Clins d'œil

Marcel Berger, Paris, 1985

Ce texte était joint au rapport scientifique de l'année 1985 fait oralement par Marcel Berger au Conseil d'Administration de l'IHES, Institut des hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette, dirigé aujourd'hui pâr Jean-Pierre Bourguignon. Marcel Berger nous a quitté cette année. Il s'était beaucoup investi dans le partage par tous des mathématiques et de la théorie du chaos.

Qu'est-ce qu'un cristal ?

Jusque dans les années 70, c'était (aux agitations thermiques près) un système triplement périodique. Dogme !
Preuve : clivages plans parfaits et bons angles, surtout diffractions aux rayons X (figure ci-dessous).

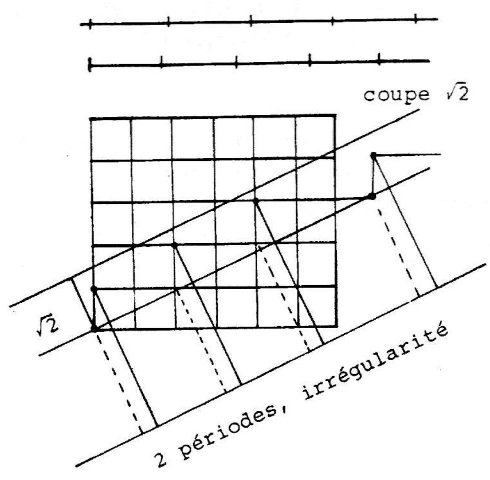
Ces pavages sont engendrés par é (ou 3) translations et itérées.

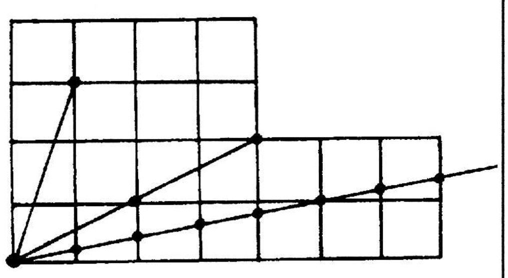
Du premier dogme (facile mathématiquement), on arrive au second : jamais de symétries pentagonales ou dodécaédriques.

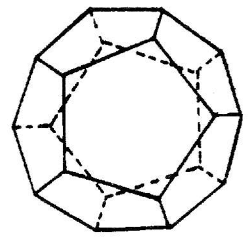
Or, dans les années 70, une analyse plus fine, aux rayons X, montrait au moins deux réseaux distincts superposés : carrés de coté 1 et t, variant continuellement avec la température. Donc presque toujours incommensurables, donc <u>aucune période</u>. Le premier dogme devient faux.

En 1984, plusieurs équipes trouvaient des crisatux à symétrie dodécaèdrale (refroidir très vite un alliage Al, 10-20% Mu).
Les rayons X font apparaître une symétrie pentoganole.
Le deuxième dogme devient aussi faux !

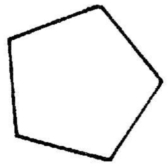
Ainsi, l'idée visuelle-géométrique était fausse. Il faut, pour rendre compte de la réalité, faire appel à des êtres mathématiques plus complexes (un cristal est une fonction "presque-périodique").
Mais pour avoir une symétrie dodécaèdrale, il faut une abstraction : on considère un *"vrai cristal"* mais en dimension 4, 5, 6 et un cristal ordinaire sera une section, une coupe: sur terre, on voit seulement la projection de cette coupe.
Dessins en dimensions 1-2 :



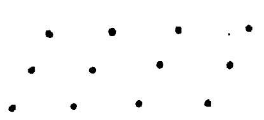




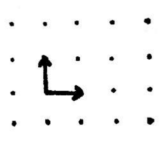
Dodécaèdre



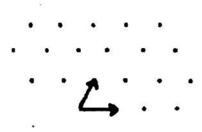
Le pentagone



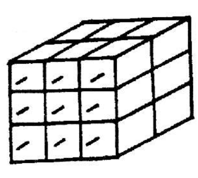
quelconque



carré



haxagonal



cubique

Typiquement en physique actuelle : ainsi le modèle Kalusa-Klein à 5 dimensions, actuellement un modèle à 10-11 dimensions, trois sont visibles, les autres correspondent à des constantes tellement petites qu'on ne sait pas encore "les voir". Mieux : dans la théorie des "cordes-super-cordes", ajouter un nombre infini de dimensions ; une particule, c'est une courbe, à ne pas confondre avec sa trajectoire.

Pratiquement : en redescendant sur Terre (en 3 dimensions), on peut effectivement utiliser ces dimensions infinies, leurs symétries et obtenir des modèles correspondant à la réalité.

