèle à sa base. Les bons dessins sur papier masquent en fait les difficultés conceptuelles des élèves ici révélées.

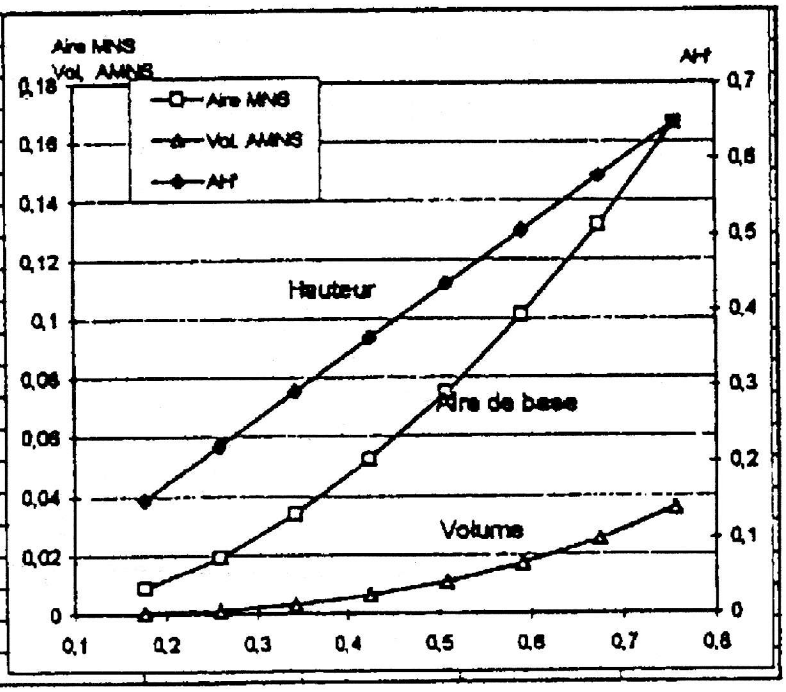
Ensuite, grâce aux mesures lues dans le logiciel, on note des valeurs de AM et les valeurs correspondantes de AH', de l'aire de MNS et du volume du tétraèdre AMNS.

On reporte ces mesures dans un tableur, de préférence par commutation de tâche sous Windows. Ici c'est Excel qui a été utilisé pour produire ces graphiques.

On peut alors conjecturer la linéarité de la hauteur et les non-linéarités de l'aire

| AM | Aire MNS |
|---|---|
| 0,1764 | 0,0091 |
| 0,2593 | 0,0195 |
| 0,3421 | 0,034 |
| 0,4249 | 0,0525 |
| 0,5078 | 0,075 |
| 0,5906 | 0,1014 |
| 0,6734 | 0,1319 |
| 0,7562 | 0,1663 |

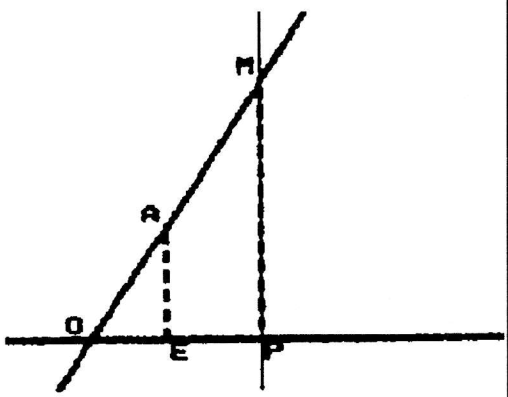
| AH' | Vol. AMNS |
|---|---|
| 0,1512 | 0,0005 |
| 0,2222 | 0,0014 |
| 0,2932 | 0,0033 |
| 0,3642 | 0,0064 |
| 0,4352 | 0,0109 |
| 0,5062 | 0,0171 |
| 0,5772 | 0,0254 |
| 0,6482 | 0,0359 |



et du volume par rapport à l'arête.

On peut aussi faire expérimenter que le coefficient de réduction du côté étant r, celui de l'aire est $r^2$ et celui du volume $r^3$.

## Trigonométrie du triangle rectangle




Le traitement de la situation de Thalès avec les trois directions peut être appliqué au cas de la projection orthogonale. Dans ce cas les trois coefficients sont respectivement le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle AOE.

Le logiciel permet par la mobilité de ses objets d'étudier la variation de chacune des trois lignes trigonométriques en fonction de l'angle.

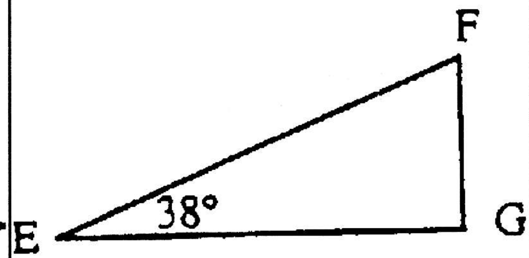
Un autre imagiciel sous Géoplan permet de comparer des triangles rectangles à ceux issus de la projection orthogonale.

Tous les triangles rectangles ayant un même angle aigu a ont leurs côtés proportionnels.

On peut étendre les trois lignes trigonométriques d'une projection à celles de tout triangle rectangle ayant un même angle aigu a .
Le traitement de tout problème élèmentaire de trigonomètrie dans le triangle rectangle est directement issu de celui de la situation de Thalès par les trois directions.

Présentation et traitement des lignes trigonométriques dans le triangle rectangle:

Elles sont des coefficients de fonctions linéaires qui avec leurs réciproques facilitent considérablement le traitement des exercices élèmentaires ; il n'utilise pas les




égalités de quotients (figures 4 et 5).

*Exemple de traitement :*

EFG est un triangle rectangle en G .
EG = 8 et l'angle FEG mesure 38°.
Calculer les expressions exactes de EF et FG (figure 6).

*Ces séquences et leurs imagiciels figurent dans le document : L'ordinateur un outil pour les mathématiques au collége.*
*CNDP du Languedoc -Roussillon*
*Géoplan est maintenant disponible sous Windows auprès du CRDP de Reims.*❑



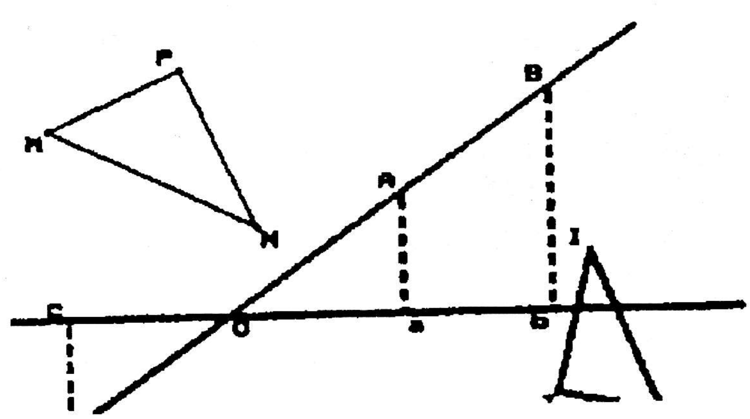


Figure 4

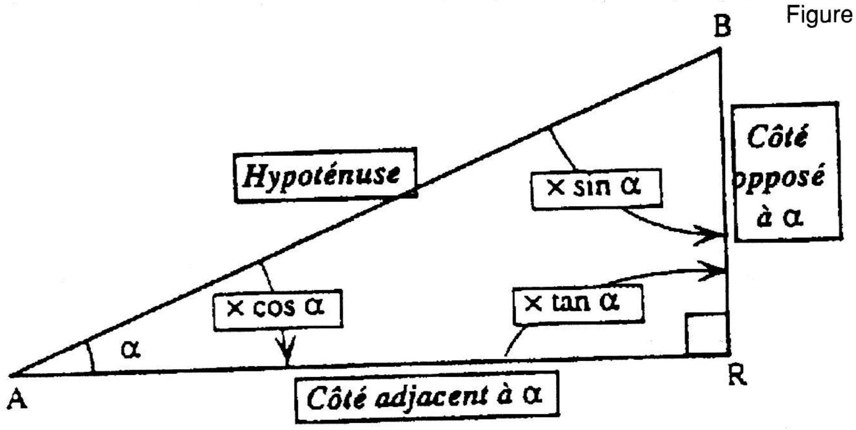



Figure 5

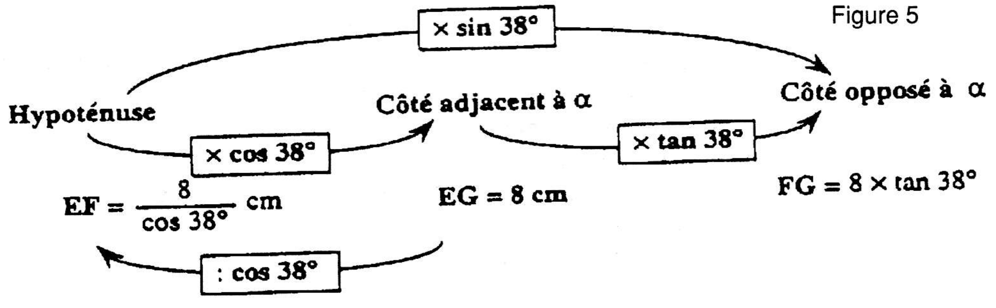
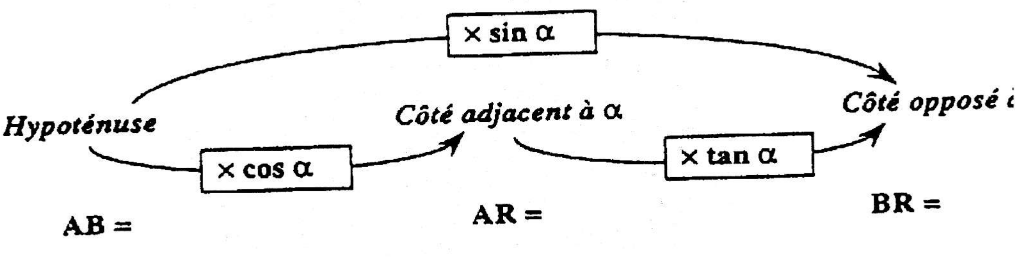



Figure 6



# Tableau de bord pour un profil de sortie en mathématiques au collège

Alfred Bartolucci - Craponne (69)

## Trois grands types de visées

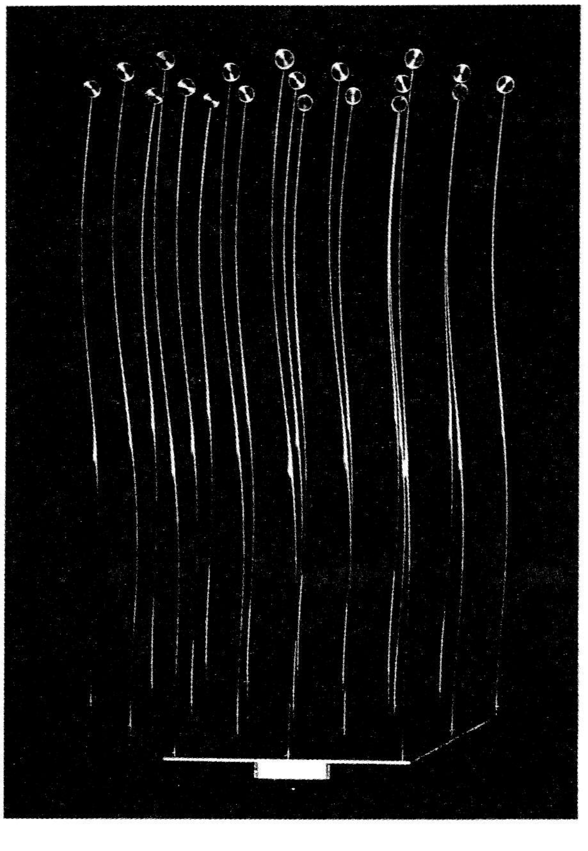
Le collège (CEPEC de Craponne) se situe dans le cadre de la scolarité obligatoire. Pour certains jeunes il marque l'achèvement de leur formation mathématique. Dans le contexte actuel où les difficultés sont multiples et où la nécessité, pour l'école, de favoriser une pensée organisée n'est pas un luxe, il paraît essentiel de poursuivre, en mathématiques, trois grands types de visées :
- développer des compétences de résolution de problèmes.
- développer des capacités à abstraire, à modéliser, à travailler sur des systèmes formels avec des règles propres.
- développer une instrumentation conceptuelle de base.

## Les enjeux

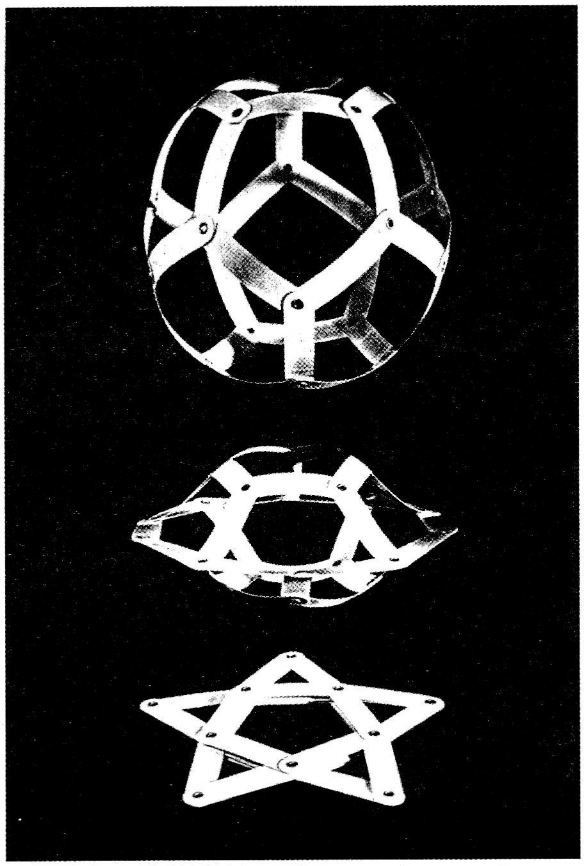
On aurait tort de penser que des jeunes qui ne poursuivent pas leurs études en secondaire pourraient faire l'économie de certaines exigences et pourraient se satisfaire d'un outillage seulement « technique» autour de mesurer et compter. Les enjeux d'une formation en mathématiques qui poursuit les trois types de visées évoquées plus haut nous paraissent essentiels. Ils sont de plusieurs ordres :

- enjeux culturels : en lien avec l'historique de l'humanité, la construction des savoirs scientifiques, les époques marquantes de passages d'obstacles épistémologiques, l'évolution des mentalités.

- enjeux éthiques : en référence aux valeurs qu'on peut promouvoir, les attitudes qu'on



Diffraction - 1er niveau



Pentagones - décaèdres !

veut favoriser, relativisation des prétentions du vrai, limites de tout système même le «mieux » construit, combativité face au sentiment de difficulté éprouvé en situation apparemment bloquée.

- enjeux méthodologiques : familiarisation avec les exigences de précision et de rigueur mais aussi avec les règles non communes de communication et d'administration de preuve,
- enjeux cognitifs : apprentissages de modes de raisonnements et de stratégies de résolution de problèmes certes mais aussi instrumentation notionnelle de la pensée c'est-à-dire acquisitions qui ne se limitent pas à une classification nominaliste mais qui renvoient à l'élaboration de réseaux notionnels en mémoire, qui facilitent la compréhension de faits et de relations dans la société qui assurent l'acquisition de compétences.

## Une nécessaire rupture

Aujourd'hui, pour beaucoup de jeunes, la réussite au brevet des collèges est un objectif significatif. Mais dans une telle épreuve on imaginerait mal un taux d'échec massif, et la réussite d'un trop grand nombre rendait suspecte la réussite de chacun. La bonne épreuve étant celle qui permet à une majorité d'élèves d'obtenir des résultats moyens alors que quelques uns ont une réussite remarquable et que d'autres, constituent le groupe nécessaire à la validité de l'épreuve de ceux qui ont échoué. Le caractère « d'épreuve équilibrée » s'origine moins la recherche d'effets de formation que dans la conformation à des attentes sociales. Les visées de formation définies plus haut sont sapées à la base par la conception même d'une telle épreuve.

Partant de ce constat, le groupe Math-Collège, en prenant appui sur des travaux réalisés au CEPEC International dans les années 80 notamment sous la direction de Pierre GILLET (cf Construire la formation - Editions ESF), a élaboré un cadre pour la détermination d'un profil de sortie de chaque cycle du collège. Il s'agit pour nous de promouvoir des intentions fortes de formation.

## Un cadre pour une orientation de la formation

Dans un tel cadre, les visées de formations se fondent sur quatre registres :

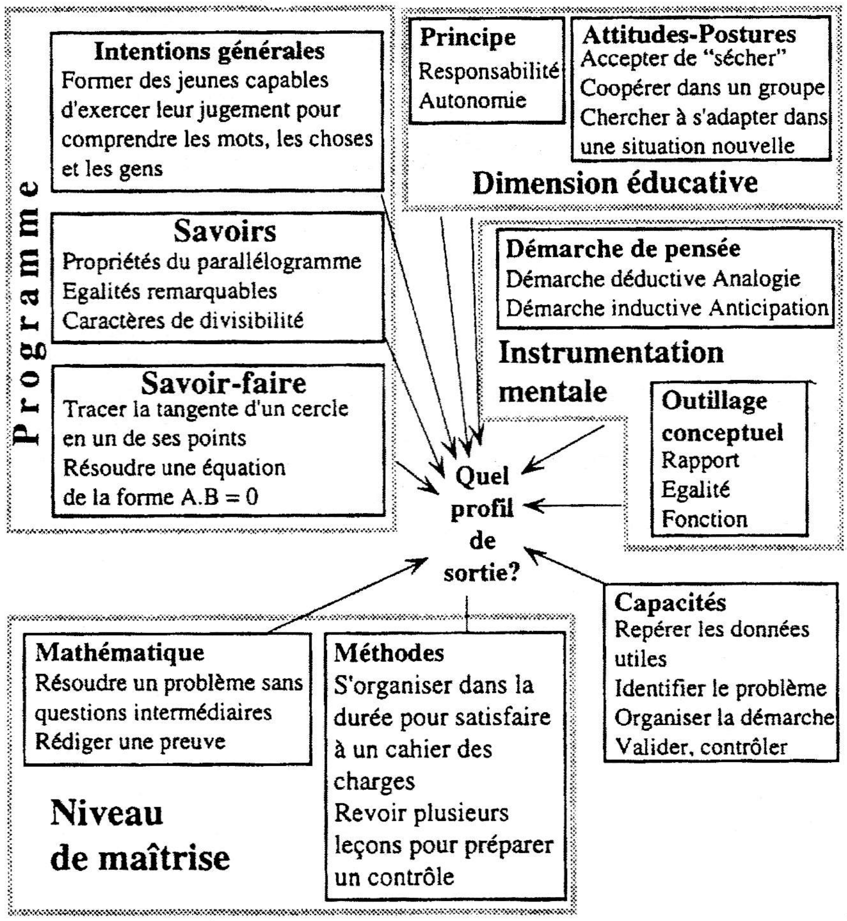
- celui des programmes, définition des contenus à enseigner, orientations générales.
- celui du niveau de maîtrise. Ici, il s'agit

d'expliciter les situations globales et complexes mettant en jeu divers savoirs, savoir-faire, attitudes, capacités orientées vers la prise en charge de familles de situations.
- celui de l'instrumentation mentale. Dans ce registre sont considérés aussi bien les réseaux de concepts fondamentaux que la formation mathématique doit permettre de construire que les démarches de pensée à promouvoir.
- celui de la dimension éducative. Une formation mathématique peut promouvoir diverses valeurs et attitudes. Des choix explicites sont à faire et à travailler.

Nous présentons ci-après une schématisation de ce cadre.
L'organisation de la formation et des apprentissages se devant de tenir compte des quatre registres.

Pour ceux qui le souhaitent nous tenons à leur disposition des documents explicitant chacun des éléments qui interviennent dans la détermination d'un profil de sortie. ❑

## Tableau de bord du profil de sortie - Référent pour un continuum et non pour un constat.




*Groupe Math-Collège*
*CEPEC International - 14, voie Romaine - 69290 Craponne*

# Des pliages aux solides

Valérie Larose - Paris

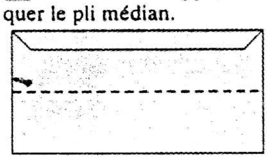
Réaliser une pyramide à base carrée, un tétraède régulier ou un cube avec une feuille de papier format A4, sans découpage, sans collage mais uniquement avec ses doigts, voilà qui peut renouveler les activités liées aux constructions de volumes dans les classes de collège.
Passer de la feuille plan au volume en quelques plis, sans coller, c'est un peu de la magie qui ne déplaît ni aux élèves, ni aux enseignants qui la découvrent.
Tous les pliages proposés dans l'atelier sont des créations e Didier Boursin (ancien président du mouvement français des plieurs de papier, France) avec qui j'ai eu l'occasion de travailler sur le thème « Mathématiques

## Tétraèdre régulier

Le pliage précédent utilisait toute l'enveloppe, le suivant sera moins gourmand.
Si vous êtes gêné par l'épaisseur du papier à l'étape 8, recommencer avec une enveloppe "avion".
Ce pliage se fait à partir d'une enveloppe 11 × 22. On obtient deux tétraèdres avec une seule enveloppes.

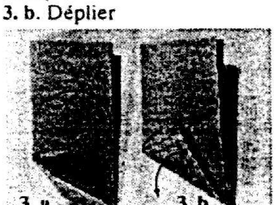
### Construction

**1** Coller l'enveloppe, marquer le pli médian.



**2** Amener un coin inférieur sur cette médiane.

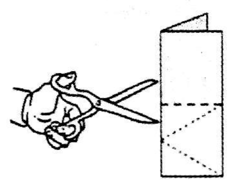
**3** 3. a Replier le long du pli marqué.
3. b. Déplier



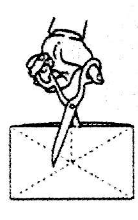
3. a 3. b

*On réutilise la technique ue pour le tétraèdre (I) (construction de triangles équilatéraux).*

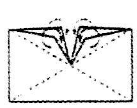
**4** Découper puis ouvrir.



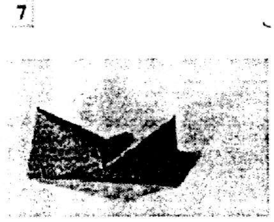
**5** Découper.



**6** Rentrer les languettes.

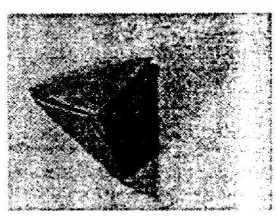


**7**



**8** Rentrer la partie gauche.

**9** ... dans la partie droite.



### Questions

**1** L'arête de ce tétraèdre a pour longueur la moitié de celle du tétraèdre (II). En déduire le rapport des volumes.

**2** Combien faut-il réaliser de "petits" tétraèdres (III) pour remplir le "grand" tétraèdre (II) ?

et pliages ».
Je citerai plus particulièrement trois pliages présentés à Albi :
- Réalisation d'un triangle équilatéral à partir d'une feuille A4 : en trois plis, le tour est joué (voir annexe).
- Réalisation d'un tétraèdre régulier à partir d'une feuille A4 : voilà un solide qui se plie et se déplie à volonté, c'est pratique à la fin d'un cours pour ranger dans le cahier de maths ! (voir annexe).
- Réalisation d'un tétraèdre régulier à partir d'une enveloppe 11X22 : simple, de plus, une même enveloppe permet d'en construire 2 et on peut, en classe, se poser des questions sur les volumes en cas d'agrandissement-réduction (voir annexe).

J'ai présenté également la construction d'une pyramide à base carrée régulière à partir d'une feuille A4, celle d'un cube puis d'un dodécaèdre régulier.
Plier, c'est mémoriser une suite de plis, activité inhabituelle ; certains élèves y arrivent mieux que d'autres et e ne sont pas toujours les meilleurs en maths... Pour certains, passer du plan au volume en quelques plis, c'est palper l'espace, enfin. ❑

*Les pliages réalisés et présentés à Albi expliqués et photographiés ont été publiés en 1997 aux éditions ACL sous le titre : Pliages et Mathématiques - 64 pages - 50F.*

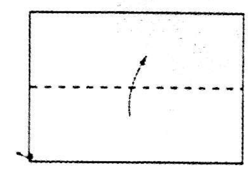
# Tétraèdre régulier

## Définition

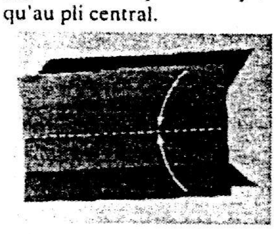
Un **tétraèdre régulier** est une pyramide à 4 faces (du grec *tétra* : quatre), chaque face étant un *triangle équilatéral*.