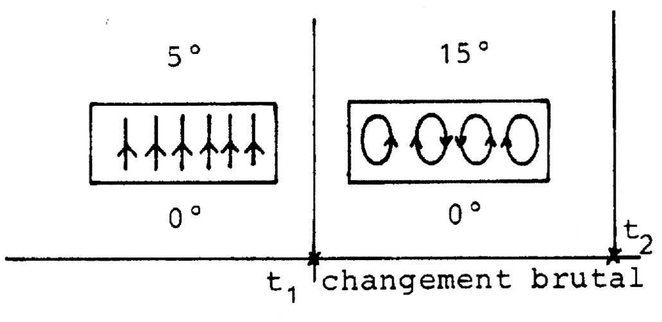
Les exposants de Feigenbaum

Un problème d'actualité (1985) est celui des transitions de phase : coup de bélier hydraulique, mur du son, eau qui bout, prédictions météorologiques.

Dans tous les cas, il s'agit plus ou moins de mécanique des fluides, donc de fonctions, donc de dimension infinie. L'idée est d'étudier des modèles simples, en particulier à un nombre fini de dimension s.

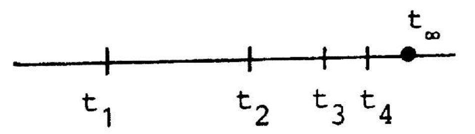
Expérience de Rauleigh-Bénard en 1900 :

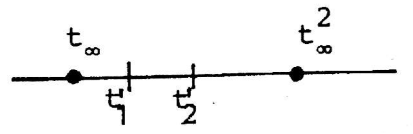
Courants de convections, d'unecertaine période. Température critique t_1. Puis de nouveau changement en t_2 (période double), etc.: t_3, t_4, ... limite finie t_∞.



En t_∞, le plus souvent on a un chaos (Ruelle-Takens).

Ensuite, on repart avec une période triple, puis ...





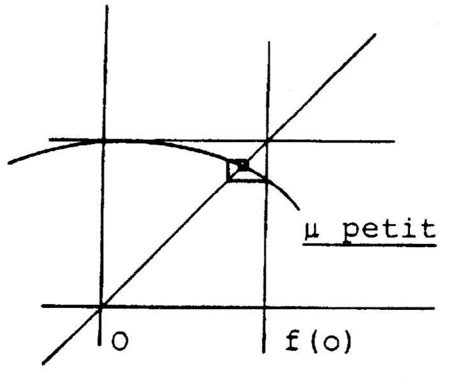
Pour étudier ces t, il y a quelques années, Feigenbaum imagina d'étudier un modèle à une dimension (fonction ordinaire) et conjectura ceci : après normalisation évidente, on ne peut rein dire sur les t_i eux-mêmes mais sur la façon dont ils tendent vers t_∞ : elle est universelle.

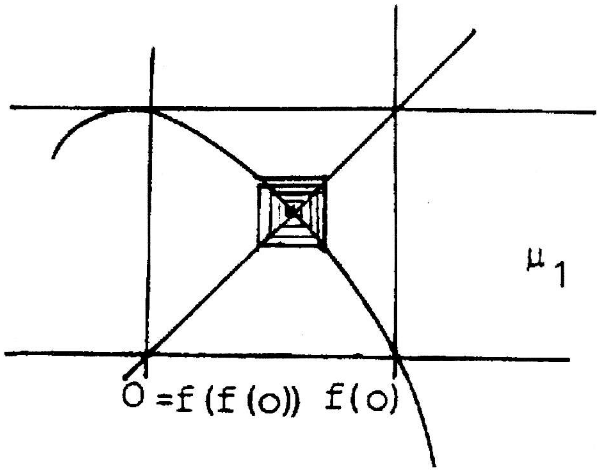
$$\frac{t_n - t_\infty}{t_{n+1} - t_\infty} \longrightarrow 4,66 \qquad n \longrightarrow \infty$$

La vérification expérimentale a eu lieu la première fois par Libchaber en 1984 d'abord avec de l'hélium liquide puis avec du mercure à des températures raisonnables.

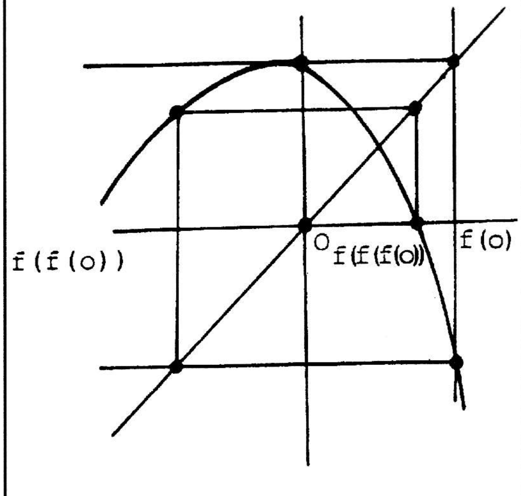
Feigenbaum prenait comme modèle la fonction $1 - \mu x^2 = f(x)$, les μ variant.
On cherche ce qui se passe en itérant : x, f(x), f(f(x)), ... car c'est la façon pratique de résoudre une équation différentielle ou de trouver des points stables.