## Construction

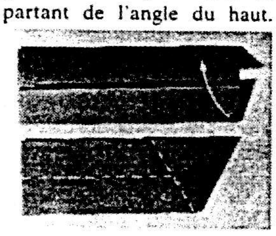
1 Prendre une feuille A4 et marquer le pli central.



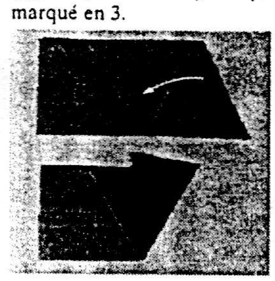
2 Plier chaque côté jusqu'au pli central.



3 Amener le coin inférieur gauche sur le pli central en partant de l'angle du haut.

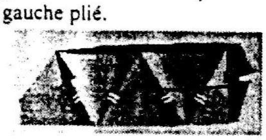


3.b Replier le long du pli marqué en 3.



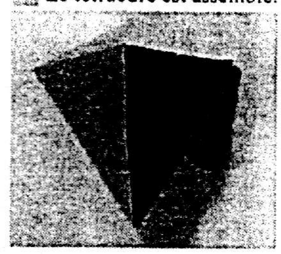
Répéter cette opération.
4 Plier le dernier triangle.

5 Déplier à plat le tout en gardant le coin supérieur gauche plié.

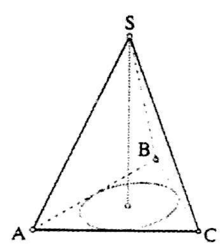


6 Enrouler puis plier le triangle de gauche dans le petit de droite.

7 Le tétraèdre est assemblé.



## Info géométrie




La hauteur du tétraèdre régulier passe par le centre du cercle inscrit du triangle de base.
**Apothème d'une pyramide :** c'est la hauteur de l'une des faces. Ce pliage permet d'obtenir une face avec une apothème.
**Patron et ligne des milieux :** À l'étape 5, on distingue le "patron" du tétraèdre régulier (augmentée de plis d'accrochage). Chaque face y est traversée par la "ligne des milieux".

**Pliages & mathématiques** 5

# Cabri, Derive et Maple ....

Joachim Liorca, La Garde

A Albi, j'avais préparé neuf exercices sur le thème Cabri, Derive et Maple du niveau d'une très bonne Terminale S. Le temps imparti à l'atelier m'a obligé à faire un choix ! Ce fut Maple et Derive.
Je reproduis ici les énoncés qui ont eu le plus de succès.

Beaucoup de collègues se sont intéressés à l'exercice III Sur cet exercice, je reprends ici les points qui me paraissent essentiels.

**Exercice I**

On donne en repère orthonormal le cercle (C) de centre O et de rayon 1. Un point M d'affixe $e^{it}$ décrit (C). Un point P a pour affixe $e^{-2it}$.
Soit G le milieu de [PM ].
*1°) Avec Cabri :*
a) Construire la figure.
b) Mettre en évidence le lien de G quand M décrit (C).
*2°) Avec Derive*
a) Ecrire une représentation paramétrique du lieu G.
b) Représenter graphiquement ce lieu.
c) G est maintenant le barycentre du système {(P, 1) , (M, k)}. Reprendre la première question puis construire le lieu de G pour différentes valeurs de k. On pourra définir, au sens de Derive, une fonction k $\xrightarrow{\text{motif}}$ lieu de G.

**Exercice II**

On donne un triangle ABC et l'on construit extérieurement à ce triangle, sur les côtés de ce triangle, des triangles isocèles dont l'angle vaut $2\pi/3$. Ce dernier triangle est équilatéral. Prouvez-le !

*Avec Maple*
En désignant par x, y et z les affixes respectives des sommets opposés aux côtés [BC ], [CA ] et [AB ], calculer les modules des complexes :
x - y, y - z et z - x puis conclure.

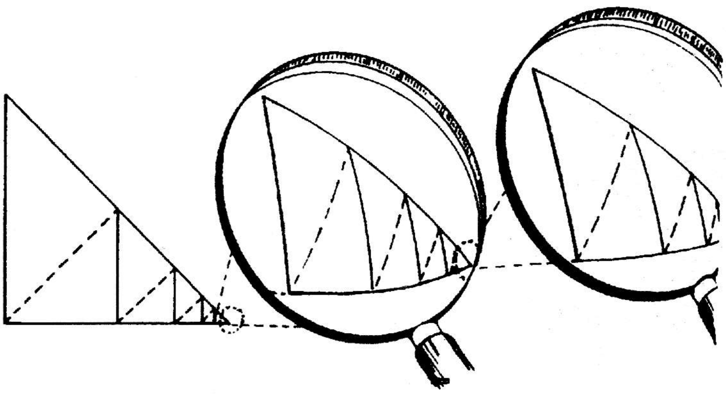
**Exercice III**

Je vais développé ici l'exemple dû à J.M. Muller (cité dans La recherche d'octobre 1996) qui ne fait intervenir que de modestes fractions rationnelles et une définition non moins modeste de la suite en question par récurrence sur l'entier n.

Voici donc le monstre :

$$\begin{cases} U_0 = 11/2 \\ U_1 = 61/11 \\ n \geq 2 \quad U_n = 111 - (1130/U_{n-1}) + (3000/U_{n-1}U_{n-2}) \end{cases}$$

Il s'agit d'une approche guidée, du niveau Terminale S (spécialité) pour les deux premières questions, et du niveau



bac+1 pour la suite..

Pour des raisons de place je ne peux reproduire ici qu'un énoncé partiel.

1°) Donner sous forme de fractions irréductibles les valeurs de U2 et U3 . A l'aide de votre calculatrice donner les 25 premiers termes de la suite. Que conjecturez-vous ? Vous pouvez aussi utiliser un tableur.

2°) Démontrer que si cette suite converge alors sa limite l vérifie :

$$l^3 - 111l^2 + 1130l - 3000 = 0.$$

Après avoir remarqué que 5 est une racine évidente de l'équation, montrer qu'il y a deux autres candidats pour la limite éventuelle de la suite.
Parmi les trois candidats, quel est celui qui vous semble, d'après vos calculs, être l ?

3°) Démontrer que :

$$\forall n \in N : 5 \leq U_n \leq 6$$

et que la suite $(U_n)_{n \in N}$ est croissante et converge. Quelle est sa limite ?

<u>Commentaires</u> :

Ce qui me paraît intéressant, c'est le plus qu'apporte dans ce cas le calcul formel au niveau des conjectures réalisées par nos élèves par rapport aux outils plus classiques (calculatrices, tableurs ...).
1°) Voir la feuille Maple où figure ces résultats aussi bien sous forme exacte que sous une forme approchée.
Voir aussi la feuille de calcul Excel pour comprendre que, là, ce problème numérique d'instabilité est (mal)traité !

2°) Au début il n'y a pas de difficulté.
Pour les étudiants qui calculent à la main, l'aide fournie dans la question est précieuse mais si l'on utilise un logiciel de calcul formel, on peut demander la résolution de l'équation ou la mise en facteur !

Sur la feuille Maple, on peut voir les zéros ou la factorisation : l'aide fournie dans la question est inutile.

Pour ceux qui ne dispose pas d'un logiciel de calcul formel, la réponse est 100. Pour les autres, c'est 6.

3°) Là , nous abordons la partie difficile au niveau des calculs Maple ou Derive ou la TI92, vont nous permettre de souffler !
Il s'agit de prouver que :

$$\forall n \in N : 5 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 6.$$

Nous avons bien : $5 \leq U_0 \leq U_1 \leq 6$.
Mais pour la suite, c'est une toute autre histoire !

Sans un logiciel de calcul formel, l'exercice ne me semble pas être abordable en terminale. La feuille de calcul Maple permet de conjecturer que la suite $(U_n)$ semble être de la forme :

$n \geq 1$ : $\quad U_n = a_n / b_n$ , $b_n = a_{n-1}$.

Nous avons :

$$a_0 = 11,\ a_1 = 61,\ a_2 = 341,$$
$$b_0 = 2\ ,\ b_1 = 11,\ b_2 = 61.$$

Le calcul de $U_n$ en fonction de ces prédécesseurs donne :

$$a_n = 111.a_{n-1} - 1130.a_{n-2} + 3000.a_{n-3}\ ;$$
$$b_n = a_{n-1}.$$

L'étude de la suite $(a_n)$ se fait classiquement, on retrouve l'équation du début et il ne nous reste plus qu'à chercher les constantes a, b et c telles que :

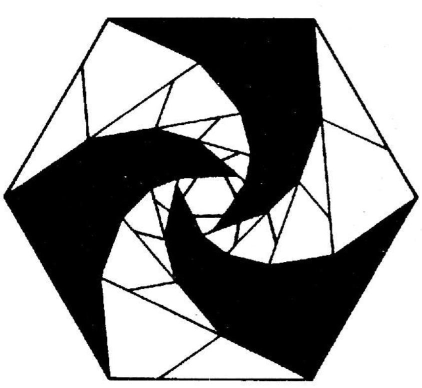
$$a_n = a.100^n + b.5^n + c.6^n.$$

On est conduit à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 11 \\ 100.a + 5.b + 6.c = 61 \\ 10.000.a + 25.b + 36.c = 341 \end{cases}$$

On obtient :

a = 0, b = 5 et c = 6, ce qui donne



$$U_n = \frac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n}$$

On peut bien entendu vérifier mais surtout démontrer la monotonie et la convergence de ($U_n$) . Là encore, les calculs se font sans problème !

## Feuille de calcul Maple V

```
> restart ; n:= 25
> X:=array (0 . . n) ; X[0] := 11/2  ; X[1]:= 61/11 :
> for k from 2 to n
      do
X[k] := 111 - 1130/X[k-1] + 3000/ (X[k-2] * X[k-1])
      od
```

A ce stade de travail, on dispose des n+1 premiers termes de la suite. On peut demander l'affichage avec 6 digits (par exemple) et/ou l'affichage sous forme rationnelle classique.

```
> for k from 10 to n do evalf (X[k], 6) od
>       5.86095
        5.88138
        5.89915
        5.91452
        5.92774
        5.93905
        5.94869
        5.95687
        5.96380
        5.96965
        5.97458
        5.97873
        5.98221
        5.98513
        5.98758
        5.98963
```

```
> for k from n-5 to n do X[k] od
```

$$\frac{22413787798580981}{3751525871703601}$$

$$\frac{134005889633282761}{22413787798580981}$$

$$\frac{801651152008680941}{134005889633282761}$$

$$\frac{4797985983097007521}{801651152008680941}$$

$$\frac{28728311253806654501}{4797985983097007521}$$

$$\frac{172071844298962973881}{28728311253806654501}$$

Si l est un candidat, alors l est l'un des éléments de l'ensemble E :

> E := {solve ($l^3 - 111 l^2 + 1130 l - 3000 = 0, l$)};
factor ($l^3 - 111 l^2 + 1130 l - 3000$)
E := {5, 6, 100}
($l$ - 100).($l$ - 5).($l$ - 6)

Pour conjecturer, ce qui suit est important:

```
> seq (X[i] , i = 0 . . 9) ;
```

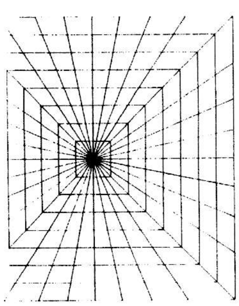
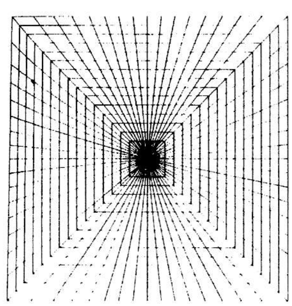
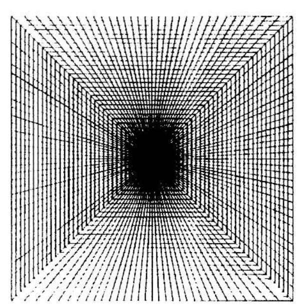
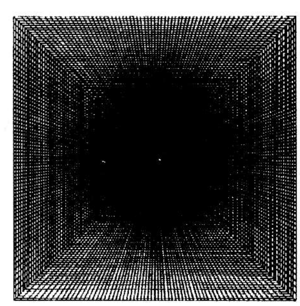
$$\frac{11}{2}, \frac{61}{11}, \frac{341}{61}, \frac{1921}{341}, \frac{10901}{1921}, \frac{92281}{10901}$$

$$\frac{358061}{62281}, \frac{2070241}{358061}, \frac{12030821}{2070241}, \frac{70231801}{12030821}$$

On va maintenant faire un peu de calcul formel !

```
> n:='n' ; u[n] := 111 - 1130 / (a[n-1]/b[n-1])+ 3000 / (a[n-1].a[n-2]/b[n-1] .b[n-2]) ;
>
> b[n-1] := a[n-2];  b[n-2] :=a[n-3]
u[n] := factor (u[n]) ;
```



$$u_n := 111 - 1130\,\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + 3000\,\frac{b_{n-1}\,b_{n-2}}{a_{n-1}\,a_{n-2}}$$

$$u_n := \frac{111\,a_{n-1} - 1130\,a_{n-2} + 3000\,a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

On a donc :
> a[n] = 111 $a_{n-1}$ - 1130 $a_{n-2}$ + 3000 $a_{n-3}$:
> solve ({a+b+c=11, 100a+5b+6c=61, 10.000a+25b+36c=341}, {a, b, c}) ;

{c = 6, a = 0, b = 5}

> $$u_n := \frac{5^{(n+1)} + 6^{(n+1)}}{5^n + 6^n}$$

On peut vérifier !
> for n from 0 to 9 do
u[n] := (5^(n+1) + 6^(n+1)) / (5^n+6^n) od
> seq (u[k] , k =0 . . 9) ;
> n:='n' ; assume (n, integer) ;
limit ((5^(n+1) +6^(n+1)) / (5^n+6^n) , n ->∞;

$$\frac{11}{2}, \frac{61}{11}, \frac{341}{61}, \frac{1921}{341}, \frac{10901}{1921}, \frac{92281}{10901}$$

$$\frac{358061}{62281}, \frac{2070241}{358061}, \frac{12030821}{2070241}, \frac{70231801}{12030821}$$

n:=n

6

Considérons maintenant l'application:

> u:=n->(5^(n+1) +6^(n+1)) / (5^n+6^n) ;

> $$u_n := n \to \frac{5^{(n+1)} + 6^{(n+1)}}{5^n + 6^n}$$

Sous cette forme calculons :
> expand (numer (factor (6-u(n)))) :

> expand (numer (factor (u(n)-5))) :

> expand (numer (factor (u(n+1)-u(n)))) :

$5^n, 6^n, 6^n\,5^n$

Toutes ces différences sont positives. La suite est donc bien bornée par 5 et 6, croissante, de limite 6.

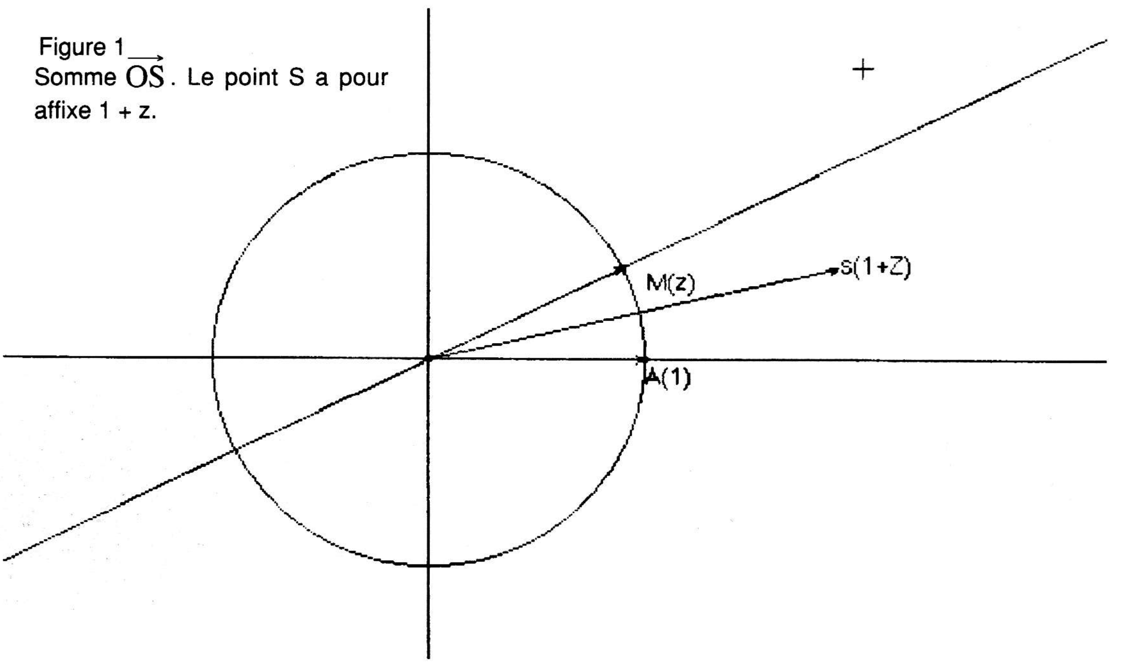
## La géométrie des complexes

Voici unexercice qui a beaucoup de succès : le début est facile à étudier avec Cabri2, c'est un exercice de construction et d'introduction pour l'aspect géométrique des nombres complexes ; pour lasuite de l'exercice on peut utiliser une calculatrice graphique, Derive ,Maple...

Soit z un complexe de module 1 et f l'application définie par :

$$f(z) = 1 + z + z^2$$

Figure 1
Somme $\overrightarrow{OS}$. Le point S a pour affixe 1 + z.



On se propose de déterminer l'ensemble l'ensemble des points M(f(z)). Dans ce qui suit on confond un point et son affixe au niveau des notations.

1- Si vous n'êtes pas encore un virtuose des calculs sur les complexes profitez de cet exercice pour retenir beaucoup de résultats. Utilisez Cabri2 pour faire la figure. Commencez par placer z : il est de module 1, son image est donc sur le cercle trigonométrique, $z^2$ a même module et un argument double, on peut donc aussi le placer facilement. Avec la somme de vecteurs de Cabri2 vous pouvez construire 1 + z puis f(z).
Demandez maintenant le lieu de f(z).
2- Si vous savez calculer (si vous ne savez pas, il faut apprendre !), il est facile de passer sous forme trigonométrique et d'obtenir, en séparant parties réelles et imaginaires de f(z), une représentation paramétrique de l'ensemble cherché.

$$\begin{cases} x = 1 = \cos\theta + \cos(2\theta) \\ y = \sin\theta + \sin(2\theta) \end{cases}$$

3- Il vous reste à étudier la représentation précédente pour obtenir la courbe associée à l'ensemble cherché.

Voici quelques figures exécutées avec Cabri 2.

On commence par construire le cercle, le point A(1) et le point M(z).
On définit les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ puis leur somme $\overrightarrow{OS}$. Le point s a pour affixe 1 + z (figure 1).

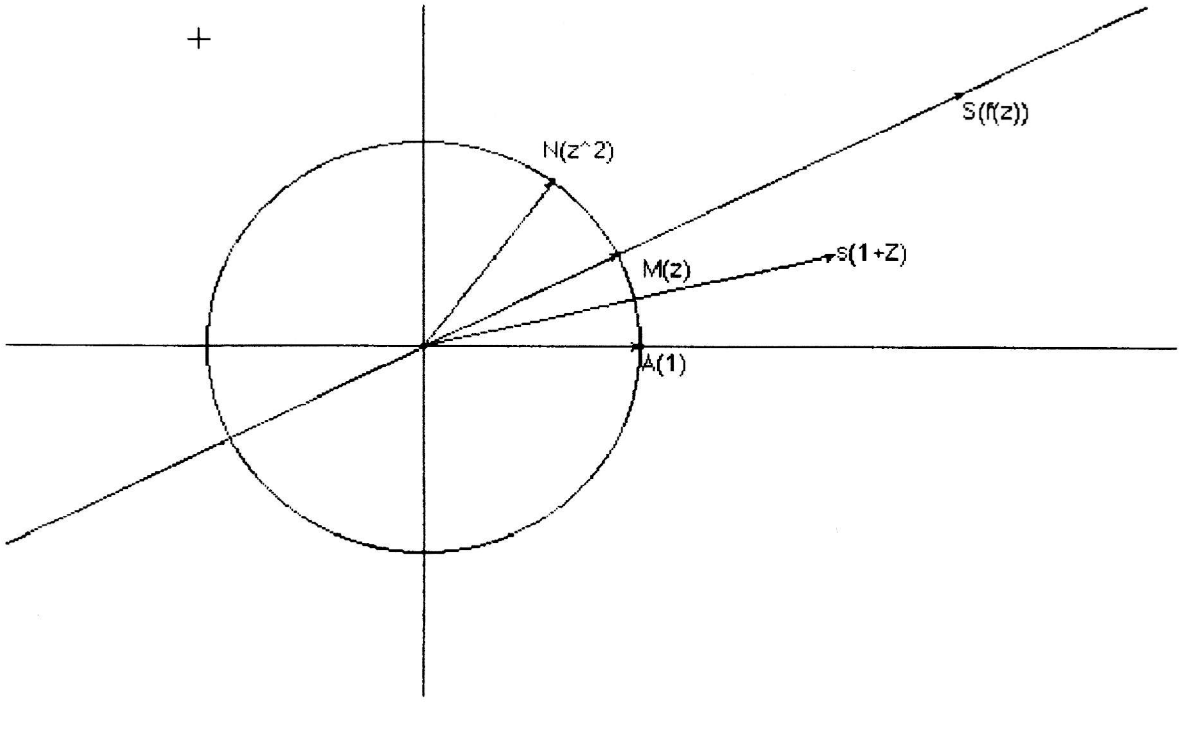
On construit ensuite le point N d'affixe $z^2$. N est le symétrique de A par rapport à la droite OM. On définit le vecteur $\overrightarrow{ON}$ et la somme $\overrightarrow{Os} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OS}$ (figure 2).

A ce stade du travail on peut déplacer M et observer le déplacement de S. On peut demander le lieu de S quand M varie, voici le résultat : (figure 3).

**Programme :**

```
> x := θ —> 1 + cos( θ ) + cos (2θ ) ;

> y := θ —> sin(θ ) + sin(2θ) ;

> derx := D(x)(θ ) ;

> dery := D(y)(θ ) ;

> solve(derx = 0) ;

> solve(dery =0) ;
```

Figure 2
Le point S a pour affixe f(z).