μ petit classique, un point fixe et converge jusqu'à ce que :





Il y a alors *"bifurcation"* et O apparaît avec la période 2.
La valeur d'après, μ_2,
est quand f(f(f(f(0)))) = 0 :
avec une calculatrice de poche,
Feigenbaum trouva la loi des μ_i : 4,66.
Il essaya plein de fonctions dos d'âne :



et trouva toujours 4,66.

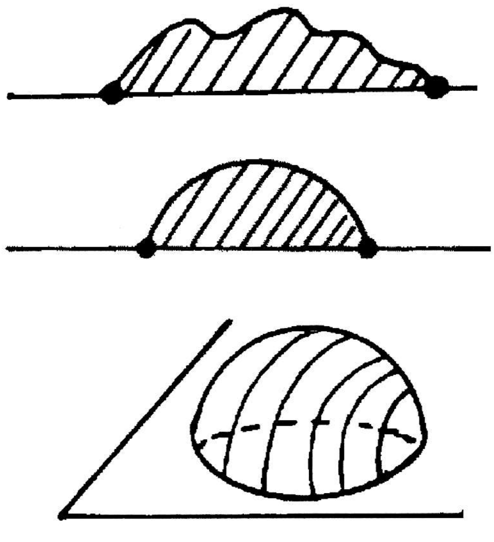
Puis Lanford, Ruelle et Epstein étudièrent le cas à deux ou plus de dimensions.
A l'automne 1984, en collaboration, Feigenbaum et Sullivan, ont obtenu des résultats dans cette direction.

Ici, pour comprendre un modèle de dimension infinie, on a utilisé des schémas très simples de dimensions très basses.

Inégalités isosystoliques de Gromvov

Inégalités isopérimétriques classiques utiles : problème de Didon, relation entre:

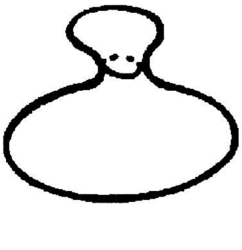
longueur et surface,



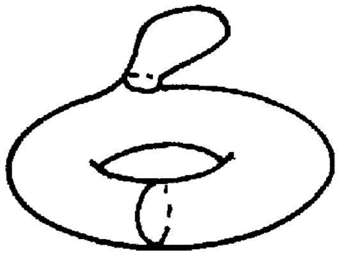
surface et volume.

Isosystolique : surfaces de l'espace

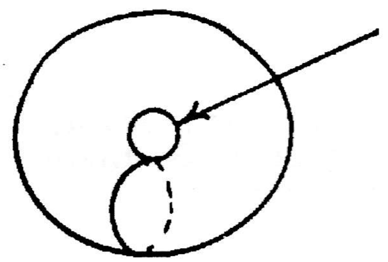
de type sphère



de type tore



systole l



Question : une systole l donnéen'implique-t-elle pas une aire trop petite ?

$a \geq l^2$ x constante universelle ? (aire = couche de peinture en cm^2)

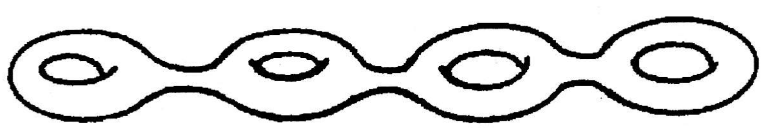
Loewner 1960 oui $a \geq \frac{\sqrt{3}}{2} l^2$

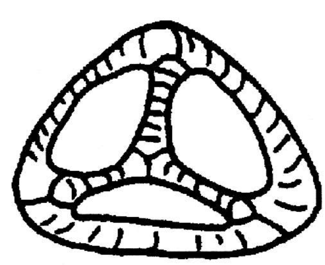
Surfaces plus compliquées à plus d'un trou : l trous

onjecture : à systole donnée, plus il y a de trous, plus l'aire doit être grande.

$a \geq l^2 \cdot c(g)$, $c(g)$ tendant vers l'infini quand g tend vers l'infini.

Une réponse par l'affirmative a été donnée tout recemment par Gromov. ❑





Tirez par les deux bouts
Avec quelles cordes fera-t-on un noeud si on tire sur les deux extrémités ?