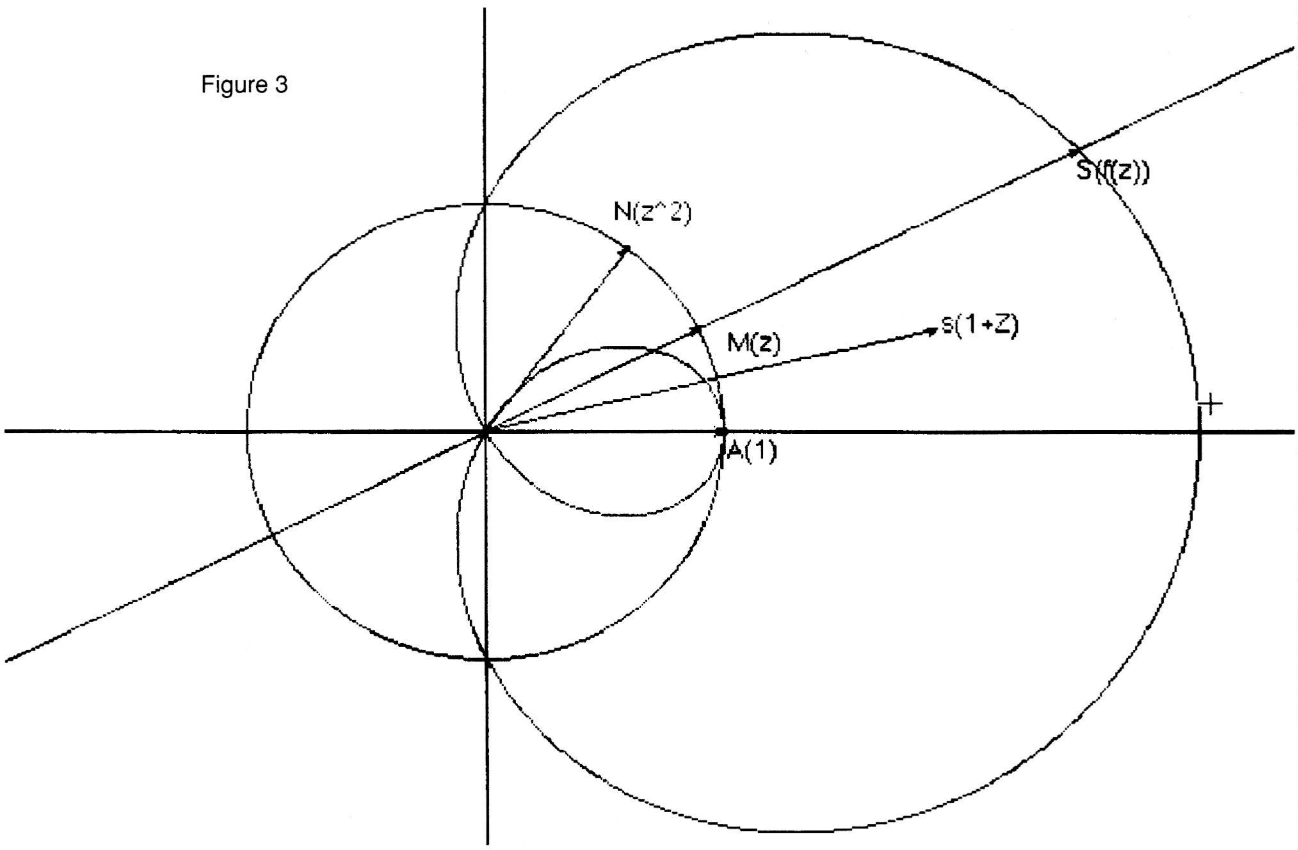


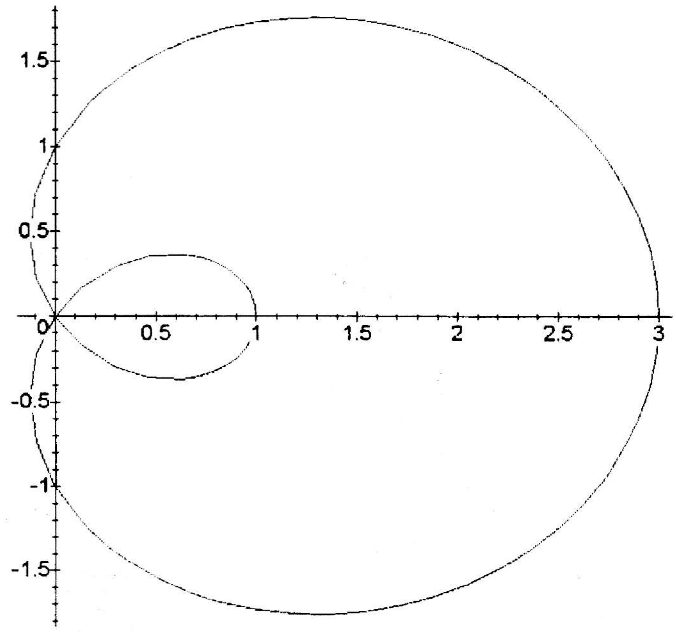
> plot([x(θ ), y(θ ), θ = 0 .. 2π ])

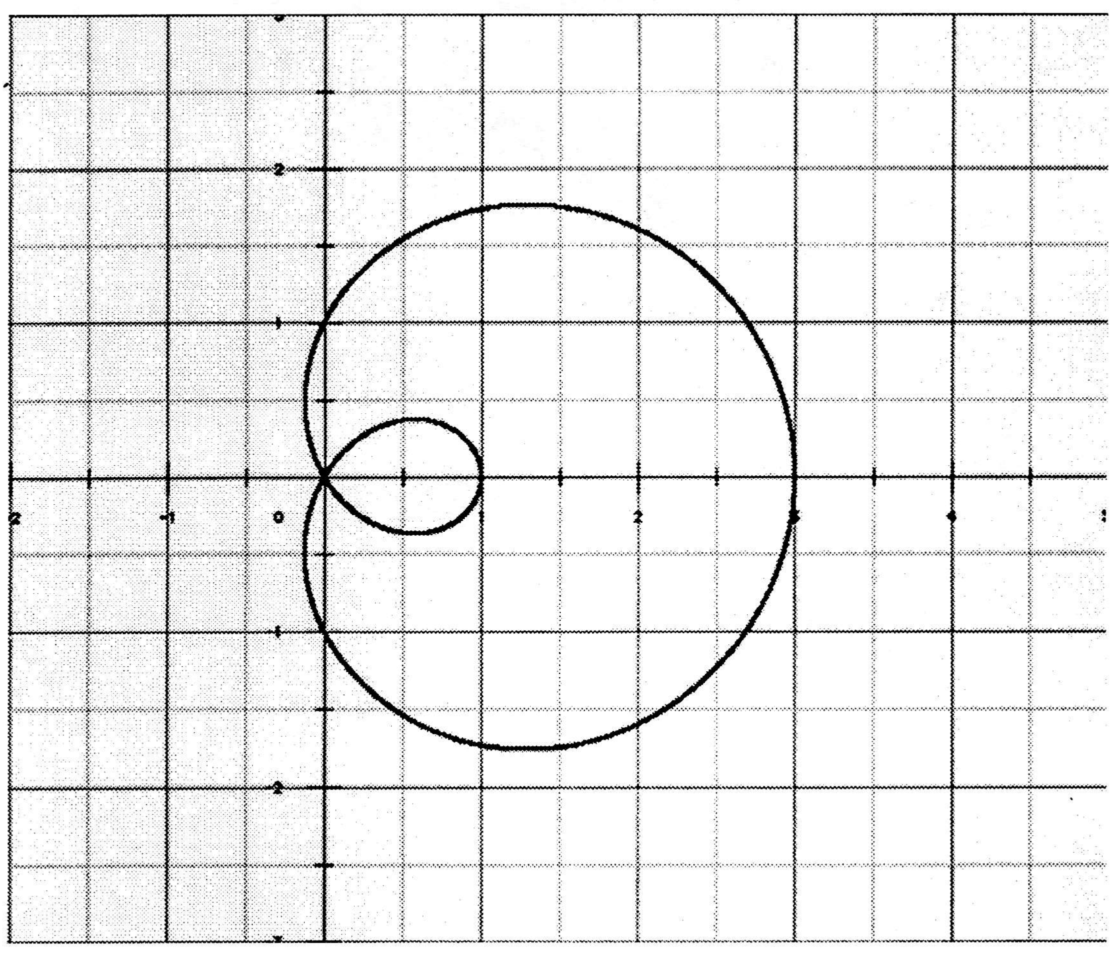
>
0, $\pi$, $-\arctan(\sqrt{15})+\pi$, $-\arctan(\sqrt{15})-\pi$

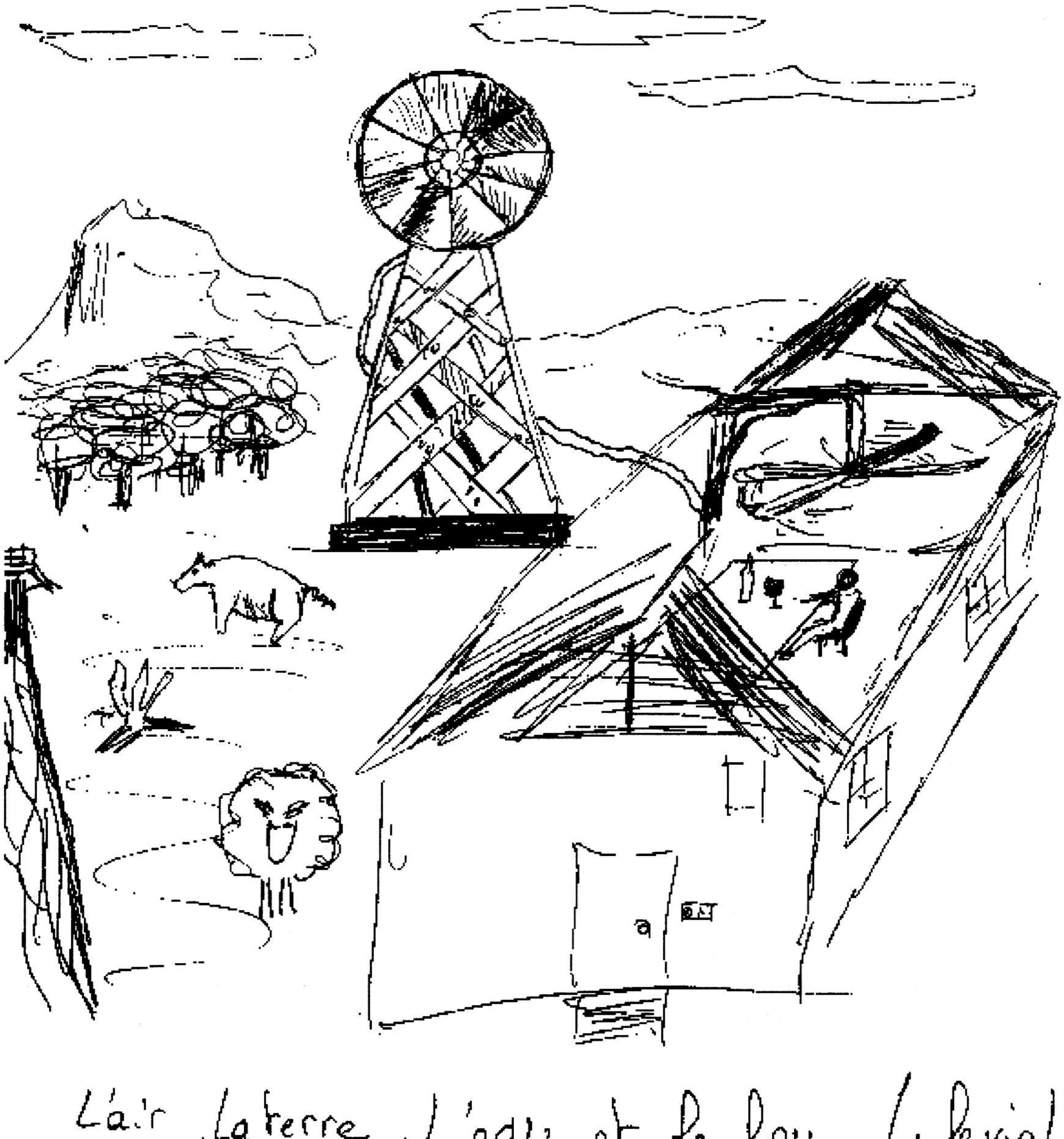
$\arccos(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{33})$, $\arccos(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{33})$

Figure 3




1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-0.5
-1
-1.5







L'air, La terre, L'eau et le feu (+ le vin)

# Productions graphiques au lycée

Marie - Françoise Monchoux et Bernard Bouldoires, Toulouse

## Introduction et méthologie

Est-ce que des productions graphiques d'élèves peuvent nous aider à comprendre les processus de maturation qui se mettent en oeuvre dans les dernières classes de l'enseignement secondaire? Est-ce que l'étude de ces mêmes tracés et figures révèlent des différences entre les élèves des sections techniques et scientifiques générales ?

Questionnaire : Le questionnaire proposé aux élèves comprenait des questions concernant la notion d'énergie en physique dont : "Essayez de faire ci-dessous un dessin qui illustre l'énergie".

Population étudiée : Les 318 élèves interrogés appartiennent à deux lycées, trois niveaux (2ème, 1ère et Terminale), six sections (F2, F'2, E, S, C, et Pro.), treize classes. Ils ont fourni 286 réponses graphiques exploitables. Chaque sous groupe d'analyse comporte environ une centaine d' élèves.

Analyse : L'analyse de ces dessins a consisté à repérer puis coder certains éléments liés à la notion d'énergie comme les sources d'énergie, l'utilisation de l'énergie, le transport d'énergie,... D'autres éléments ont été notés par exemple la présence de textes, symboles, schémas, figures de styles, thèmes ainsi que le nombre de composantes connexes. La variable "perception des dessins" a trois modalités : associative, sélective, ordonnée. Des analyses statistiques (tri, $\chi 2$) ont été effectuées.

Dessin produit par un élève de Terminale F2 (page34))

*Éléments présents :*

- Sources d'énergie : éolienne.
- Utilisation de l'énergie : chaleur, mécanique
- Transport de matière : cascade
- Transport d'énergie : fil
- Transformation de l'énergie
- Texte
- Figure de style : scène
- Réalisme grotesque : la tête

*Thèmes :*
- Mouvement,
- Confort.

- Il y a plus de 3 composantes connexes.
- La perception est associative.

- Le style est plus narratif que descriptif.

## Différences entre les niveaux

La présence de textes et de symboles décroît de la seconde à la terminale. Les participants ont confirmé une décroissance de la présence de textes écrits depuis le début de l'enseignement secondaire. Les élèves privilégient les symboles, abréviations et le formalisme qui leur semblent plus "scientifique".

Un fléchissement en première est visible pour les variables schémas, figures de style ainsi que pour les grands thèmes: mouvement, mort, confort. On peut envisager la classe de Première comme une classe intermédiaire où les élèves se cherchent , une classe où les notions sont en cours de construction. Dans l'atelier il y eu de plus confirmation du fait qu'il y a "une motivation en Seconde et Terminale qui ne se retrouve pas en Première".

La tendance à composer les dessins (perception associative et ordonnée) croît de la Seconde à la Terminale. La vision sélective décroît (perception sélective).Ceci correspond à l'organisation des connaissances qui est demandée par les programmes. Un effort de synthèse et d'organisation des éléments qui leur sont apportés est demandé aux élèves, dans ces classes.

Dessin produit
par un élève de 1ère Pro (ci-dessous)

*Eléments présents* :

• Sources d'énergie :
énergie hydraulique, énergie éolienne, pétrole, nucléaire, autres.
• Utilisation de l'énergie : chaleur, mécanique.
• Transport d'énergie, transport de matière
• Transformation de l'énergie.
• Texte
• Symbole
• Figure de style : énumération

*Thèmes :*
• Mouvement
• Il y a plus de 3 composantes connexes.
• Le style est descriptif.

## Différences entre les sections

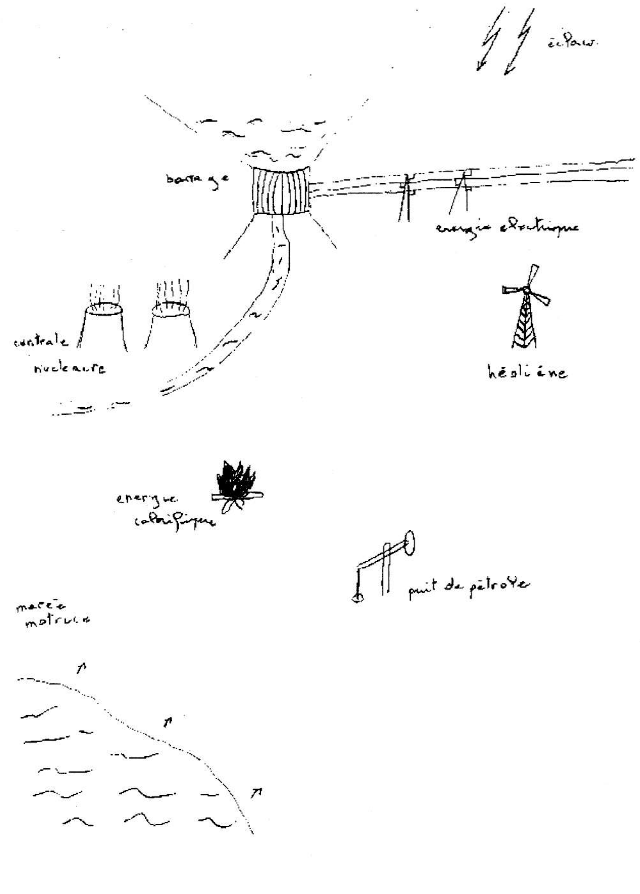
Les élèves de F2 ont tendance à faire des productions moins "sélectives" et plus ordonnées que les élèves des classes S, C ou E. Les participants ont pu y voir l'influence de l'enseignement :

• dans ses contenus : dessin industriel, schéma électriques et électroniques, technologie...,
• dans ses objectifs : réalisation et analyse des schémas, des plans...
• dans ses pratiques : pratique du dessin, exercices comportant des analyse de schéma.

Les élèves de S, C ou E ont tendance à utiliser plus facilement les symboles que ceux de F2 (influence du symbolisme mathématique et physique plus prégnant dans l'enseignement général scientifique que dans l'enseignement technique).

L'étude des réponses verbales (B. Bouldoires, thèse, 1994) fait apparaître que les élèves de S, C ou E fournissent, lorsqu'ils utilisent un mode d'expression lexical, des réponses plus ordonnées que celles fournies par les élèves de F2. Les réponses sont en quelque sorte "structurées" par les connaissances théoriques des élèves de S, C ou E.

L'étude des dessins révèle que, lorsqu'ils utilisent un mode d'expression graphique, ce sont au contraire les élèves de F2 qui produisent des réponses plus ordonnées que celles des élèves de S, C ou E. ❑

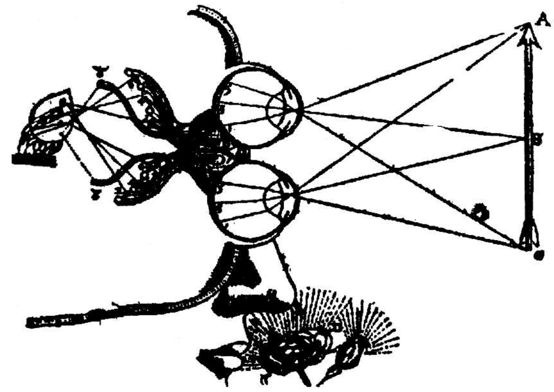


# Une approche pédagogique déduite de l'histoire

Alain Bernard Aubord, Montpellier

"Le temps se venge des oeuvres faitres sans lui" disait Léonard de Vinci . Cette notion de temps (ou de durée) se retrouve aussi bien dans la construction des connaissances d'un individu (ontogénèse) que dans la construction historique du savoir mathématique (phylogénèse) ; or, une loi biologique dit : " l'ontogénèse résume la phylogénèse ".

L'atelier développe quelques idées historiques ou épistémologiques intervenant dans la construction de nos connaissances individuelles ou collectives.



Traité de l'homme.
Fonctionnement des glandes provoqué par un objet.
Vue et odorat. Dans une lettre à Mersenne du 13 novembre 1639, Descartes avoue sa curiosité pour l'anatomie et raconte comment, chaque jour, il se rend chez un boucher d'Amsterdam pour lui commander des parties qu'il souhaite "anatomiser à loisir"

## Simplicité : les mathématiques sont la plus simple et la plus générale de toutes les sciences

Le montpelliérain Auguste Comte donnait au 19è siècle l'échelle des sciences suivante : (voir ci-dessous)

Cette simplicité - à ne surtout pas confondre avec la facilité - pose le problème du rapport des maths avec la réalité, laquelle n'est jamais simple !
Einstein écrivait : "Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité".

## Contenant et contenu : l'espace ; la mesure de l'espace

Le même Einstein précise dans " Le problème de l'espace, de l'éther ... " l'importance du concept d'espace et les "deux façons d'appréhender les concepts ... ". "La première méthode s'appelle l'analytique logique" où l'on trouve la sécurité "mais cette sécurité s'obtient au prix d'un contenant sans contenu. Cependant aucune recherche logique ne peut affirmer cette liaison. Elle ne peut être que vécue. Et c'est justement cette liaison qui détermine la valeur épistémologique des systèmes de concepts.

<u>Exemple</u> : un archéologue d'une future civilisation découvre un traité de géométrie d'Euclide, mais sans figure. Par la lecture des théorèmes, il reconstituera bien l'emploi des mots point, droite, plan. Il reconstituera aussi la chaîne des théorèmes et même, d'après les règles connues, il pourra en inventer de nouveaux. Mais cette élaboration de théorèmes restera pour lui un vrai jeu avec des mots tant qu'il ne pourra pas "se figurer quelque chose "avec les expressions point, droite, plan, etc... Mais s'il le

| | Compliqué | Particulier |
|---|---|---|
| Psychologie | ↑ | ↑ |
| Biologie | | |
| Biochimie | | |
| Chimie | | |
| Physique | | |
| Astronomie | | |
| Mathématiques | Simple | Général |

peut et seulement s'il le peut, la géométrie deviendra pour lui un réel contenu ".

## La géométrie : sciences des mesures

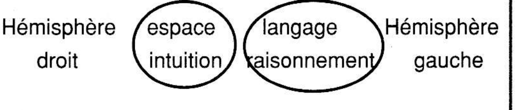
Une grave erreur serait de croire que les mathématiques sont d'abord une science déductive. Les géomètres grecs sont allés en Egypte et à Babylone s'éduquer à la sciences des mesures. Le mot « géométrie » conserve cette notion de mesure et ce mot de « mesure » est d'origine indo-européenne. Les mathématiques sont d'abord une science des mesures. « Mesure ce qui est mesurable et rend mesurable ce qui ne l'est pas » disait Galilée. Cette science des mesures est fondée sur la construction de figures simples et la mesure de leurs éléments avec des nombres. Ensuite, beaucoup plus tard, les Grecs ont transformé cette science de la mesure en la première science rédigée de manière axiomatique : la géométrie d4euclide. Pourtant le livre clé des Eléments d'Euclide reste le livre V de la " Mesure des grandeurs".

## La "Géométrie" de Descartes (1637)

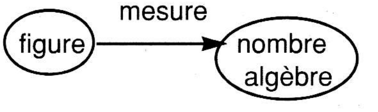
Dans son "Discours de la méthode... ", Descartes évoque "l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes ... qui ne semblent d'aucun usage" mais il évoque aussi « ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations ... ".
Sa "Géométrie" propose en moins de 100 pages une nouvelle méthode pour résoudre les problèmes de mathématiques. Pas d'axiomatique ou de définitions chez Descartes. Il n'y en aura pas de sitôt d'ailleurs! Simplement une méthode où « souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi les lignes sur le papier et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter le ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b et j'écris a + b".
La géométrie d'Euclide devient une géométrie algébrique. Chasles écrira au 19è siècle dans son "Aperçu historique" : "Viète ... par l'intervention de l'algèbre ... eut encore la gloire d'introduire cet instrument admirable dans la science de l'étendue, et d'initier les géomètres ... à l'art de représenter géométriquement les résultats de l'Algèbre ; premiers pas vers une alliance plus intime entre l'Algèbre et la Géométrie, qui devait conduire aux grandes découvertes de Descartes, et devenir la clef universelle des mathématiques.

## Conclusion : la géométrie algébrique, activité de base de l'esprit

Les mathématiques sont une création de l'esprit. Aussi doit-on s'attendre à une certaine analogie entre le foncionnement des maths et celui du cerveau.

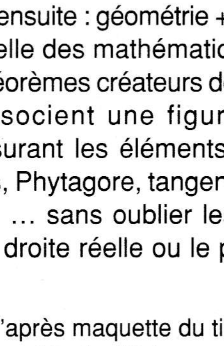



Et l'analogie est certaine. Les mathématiques fonctionnenet et se construisent, effectivement de la même manière.




La figure simple (segment) associée à un nombre donne la science des mesures qui deviendra ensuite : géométrie + algèbre= la clé universelle des mathématiques.
Les grands théorèmes créateurs des mathématiques associent une figure et des nombres mesurant les éléments de cette figure : Thalès, Phytagore, tangente et dérivée, intégrale ... sans oublier les repères cartésiens, la droite réelle ou le plan complexe. ❑

Photo d'après maquette du timbre, Martin Mörk




*Voir ausi l'exposition : "Descartes : doutes et certitudes du chercheur*

# Du lycée au 1er cycle des Ecoles d'architecture,

## QUELLE GEOMETRIE ?

F. Bonafé & T. Berthomier, Montpellier

Depuis 1992, quelques enseignants du groupe géométrie de l'IREM de Montpellier, en activité dans le secondaire, collaborent (comme vacataires) à l'enseignement de la géométrie à l'EARL.

Cette collaboration a permis de cerner plus clairement le profil et les lacunes des entrants à l'EARL, un contenu et des méthodes pour l'enseignement de la géométrie (distinct de l'enseignement de la représentation) paraissant les mieux adaptés à cette population.

Afin de cerner plus précisément la population concernée, nous proposons un test à tous les étudiants de première année le jour de la rentrée (ce questionnaire fait l'objet de l'annexe 1). Nous présentons ci après quelques résultats dégagés des réponses obtenues lors des rentrées de 1993 et 1995 (durant cette période les dénominations des divers baccalauréats ainsi que les contenus enseignés ont étés quelque peu modifiés).

## Les entrants à l'EARL

Nous avons classé les étudiants de première année en trois catégories:

- **S** : il s'agit de ceux qui entrent avec un baccalauréat général à caractère scientifique récent (moins de quatre ans).
- **L** : ce sont ceux qui entrent avec un baccalauréat général à caractère non scientifique récent (moins de quatre ans).
- **T** : nous avons regroupé là les étudiants possédant un diplôme à caractère technologique récent (moins de quatre ans) ainsi que les étudiants ayant une expérience professionnelle, quel que soit le niveau acquis en fin d'études secondaires.

Pour les deux années observées, ils se répartissent de la façon suivante (en %).

| | S | L | T |
|---|---|---|---|
| Année 93/94 | 45 | 21 | 34 |
| Année 95/96 | 59 | 21 | 20 |

On peut remarquer que la part des L est constante alors qu'il y a une baisse des T au profit des S. Ce choix est peut-être le résultat d'une politique locale puisque il y a une sélection des candidatures à l'entrée. Peut-être est-il fortuit ? En tout cas il ne modifie pas la part de la population ayant une formation à caractère scientifique ou technologique.

Cette répartition est une spécificité de l'EARL. On ne la retrouve pas dans les autres filières de l'enseignement supérieur.

## Test et résultats

Le dépouillement du questionnaire (qui se trouve en annexe 1) fait apparaître des résultats globalement peu différents pour les deux années observées. On peut simplement noter qu'ils sont identiques en L, et pour 1995 légèrement inférieurs en S et légèrement supérieurs en T à ceux de l'année 1993.

Les résultats aux premières questions sont conformes aux pronostics: égalités remarquables, médiatrices, sont bien connues de tous. Il n'en est pas de même de l'ellipse, mais là aussi c'est conforme aux pronostics car elle n'est étudiée que dans certaines classes scientifiques. Pour les autres étudiants, elle relève simplement de la culture acquise sur le sujet.

**La question 5**

a) Comment détermine-t-on graphiquement le centre de gravité d'un triangle quelconque?

Réponse:

b) Quelle est sa propriété ?

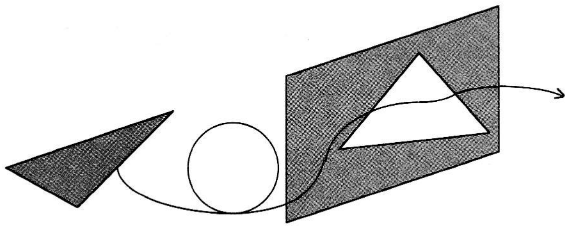
Réponse:

**La question 6**

Figure ci-dessous.

Enoncer clairement, à l'aide de termes géométriques élémentaires, la condition nécessaire et suffisante pour que le triangle quelconque, plein, passe par le trou triangulaire quelconque (ces deux triangles étant différents et supposés sans épaisseur).

Réponse:



Environ 70% des candidats donnent une bonne dÉfinition du centre de gravité. Cela va de 58% pour les L ou les T à 85 % pour les S. On observe quelques contradictions entre la figure qui est toujours correcte quand elle est présente et le langage associé qui lui est parfois incorrect (médiane étant remplacé par médiatrice ou hauteur).

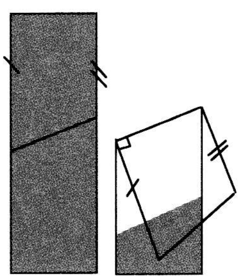
Quand il s'agit de donner sa propriété (il faut en choisir une), il ne reste que 38% des étudiants pour donner une propriété correcte (et cohérente avec leur précédente réponse) du centre de gravité. Cela va de 53% pour les S à 25% pour les T et 20% pour les L.

Enfin au sujet de l'exercice 6, seulement 29% font référence à une hauteur d'un triangle (pas toujours le bon d'ailleurs). Ils se répartissent en 38% pour les S, 32% pour les T, et seulement 8% des L.

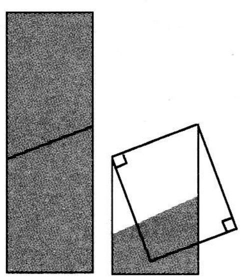
Le tableau qui suit résume ces résultats.

| | S | L | T | Ensemble |
|---|---|---|---|---|
| Question 5a | 85 | 58 | 58 | 70 |
| Question 5b | 53 | 20 | 25 | 38 |
| Question 6 | 36 | 8 | 32 | 29 |

Au-delà des simples questions de vocabulaire on constate une méconnaissance profonde des concepts de centre de gravité et de hauteur dans un triangle.



Priorité aux longueurs des bords

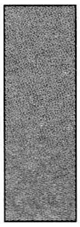


Priorité aux angles droits de l'extrémité

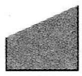
**La question 7**

Figure 2 ci-dessous.

Sur une bande de papier rectangulaire, tracer un pli rectiligne (Éviter 45° qui est particulier). Dessiner à main levée le plus rigoureusement possible cette bande repliée avec les indications nécessaires et suffisantes pour valider l'exactitude de votre figure.



Déplié
Indiquer le pli.



Replié
Compléter la figure.

Dans 6% des copies la réponse est absente. Seulement 39% des candidats proposent une solution correcte à cet exercice (en acceptant les solutions où les indications sont omises ou incomplètes). Cela va de 48% en S à seulement 23% en L. Si l'on s'intéresse à la notion d'invariant, c'est l'angle droit supérieur qui est le plus souvent conservé, c'est vrai pour 70% des dessins. Les longueurs sont de façon approximative conservées dans 60% des dessins, les autres angles (pliage) ne le sont que dans seulement 45% des cas.

Par contre 37% des dessins montrent les bords de la partie repliée perpendiculaires au pli ce qui conduit à un choix concernant les invariances d'angles ou de longueur. Les dessins suivants sont des prototypes de ces dernières réponses.

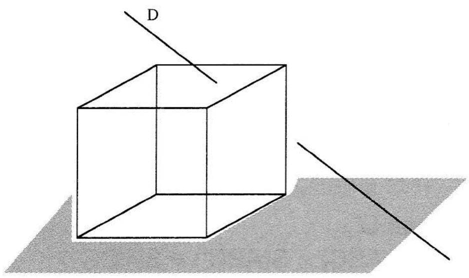
Pour plus d'un tiers des étudiants, l'invariance dans un déplacement n'affecte pas de façon globale une figure. Cette notion est parcellaire et peut affecter longueurs ou angles de façon indépendante.

**La question .**

Figure 3 ci-contre.

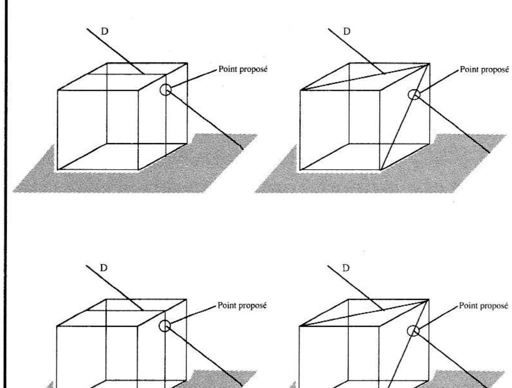
Pouvez-vous dÉterminer graphiquement, à main levée mais avec précision sur cette perspective d'un cube posé sur un plan, le point ou la droite (D) sort de la face latérale de ce cube?

La question posée n'impose pas explicitement une réponse graphique, deux étudiants ont d'ailleurs affirmé qu'il ne leur était pas possible de répondre, les données étant pour eux insuffisantes. Dans 8% des copies la réponse est absente sans qu'une explication soit fournie. Dans 6% des copies seulement, le dessin est correct, il ne contient pas d'incohérence, et il montre que les deux points où la droite D parait traverser des plans horizontaux ont étés utilisés dans la construction.




Dans 35% des copies la réponse semble relever du hasard, peut-être de l'esthétique, on n'observe pas de trait de construction. Ce type de réponse parait indépendant de l'origine de l'étudiant, les résultats sont identiques quels que soient l'année observée ou leur formation antérieure.

Dans tous les autres cas présentant des éléments de construction, on observe des incohérences entre les "théorèmes" mis en oeuvre et les données du problème. Ces incohérences conduisent les étudiants ne prendre en compte qu'un seul point donné et une direction arbitraire pour définir la droite D. Les figures suivantes sont des prototypes de leurs productions.




Les propriétés d'incidence, maîtrisées par les étudiants en géométrie plane, ne sont pas prises en compte dans les problèmes faisant intervenir des représentations spatiales.

L'essentiel des résultats dégagés à partir de ces tests vient confirmer les résultats énoncés par AUDIBERT G.(1982) pour ce qui est de la géométrie plane et ceux de AUDIBERT G (1985) et CHEVALIER A (1988). pour la géométrie de l'espace.

## La géométrie de l'architecte

Existe-t-il, au delà des modes, une géométrie des architectes? Lorsqu'on les interroge à ce sujet, les réponses sont très diverses et directement en prise avec leur secteur d'activité.

Cela peut varier de "la géométrie de l'angle droit" à "la géométrie de la représentation" ou bien "la géométrie du triangle".

Ces points de vues quelque peu réducteurs laissent de côté toutes les possibilités qu'une structuration rigoureuse du plan et de l'espace laissent à l'invention.

Depuis que l'architecte dessine, il n'a jamais cessé d'emprunter à la géométrie.

Aujourd'hui, l'espace est considéré comme son domaine privilégié, et cela explique sans doute l'importance accordée aux espaces de représentation architecturaux, systèmes qui se nourrissent de l'espace géométrique proprement dit. Deux exemples évidents: on ne peut circonscrire un cercle par plus de six cercles qui lui sont égaux ni développer une surface non développable dans le plan. Cela pour dire qu'on ne peut manipuler l'espace géométrique selon son bon vouloir. Il y a une limitation géométrique propre et cela reste une donnée primitive.

Des systèmes de contraintes autres que l'espace géométrique, retenons principalement pour les registres les plus couramment aperçus et utilisés en architecture, les modes graphiques, cartographiques, topologiques et figuratifs.

Tracer, localiser, explorer, figurer sont des pratiques qui peuvent procéder d'un autre enseignement. Le notre s'attache à clarifier les données primitives de l'espace géométrique afin d'assurer son transfert par les systèmes de représentation.

Dans les enseignements voisins que sont la géométrie descriptive et la perspective, on constate trop souvent les difficultés des étudiants qui confondent géométrie de l'objet et celle de sa représentation, à aborder ces géométries.

Ils ont tendance à croire que la représentation définira l'objet alors qu'elle ne peut que communiquer - à sa manière -

une information présente dans l'espace géométrique, information qu'ils énoncent souvent avec imprécision. Par exemple, un étudiant qui traite de l'intersection d'une droite et d'un plan en géométrie descriptive mémorise un ensemble de procédures qui en fait, décomposent le problème en intersection de deux plans puis de deux droites, décompositions trop souvent passées sous silence au bénéfice de routines aussi facilement oubliées qu'apprises.

## Quelle géométrie pour l'élève architecte ?

Compte tenu de la nature de la population des étudiants de première année à l'EARL (répartition, précisions apportées à son sujet par les tests), compte tenu également des horaires accordés localement à l'enseignement de la géométrie (en dehors des questions de représentation, les étudiants ont 30 heures de géométrie sur l'année) nous avons dû effectuer des choix sur les contenus à enseigner et sur les méthodes de travail.

Pour ce qui est des méthodes, après avoir goûté au cours magistral en amphi suivi de travaux dirigés comme cela se pratique dans de nombreuses universités, nous avons opté pour un système que nous appelons cours/T.D où les étudiants sont répartis par groupes inférieurs à 40. Cela permet une activité plus soutenue de leur part. Nous avons également réalisé un polycopié [1] qui contient l'essentiel des questions abordées et, entre les examens partiels, nous leurs proposons des travaux à réaliser en autonomie que l'on nomme "sujets d'études" dont un exemple figure en annexe 2.

Pour ce qui est des contenus nous avons privilégié trois thèmes qui nous paraissent incontournables.

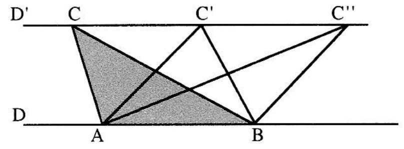
### THEME 1 : Figuration et formalisme

Il s'agit pour l'essentiel d'exploiter visuellement une figure à partir de simples propriétés sur les surfaces, afin d'établir et d'utiliser d'autres propriétés déjà connues ou à découvrir comme les théorèmes de Thalès, de Céva, de Pappus. Nous axons notre travail sur l'aire du triangle et quelques propriétés communément admises à son sujet.

Règle 1:
la surface d'un triangle est invariante dans tout déplacement ou retournement.

Elle est donnée par
quelles que soient la base b et la hauteur h correspondante.

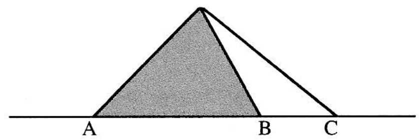
Règle 2 :
Si D et D' sont parallèles, la surface du triangle ABC est indépendante de la position




de C sur D'.

S(ABC) = S(ABC') = S(ABC")

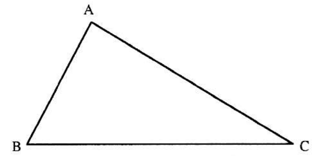
Règle 3 :
réciproquement, si un triangle a une surface fixe donnée et un côté AB fixe, son troisième sommet C situé d'un côté donné de AB, est sur une droite parallèle à AB.




Règle 4:
A, B, C étant alignés, les surfaces des triangles ABS et BCS sont dans le rapport de leurs bases AB et BC.

$$\frac{S(ABS)}{S(BCS)} = \frac{AB}{BC}$$

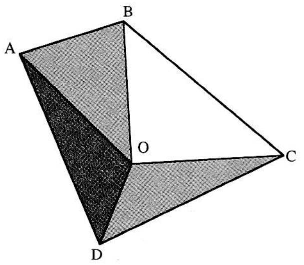
C'est notre point de départ, il nous permet de réconcilier avec la pratique de la géométrie ceux qui ont pour des raisons diverses rejeté toute activité mathématiques. De plus, il ne les met pas en position de retrait par rapport à ceux possédant déjà une bonne expérience et un usage convenable du langage formel, ce qui favorise leur activité. Ce travail permet à tous d'aborder des exercices dont la solution n'est pas évidente




comme les questions suivantes.

ABC est un triangle. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que S(ABM) = S(ACM) ?

ou encore...

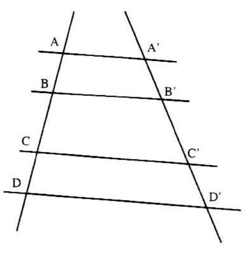



ABCD est un quadrilatère convexe. Peut-on construire à l'intérieur un point O tel que:

$$S(OAB) = S(OBC) = S(OCD) = S(ODA) \ ?$$

**Deux points de vue coexistent :**

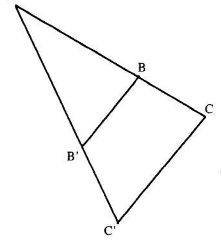
Lignes proportionnelles




Des parallèles déterminent sur des sécantes des segments proportionnels.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Triangles semblables




Si l'on trace une parallèle à un côté d'un triangle, elle détermine deux triangles à côtés proportionnels.

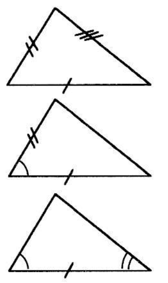
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$$

Une fois abordés les divers points de vue sur le théorème de Thalès (d'accès facile par les aires) et le travail sur les proportions qui les accompagne .la similtude vient naturellement servir de synthèse à ces résultats.

**THEME 2 : Résolutions des triangles**

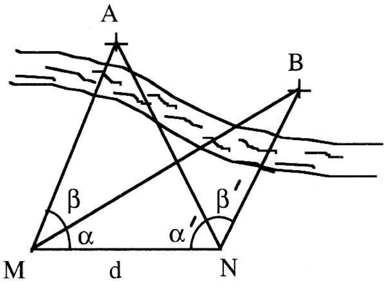
Ce thème résume pour l'essentiel, les diverses méthodes qui permettent lorsque un triangle est fixé, d'en calculer les divers éléments. Il prend appui sur ce que nous appelons les trois cas d'existence d'un triangle ( la majeure partie du travail effectué dans ce chapitre nécessite quelques connaissances et savoir-faire en trigonométrie dont l'essentiel doit être remis en mémoire).

Un triangle est défini ( à une isométrie près):
- Soit par ses trois côtés,
- Soit par deux côtés et l'angle qu'ils déterminent,
- Soit par deux angles et le côté qui leur est commun.



Les étudiants d'aujourd'hui n'ont pas été formés en géométrie à partir des cas d'égalité (ou de similitude) des triangles, ce sont les isométries et l'homothétie qui constituent le fil conducteur de la géométrie dans l'enseignement obligatoire. Comme le souligne CHEVALIER A. (1988) dans ses conclusions "la construction d'un triangle n'est pas définitivement acquise par tous les élèves de l'enseignement secondaire."

D'autre part, l'essentiel du travail sur les relations métriques dans le triangle s'effectue dans les classes de première scientifique seulement. Notre objectif est que les étudiants acquièrent une certaine autonomie dans le traitement des exercices comme le suivant.




Sur la figure ci-dessus A et B sont deux points inaccessibles dont on veut mesurer la distance.

A partir de deux points accessibles M et N dont on connaît la distance d, on relève les angles:

$$\widehat{BMN} = \alpha,\ \widehat{BMA} = \beta,\ \widehat{ANM} = \alpha',\ \widehat{ANB} = \beta'$$

Calculer la distance AB en fonction de d,

**THEME 3: Géométrie plane et problèmes spatiaux**

De nombreux problèmes de géométrie dans l'espace se ramènent souvent à des problèmes de géométrie plane dès lors qu'un "bon plan" dans lequel on va travailler a été mis en évidence.

L'objectif de ce thème est de montrer sur quelques situations simples comment interviennent les résultats déjà obtenus dans les chapitres précédents pour résoudre des problèmes spatiaux.

<u>Règles d'incidence</u> :

1) Deux points distincts déterminent une droite et une seule.

2) Trois points non alignés déterminent un plan et un seul. (Ou bien deux droites distinctes et parallèles déterminent un plan et un seul.)

3) Si deux points distincts sont contenus dans un plan, la droite qu'ils déterminent est entièrement contenue dans ce plan.

4) L'intersection de deux plans distincts est une droite.

5) Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et cela suivant deux droites parallèles.

<u>Règles d'orthogonalité</u> :

1) Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles issues d'un même point sont perpendiculaires.

2) Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

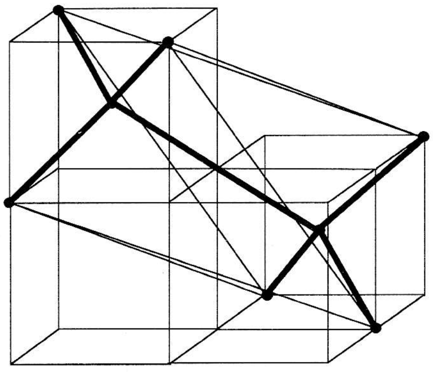
3) Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

4) Deux plans sont perpendiculaires si une droite de l'un est perpendiculaire à l'autre.

<u>*Théorème du toît :*</u>

Si un plan parallèle à une droite D coupe deux plans P et P' contenant D suivant deux droites $\Delta$ et $\Delta'$ respectivement alors $\Delta$ et $\Delta'$ sont des droites parallèles à D.

L'essentiel des situations rencontrées concernent le cube ou le pavé, c'est pourquoi les premiers paragraphes traitent des sections planes du cube. Afin de pouvoir effectuer un travail déductif rigoureux, nous procédons à un rappel des principaux résultats de géométrie dans l'espace.



La structure tubulaire ci-contre (en traits épais) a été créée à partir d'un réseau de cubes de 1 m d'arête (en traits fins) et de leur structure tétraédrique. Les traits moyens représentent des câbles.

Calculer les longueurs de tube et de câble nécessaires à sa réalisation.

Pour l'essentiel ces règles sont ignorées des étudiants, et bien souvent ils ne pensent pas que même à main levée, un croquis de situation spatiale puisse de certaine façon en dépendre. Nous tentons alors de leur donner quelques méthodes de recherche qui seront réinvesties aussi bien en géométrie descriptive qu'en perspective. On traite par exemple la recherche de l'intersection entre une droite et un plan qui nécessite le choix d'un plan auxiliaire contenant la droite. Ici, l'autonomie des élèves est recherchée pour le traitement des exercices comme celui qui suit.

**Et après ?**

Au-delà de ces trois thèmes qui répétons-le nous paraissent incontournables, les sujets qui sont abordés ne sont que des compléments de culture et de pratique pour un architecte qui vont souvent venir comme applications de ce travail.

C'est le cas par exemple, de l'étude des polygones réguliers, des frises et des pavages du plan, on s'intéresse alors à des problèmes comme :

Peut-on recouvrir une bande de plan ou le plan tout entier à l'aide d'un seul type de polygones réguliers de même taille ?

Trois dessins représentent une même arche, d'abord en perspective, puis en vue de dessus et vue de face.

Le volume extérieur ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête a.

Le volume intérieur EFGHE'F'G'H' est un cube d'arête b, (b < a).

Ces deux cubes ont un même axe de symétrie vertical et leurs faces sont parallèles.

Calculer l'angle dièdre d'arête AE après avoir calculé successivement les cosinus et sinus des angles E' F, A F, A E'.
L'étude des angles dièdres ou trièdres occupe parfois pour l'architecte une place importante, il peut avoir à traiter le type de question qui suit:

Nous abordons également l'étude des polyèdres et de quelques pavages de l'espace, bien sur, ce sont les polyèdres réguliers qui sont au centre de notre travail, par exemple:

Ainsi que le montre la figure ci-dessous, le dodécaèdre régulier peut être considéré comme l'assemblage de six polyèdres identiques sur chacune des six faces d'un cube.

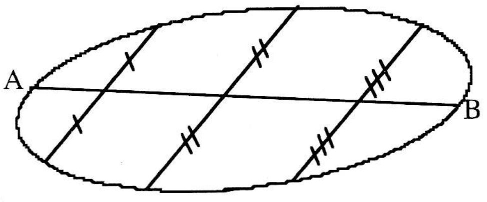
Soit c la longueur de l'ar'te du cube et a celle de l'arête du dodécaèdre .
On a:

AB = BC = CD = DA = a et
AE = BE = CF = DF = c.

1- Connaissant les angles du polygone régulier, préciser les angles B A, B¬E, A F, E¬D. En déduire une relation entre a et c.

2- Calculer les angles dièdres d'arêtes AB, BC et EF.

Nous accordons également une place privilégiée au travail sur l'ellipse pour

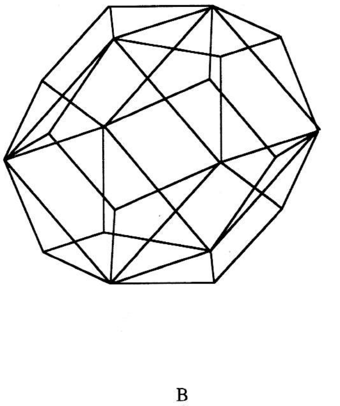


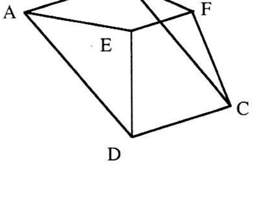

l'importance qu'elle peut prendre dans les problèmes de représentation alors qu'elle est quasiment ignorée de l'enseignement secondaire. C'est la notion de diamètres conjugués qui permet d'envisager des tracés approchés, c'est pourquoi nous proposons:

1- En utilisant l'affinité, démontrer que les milieux des cordes parallèles d'une ellipse sont alignés et définissent un segment [AB].

2- Sachant que parmi toutes les cordes parallèles à une corde donnée figure nécessairement un diamètre, démontrer que [AB] et ce diamètre sont deux diamètres conjugués.

Nous proposons en annexes 3 et 4 et en guise de conclusion les deux sujets d'examen des années passées. ❑






**Bibliographie**

**AUDIBERT G.** (1982) Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. Vol. 1 et 2. Publication N° 56 de l'APMEP

**AUDIBERT G.** (1985) Une problèmatique en géométrie de l'espace. Edition IREM-USTL, Place E. Bataillon, Montpellier.

**BERTHOMIER T.** (1995) Géométrie pour l'élève architecte. CoÉdition IREM-USTL, Place E.Bataillon, Montpellier et EALR Montpellier.

**CHEVALIER A.** (1988) Procédures de constructions de triangles. Edition IREM-USTL, Place E.Bataillon, Montpellier.